TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2014, No. 2

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Impreso y hecho en México.
Mayo de 2014.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2014, Número 2

Tzaloa es una publicación viva y en constante evolución. Nuestro compromiso de servicio con la comunidad olímpica nos obliga a mantenernos en constante movimiento y por eso, a partir de este número, estrenamos una nueva sección *Concursos Estatales*. En ella presentamos los exámenes que año con año se aplican en las disitintas entidades federativas con el fin de seleccionar a las delegaciones que las representarán en el concurso nacional. Estamos seguros que la difusión a nivel nacional de estos materiales locales, tiende puentes que favorecen el intercambio entre los estados, contribuyendo así a la generación de condiciones, espacios y ambientes plurales y enriquecedores.

Para el artículo de Matemáticas de esta ocasión hemos escogido un tema clásico entre los clásicos: *Números primos y compuestos*. En este excelente trabajo y a través de una cuidadosa selección de proposiciones y problemas, Jorge Tipe Villanueva nos presenta

[1] Vocablo náhuatl cuyo significado en español es *aprender*.

un compendio de resultados y hechos relevantes del fascinante y misterioso mundo de los números primos. En esta selección se ejemplifica la importante y recurrente presencia de la teoría de números y los temas de divisibilidad en diversos concursos olímpicos. Cabe destacar la provocativa selección de problemas que, a manera de lista de ejercicios, se incluye al final del artículo.

Como siempre, hemos puesto todo nuestro entusiasmo y esmero en la integración y conformación de la demás secciones que tradicionalmente integran la revista. Esperamos que los contenidos, problemas, soluciones, exámenes, información olímpica y materiales que hemos escogido, revisado y preparado sean de interés y utilidad para todos nuestros lectores.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

28ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 28^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1995. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2014-2015 y, para el 1° de julio de 2015, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 28^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 9 al 14 de noviembre de 2014 en Toluca, Estado de México. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2014 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXVII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 56^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Tailandia, julio de 2015) y a la XXX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (Puerto Rico, septiembre de 2015).

De entre los concursantes nacidos en 1999 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XVII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (junio de 2015).

De entre los más jóvenes se seleccionará la delegación mexicana que nos representará en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC).

Números primos y compuestos

Por Jorge Tipe Villanueva

Nivel Introductorio

Sabemos que cualquier entero positivo n tiene como divisores a 1 y n. Si asumimos que $n > 1$ entonces n tendrá al menos dos divisores pues 1 y n son diferentes. En este artículo estudiaremos a los enteros positivos n que tienen como únicos divisores a 1 y n, estos números son los llamados números primos.

Definición 1. *Un número entero $n > 1$ es "primo" si sus únicos divisores positivos son 1 y n.*

Por ejemplo, el número 2 es primo, pues sus únicos divisores positivos son: 1 y 2. Además, el número 2 es el menor número primo.
A continuación mostramos los primeros números primos:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \ldots$$

Podemos notar que no hay una regularidad notoria en la sucesión de números primos, ni tampoco hay una regularidad en la diferencia entre dos números primos consecutivos, ya que esta diferencia varias veces es 2 y otras veces esta diferencia puede ser muy grande (veremos un resultado al respecto más adelante). Esta incertidumbre ha ocasionado que la sucesión de números primos haya sido objeto de estudio desde hace muchos siglos, desde la búsqueda de una "fórmula" que genere todos los primos, hasta diversos problemas que permanecen aún "abiertos" (es decir, que aún no se han podido resolver).

Un ejemplo muy conocido de "problema abierto" es el *Problema de los primos gemelos*. Decimos que dos números primos son *gemelos* si su diferencia positiva es 2. Por ejemplo, 3 y 5, 5 y 7, 11 y 13, 17 y 19, 29 y 31, 41 y 43, son primos gemelos. La conjetura de los números primos gemelos sugiere que hay un número infinito de ellos.

Parece que esta conjetura es atribuida a Euclides, y por lo tanto puede considerarse el problema más antiguo de las matemáticas, aproximadamente unos 2300 años.

El 17 de abril de 2013 el matemático chino Zhang Yitang, publicó lo que, al día de hoy, parece ser una demostración de la conjetura "débil" de los primos gemelos. Tratar de demostrar que existen infinitos primos p y q tales que $|p-q|=2$ es un problema de muy difícil solución. La conjetura débil de los primos gemelos dice que existen infinitos números primos p y q tales que $|p-q|<N$ para un entero positivo fijo N. Zhang Yitang ha propuesto una demostración para el caso $N=70,000,000$.

Ahora vamos a ver propiedades acerca de los números primos que nos serán útiles en la resolución de problemas.

Proposición 1. *Si p es un número primo y $p=ab$, donde a y b son enteros positivos, entonces $a=1$ o $b=1$.*

Demostración. Supongamos que ambos enteros fueran mayores que 1, entonces los números $1, a, ab$ serían tres divisores distintos de p debido a que $1<a<ab$, lo cual es una contradicción pues p tiene exactamente dos divisores positivos. Concluimos que alguno de los números a o b es igual a 1. ☐

Problema 1. *Sean a y b enteros positivos, con $a>b$. Demuestre que el número a^4-b^4 no es un número primo.*

Solución. Supongamos que $p=a^4-b^4$, donde p es un número primo, entonces

$$p=(a^2+b^2)(a^2-b^2),$$

luego, por la Proposición 1, alguno de los factores mostrados es 1. Como $a^2+b^2>1$, concluimos que $a^2-b^2=1$. La última ecuación no es posible porque no hay dos cuadrados perfectos (positivos) que se diferencíen en 1. Por lo tanto, queda demostrado que a^4-b^4 no puede ser primo.

Proposición 2.

1. *El único número primo par es* 2.
2. *Los números primos mayores que* 3 *son de la forma* $6k+1$ *o* $6k-1$.
3. *Los únicos números primos consecutivos son el* 2 *y* 3.
4. *Los números* 3, 5, 7 *son los únicos tres números primos que están en progresión aritmética de diferencia común* 2.

Demostración.

1. Si $2n$ es primo, por la Proposición 1, concluimos que $n=1$. Luego, 2 es el único primo par.

2. Un número primo mayor que 3 no es múltiplo de 3 ni de 2. Como todo entero positivo deja residuo 0, 1, 2, 3, 4 o 5 al ser dividido por 6, si deja residuo 0, 2 o 4 sería par, si deja residuo 3 sería múltiplo de 3. Por lo tanto, un número primo solo puede dejar residuo 1 o 5, es decir, es de la forma $6k + 1$ o $6k - 1$.

3. Si n y $n + 1$ son primos, uno de ellos es par, y por lo tanto igual a 2. Como 1 no es primo, el otro número primo es 3.

4. Si n, $n + 2$, $n + 4$ son números primos, como $0, 2, 4$ dejan distintos residuos al ser divididos por 3, entonces lo mismo sucede con los números $n, n + 2, n + 4$. En particular, uno de ellos tiene que ser múltiplo de 3, luego, debe ser igual a 3. Pero es claro que si uno de ellos es 3, debería ser el menor de ellos, es decir, los números serían 3, 5 y 7.

□

Problema 2. *Determine si existe un entero positivo n tal que:*

a) n, $n + 24$, $n + 48$ *sean números primos.*

b) n, $n + 26$, $n + 52$ *sean números primos.*

Solución.

a) Sí existe, por ejemplo $n = 5$, pues 5, 29 y 53 son números primos.

b) Supongamos que exista tal n. Como 0, 26 y 52 dejan distintos residuos al ser divididos por 3, lo mismo sucede con $n, n + 26, n + 52$, luego, uno de ellos tiene que ser múltiplo de 3, y como es primo debe ser igual a 3, pero el único que puede ser igual a 3 es el menor de ellos. Tendríamos que $n = 3$, y los otros números serían 29 y 55, pero $55 = 5 \times 11$ no es primo. Concluimos que no existe el n buscado.

Problema 3.

a) *Sea n un número entero impar. Demuestre que $n^2 - 1$ es múltiplo de 8.*

b) *Sea $p > 3$ un número primo. Demuestre que $p^2 - 1$ es múltiplo de 24.*

Solución.

a) Si n es impar, entonces $n = 2t + 1$ para algún entero t, luego,

$$n^2 = 4t^2 + 4t + 1 = 4t(t + 1) + 1 \Rightarrow n^2 - 1 = 4t(t + 1),$$

pero es claro que $t(t + 1)$ es par, entonces $n^2 - 1$ es múltiplo de 8.

b) Como $p > 3$ es primo, entonces p no es múltiplo de 3. Tenemos $p \equiv \pm 1 \pmod 3$, entonces $p^2 \equiv 1 \pmod 3$ lo que significa que $p^2 - 1$ es múltiplo de 3. Por la parte anterior, sabemos que $p^2 - 1$ es múltiplo de 8, entonces $p^2 - 1$ es múltiplo del mínimo común múltiplo de 8 y 3, es decir, es múltiplo de 24.

Problema 4. *Sean* p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 *y* p_6 *números primos (no necesariamente distintos) tales que*

$$p_1^2 = p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2.$$

Determine todos los valores que puede tomar p_1.

Solución. Digamos que entre los números p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 hay r primos impares y $5 - r$ números que son iguales a 2, entonces entre los números $p_2^2, p_3^2, p_4^2, p_5^2, p_6^2$ hay r que son congruentes con 1 en módulo 8 (por el problema anterior) y $5 - r$ que son iguales a 4, luego:

$$p_1^2 = p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 \equiv r \cdot 1 + (5 - r)4 \pmod 8.$$

Pero p_1 es impar porque es mayor que 2, entonces $p_1^2 \equiv 1 \pmod 8$, por lo tanto:

$$1 \equiv r \cdot 1 + (5 - r)4 \pmod 8 \Leftrightarrow 1 \equiv 20 - 3r \pmod 8,$$

de la última relación obtenemos que $r \equiv 1 \pmod 8$, y como r está entre 0 y 5, entonces la única posibilidad es $r = 1$. Es decir, entre los números p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 hay un primo impar y cuatro primos iguales a 2. Supongamos que p_2 es impar y $p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 2$. Reemplazando:

$$p_1^2 = p_2^2 + 16 \Rightarrow (p_1 + p_2)(p_1 - p_2) = 16,$$

donde los dos factores de la última ecuación son pares y $p_1 + p_2 > p_1 - p_2$, entonces $p_1 + p_2 = 8$ y $p_1 - p_2 = 2$, con lo cual $p_1 = 5$ y $p_2 = 3$. Hemos concluido que el único valor posible de p_1 es 5.

Definición 2. *Un número compuesto es un entero positivo que tiene más de dos divisores positivos.*

Por ejemplo, 6 es un número compuesto pues tiene más de dos divisores positivos, exactamente tiene cuatro, a saber: 1, 2, 3 y 6.

Los números primos tienen exactamente dos divisores positivos, y los números compuestos tienen más de dos. Todo número entero mayor que 1 es primo o es compuesto.

Proposición 3. *Un entero positivo es compuesto si y sólo si se puede expresar de la forma* ab*, donde* a *y* b *son enteros mayores que* 1.

Demostración. ($\Rightarrow$) Si n es compuesto, debe tener al menos un divisor comprendido entre 1 y n (si no lo tuviera habría exactamente dos divisores positivos). Sea a un divisor de n tal que $1 < a < n$. Definimos $b = \frac{n}{a}$, y es claro que b es divisor de n y además $b > 1$ pues $n > a$. Por lo tanto, tenemos que $n = ab$, donde a y b son divisores de n mayores que 1.

($\Leftarrow$) Supongamos que $n = ab$, donde a y b son enteros mayores que 1. Como $b > 1$, entonces $a < n$. Luego, tenemos que $1, a, n$ son divisores distintos de n, debido a las desigualdades $1 < a < n$. Concluimos que n tiene más de dos divisores, y por lo tanto es compuesto. $\square$

Proposición 4. *Todo entero $n > 1$ tiene al menos un factor primo.*

Demostración. Todo entero $n > 1$ tiene al menos dos divisores, como el 1 siempre es divisor, entonces podemos decir que todo entero $n > 1$ tiene al menos un divisor que es mayor que 1. Sea m el menor de los divisores de n que es mayor que 1. Probaremos que m es primo. Por el contrario, si m fuera compuesto, por la Proposición 3, m se podría expresar como $m = ab$ donde a y b son mayores que 1, luego, tendríamos que $1 < a < m$ y a sería un divisor de n, esto contradice el hecho de que m es el menor divisor de n mayor que 1. Por lo tanto, concluimos que m es primo. $\square$

Problema 5. *Sea $p_1, p_2, p_3, \ldots,$ la sucesión de todos los números primos ordenados de menor a mayor. Si $n \geq 2$, demuestre que $p_n + p_{n+1}$ se puede expresar como el producto de al menos tres enteros mayores que 1 (no necesariamente diferentes).*

(Baltic Way, 1992)

Solución. Como $n \geq 2$, entonces p_n y p_{n+1} son números primos impares, en consecuencia $p_n + p_{n+1}$ es par y el número $m = \frac{p_n + p_{n+1}}{2}$ es entero. Como $p_n < m < p_{n+1}$ vemos que m no puede ser primo (ni tampoco puede ser 1), entonces m es compuesto, y como tal, se puede expresar de la forma $m = ab$, donde a y b son enteros mayores que 1. Finalmente notemos que $p_n + p_{n+1} = 2m = 2ab$ está expresado como el producto de tres enteros mayores que 1.

Problema 6. *¿Cuál es el mayor entero positivo par que no puede expresarse como la suma de dos números impares compuestos?* *(AIME, 1984)*

Solución. Demostraremos que 38 es el mayor entero positivo par que no puede expresarse como la suma de dos números impares compuestos.
Los números compuestos impares menores que 38 son 9, 15, 21, 25, 27, 33 y 35. Notemos que no hay dos de ellos que sumen 38, es decir, 38 no se puede expresar como la suma de dos impares compuestos. Por lo tanto, para completar la solución, vamos a demostrar que todos los números pares mayores que 38 se pueden expresar como la suma de dos impares compuestos.
Todo número N, que es par y mayor que 38, tiene alguna de las formas $(40 + 6k)$, $(42 + 6k)$ o $(44 + 6k)$, donde $k \geq 0$ es un entero.

- $N = (40 + 6k)$ se puede expresar como la suma de dos impares compuestos de la siguiente forma:
$$N = (6k + 15) + 25,$$
pues 25 y $(6k + 15) = 3(2k + 5)$ son compuestos.

- $N = (42 + 6k)$ se puede expresar como la suma de dos impares compuestos de la siguiente forma:
$$N = (6k + 33) + 9,$$
pues 9 y $(6k + 33) = 3(2k + 11)$ son compuestos.

- $N = (44 + 6k)$ se puede expresar como la suma de dos impares compuestos de la siguiente forma:
$$N = (6k + 9) + 35,$$

pues 35 y $6k+9=3(2k+3)$ son compuestos.

Problema 7. *Un conjunto está formado por* 15 *números naturales coprimos dos a dos, todos ellos son mayores que* 1 *y no son mayores que* 1992. *Pruebe que en el conjunto hay al menos un número primo.* *(Rusia, 1992)*

Solución. Como los números son coprimos dos a dos, no hay dos de ellos que compartan un divisor primo. Luego, si p_i es el menor divisor primo del i-ésimo número $(1 \leq i \leq 15)$, entonces los números primos $p_1, p_2, \ldots, p_{15}$ son distintos entre sí.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_{15}$. Como los 15 primeros números primos son

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,$$

concluimos que $p_{15} \geq 47$. Sea N el número del conjunto que tiene a p_{15} como menor factor primo. Si N fuera compuesto, entonces $N \geq p_{15}^2 \geq 47^2 = 2209$, que es una contradicción, pues $N \leq 1992$. Con esto concluimos que N es primo.

Hasta ahora, hemos trabajado con los números primos usando solamente la definición, pero aún no sabemos cómo es el conjunto de los números primos. En ese sentido, un primer objetivo sería determinar cuántos números primos hay, ¿habrá una cantidad finita o infinita de números primos? Esta pregunta fue respondida satisfactoriamente por Euclides, aproximadamente en el siglo III a.C. En esa época, no se tenían muchas nociones de lo que era una demostración matemática, es más, muchos de los resultados que se conocían en ese entonces carecían de una demostración formal. Euclides fue uno de los primeros que trató de dar una demostración formal y lógica a los resultados que encontraba.

El siguiente teorema es de vital importancia no sólo en la Teoría de Números sino en la matemática en general. La primera demostración que damos es la demostración original de Euclides, que aparece en su libro *Elementos*.

Teorema 1. *Existen infinitos números primos.*

Demostración. Tomemos cualquier lista finita de números primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Demostraremos que existe al menos un número primo adicional que no está en la lista. Sea P el producto de todos los números primos de la lista: $P = p_1 p_2 \ldots p_n$. Sea $q = P+1$. Entonces, q es primo o no:

- Si q es primo entonces este sería un primo que no está en la lista.
- Si q no es primo entonces, por la Proposición 4, tiene algún divisor primo p. Si este factor p estuviera en nuestra lista, entonces sería un divisor de P (debido a que P es el producto de todos los números de la lista); pero sabemos que p divide a $P+1=q$, con lo cual tendríamos que p divide a P y q, entonces p divide a la diferencia de esos dos números, es decir, p divide a $q-P=(P+1)-P=1$, lo

cual no es posible porque ningún número primo divide a 1. Por lo tanto, hemos demostrado que p no puede estar en la lista. Esto significa que existe al menos un número primo que no está en la lista.

Esto demuestra que para cualquier lista finita de números primos, existe un número primo que no está en la lista. En consecuencia, hay infinitos números primos. □

Problema 8. *Una progresión aritmética está formada por enteros positivos, y es estrictamente creciente, demuestre que al menos uno de los términos de la progresión es un número compuesto.*

Solución. Digamos que la razón de la progresión es r. Como la progresión está formada por enteros y es estrictamente creciente, entonces r es un entero positivo. Consideremos un término m de la progresión que sea mayor que 1, los siguientes términos a partir de m son de la forma $m + nr$, donde $n \geq 1$. Si hacemos $n = m$, obtenemos el número $m+mr = m(1+r)$ que pertenece a la progresión y es compuesto, pues es el producto de dos enteros mayores que 1.

Proposición 5. *Para cualquier entero positivo k, existe una secuencia de k enteros positivos consecutivos tales que todos ellos son compuestos.*

Demostración. Considere los siguientes k números consecutivos:

$$(k+1)!+2, \quad (k+1)!+3, \quad (k+1)!+4, \quad \ldots, \quad (k+1)!+(k+1).$$

Como $(k+1)!$ es múltiplo de los números $2, 3, 4, \ldots, (k+1)$, entonces, el primer número es múltiplo de 2 y es mayor que 2, el siguiente es múltiplo de 3 y es mayor que 3, y así sucesivamente, el último es múltiplo de $(k+1)$ y es mayor que $k+1$. Por lo tanto, todos estos números son compuestos. □

Este resultado nos dice que podemos encontrar "bloques" arbitrariamente grandes de números consecutivos que estén formados únicamente por números compuestos. Esto implica que la diferencia entre dos números primos consecutivos puede ser tan grande como queramos, así por ejemplo, como existen 1000 números consecutivos compuestos, podemos encontrar dos números primos consecutivos cuya diferencia sea mayor que 1000.

Ejercicios

1. Halle todos los números primos p para los cuales $2p+1$ y $4p+1$ también son números primos.

2. Halle todos los números primos p tales que el número $(8p^4 - 3003)$ también es un número primo. (México, 1997)

3.
   a) Dé un ejemplo de cuatro números primos diferentes que estén en progresión aritmética.

   b) Cuatro números primos están en progresión aritmética de diferencia $d > 0$. Encuentre el menor valor posible de d.

4. ¿Cuántos números primos menores que 100 pueden escribirse como la suma de dos números primos y también como la suma de tres números primos, no necesariamente distintos? (Perú, 2006)

5. Determine si existen

   a) cuatro

   b) cinco

   enteros positivos tales que la suma de tres cualesquiera de ellos sea un número primo. (Torneo de las Ciudades, 1995)

6. Varios enteros distintos (no necesariamente positivos) tienen la propiedad de que la suma de cada tres de ellos es positiva y es, además, un número primo. ¿Cuántos son, a lo más, estos enteros? (Argentina, 2010)

7. Dados 6 números naturales distintos, Bill calcula la suma de cada par de ellos. ¿Cuál es la mayor cantidad de números primos que puede obtener Bill? (Bielorusia, 1995)

8. Sea B un subconjunto del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$, tal que si a y b pertenecen a B, entonces $a+b$ es un número compuesto. Halla el mayor número de elementos que puede tener B. (Perú, 2008)

9. Demuestre que los números $18^5 + 1$ y $12^7 + 1$ son compuestos.

10. Halle todos los números primos de la forma $n^n + 1$ que son menores que 10^{19}.

11. Un número natural es capicúa si al escribirlo en notación decimal, se puede leer de igual forma tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda, por ejemplo: 8, 23432, 6446. Sean $x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots$ todos los números capicúas. Para cada i sea $y_i = x_{i+1} - x_i$. ¿Cuántos números primos distintos tiene el conjunto $\{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$? (Olimpiada Iberoamericana, 1993).

12. Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una progresión aritmética de diferencia 2, formada por enteros positivos. Se sabe que, para $k = 1, 2, \ldots, n$, el número $a_k^2 + 1$ es primo. Determine el mayor valor posible de n. (Rusia, 2002).

13. Un número natural n es tal que $2n+1$ y $3n+1$ son cuadrados perfectos. ¿Puede el número $5n+3$ ser primo? (Rusia, 1993).

14. Demuestre que existen 1000 enteros positivos consecutivos que contienen exactamente 10 números primos.

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este segundo número del año 2014. Como seguramente ya habrás observado, el nivel de dificultad de los problemas que contiene esta sección varía conforme va transcurriendo el año. Es así, que el material seleccionado para el primer número es en su mayoría de nivel principiante y a partir de ahí, paulatinamente se incrementa el nivel, de manera que la selección para el cuarto (último) número del año es la que incorpora la mayor proporción de problemas avanzados. De cualquier manera, en todos los números siempre buscamos que la selección sea diversa que incluya retos interesantes y a la medida de todos.

Por último, te invitamos a contribuir al enriquecimiento de esta sección de la revista enviando problemas interesantes cuya solución desees compartir. Para ello ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos todas tus propuestas.

Problema 1. En las casillas de una cuadrícula de 20×14 se ponen algunas monedas (una moneda por casilla). Dos monedas son consideradas *vecinas* si están en la misma fila o columna y no hay otra moneda entre ellas. Si se permite que cada moneda tenga a lo más dos vecinas, ¿cuál es la máxima cantidad de monedas que se pueden poner en la cuadrícula?

Problema 2. En el triángulo ABC, los ángulos $\angle A$ y $\angle C$ miden 80° y 60°, respectivamente. ¿Cuánto mide el ángulo agudo formado por las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$?

Problema 3. Sea $P(x)$ un polinomio cuadrático con coeficiente principal igual a 1. Si los polinomios $P(x)$ y $P(P(P(x)))$ tienen una raíz en común, demuestra que $P(0)P(1) = 0$.

Problema 4. Demuestra que para cualquier entero positivo $n > 2$, se tiene la siguiente desigualdad

$$n^n - 1 > n^{\frac{n+1}{2}}(n-1).$$

Problema 5. Un entero positivo n es *chilo* si $4n+1$ es múltiplo de 5. ¿Cuántos números chilos hay entre 500 y 1000?

Problema 6. En un cuadrilátero $ABCD$ el lado AB es paralelo al lado DC y $\frac{AB}{DC} = 3$. Si E es la intersección de las diagonales AC y BD y el área de $ABCD$ es $1\,cm^2$, ¿cuál es el área del triángulo ABE?

Problema 7. Determina todas las ternas de números primos (p, q, r) que satisfacen las relaciones $pq \mid r^4 - 1$, $pr \mid q^4 - 1$ y $qr \mid p^4 - 1$.

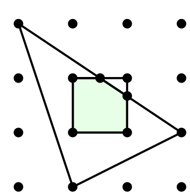
Problema 8. En un tablero de dos renglones y tres columnas, se van a escribir dos letras A, dos letras B y dos letras C, una en cada casilla. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto de manera que no haya dos letras iguales en la misma columna?

Problema 9. Alberto, Beatriz, Carlos, Daniel y Esteban tienen cada uno un libro. Cada uno de ellos arranca 45 hojas de su propio libro y suman los 90 números de las páginas de las hojas que arrancaron. Las sumas que obtuvieron Alberto, Beatriz, Carlos, Daniel y Esteban fueron 2003, 2007, 2013, 2070 y 2073, respectivamente. Supón que sólo uno de ellos se equivocó al sumar. ¿Quién fue?

Problema 10. Gerardo y Fernando son muy amigos. En su escuela les dejan tomar de 1 a 11 talleres. Si ninguno de los dos sabe cuáles talleres va a tomar el otro, ¿cuál es la mínima cantidad de talleres que cada uno debe tomar para garantizar que por lo menos estarán juntos en un taller?

Problema 11. Sea $ABCD$ un paralelogramo y sean E y F los puntos medios de BC y CD, respectivamente. Los segmentos AE y AF intersectan a la diagonal BD en M y N, respectivamente. Demuestra que M y N dividen a BD en tres partes iguales.

Problema 12. En la figura, las distancias entre dos puntos consecutivos (horizontal y verticalmente) es igual a $1\,cm$. ¿Cuánto mide el área de la región común entre el triángulo y el cuadrado?



Problema 13. Una lámpara de techo tiene siete focos, acomodados de forma circular y cada uno de los focos tiene su propio interruptor. Un día, dicha lámpara sufre un desperfecto y los interruptores ahora cambian el estado tanto del foco original como de los siguientes cuatro focos en el sentido horario (ahora cada interruptor cambia el estado de cinco focos consecutivos).

(a) Suponiendo que inicialmente todos los focos están apagados. Muestra que, usando sólo los interruptores, es posible llegar a que todos los focos estén encendidos al mismo tiempo.

(b) Suponiendo que inicialmente todos los focos están apagados. Muestra que, usando sólo los interruptores, es posible obtener cualquier configuración de focos encendidos y apagados.

(c) Un día, un electricista altera los interruptores, de manera que ahora cada interruptor cambia de encendido a apagado al foco original y a los siguientes tres focos en el sentido horario (ahora cada interruptor cambia el estado de cuatro focos consecutivos). Muestra que si todos los focos están apagados, ahora es imposible obtener que todos los focos estén encendidos.

Problema 14. Para cada entero positivo n denotamos por $S(n)$ a la suma de sus dígitos y por $U(n)$ al dígito de sus unidades. Encuentra todos los enteros positivos n tales que $n = S(n) + U(n)^2$.

Problema 15. Cincuenta puntos se eligen en el interior de un polígono convexo de 80 lados de tal manera que entre los 130 puntos (los 80 vértices y los 50 puntos del interior) no hay tres colineales. Se divide el polígono en triángulos de manera que cada triángulo está formado por tres vértices de esos 130 puntos y tal que no quedan puntos sin ser parte de un triángulo. ¿En cuántos triángulos se dividió el polígono?

Problema 16. A es un número de dos dígitos y B es un número de tres dígitos tales que A incrementado en $B\,\%$ es igual a B reducido en $A\,\%$. Encuentra todas las parejas posibles (A, B).

Problema 17. Con los dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6$ se forman dos números de tres dígitos, usando cada dígito exactamente una vez. ¿Cuál es la menor diferencia que puede haber entre el mayor y el menor de ellos?

Problema 18. Una zapatería tiene 175 botas talla 8, 175 botas talla 9 y 200 botas talla 10. De estas 550 botas, 250 son para pie izquierdo y 300 son para pie derecho. Sea n el número de pares usables de botas. ¿Es posible que $n = 50$? ¿Es posible que $n = 51$? (Un par de botas usable consiste en una pareja de botas de la misma talla, una de ellas izquierda y la otra derecha. Además, una bota no puede contarse más de una vez en los pares usables.)

Problema 19. Determina todos los enteros $r > s > t$ y todos los polinomios cuadráticos de la forma $f(x) = x^2 + bx + c$ tales que b y c son números enteros, $r + t = 2s$, $f(r) = 1$, $f(s) = b$ y $f(t) = c$.

Problema 20. Se tiene un tesoro guardado en una caja cerrada con cierto número de candados. 10 personas tienen cada una llaves de algunos de los candados de tal manera que cualesquiera tres personas pueden abrir la caja pero no hay dos que puedan abrirla. ¿Cuál es la menor cantidad de candados que puede haber?

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección podrás encontrar las soluciones de los 20 problemas de la sección anterior. Sin embargo, no te recomendamos consultarla antes de tener tu propia respuesta o por lo menos no sin haberle dedicado bastante tiempo a cada problema. Ten en cuenta que la clave para mejorar tus capacidades está en la perseverancia y el esfuerzo.

Cabe aclarar que las soluciones que aquí se presentan no son necesariamente las únicas o las mejores, tan sólo son ejemplos que muestran el tipo de razonamiento que busca estimular la olimpiada. En matemáticas, cada problema puede tener tantas soluciones correctas como ideas originales se desarrollen con creatividad y lógica. Si tú encontraste una solución diferente de las que aquí se presentan y no estás seguro de su validez o simplemente quieres compartirla con nosotros, te invitamos para que nos escribas a `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Denotemos por $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ el número de monedas en las filas $1, 2, \ldots, 20$, respectivamente y por $y_1, y_2, \ldots, y_{14}$ el número de monedas en las columnas $1, 2, \ldots, 14$, respectivamente. Si M es el número total de monedas se tiene que $M = x_1 + x_2 + \cdots + x_{20} = y_1 + y_2 + \cdots + y_{14}$. Como en la fila i, si $x_i > 0$ se tienen exactamente $2x_i - 2$ vecinos (y un razonamiento análogo para las columnas), se tiene que el número total de vecinos V cumple que

$$V \geq (2x_1 - 2) + (2x_2 - 2) + \cdots + (2x_{20} - 2) + (2y_1 - 2) + (2y_2 - 2) + \cdots + (2y_{14} - 2)$$

(esto es una desigualdad pues podría ocurrir que algunos x_i o y_i sean iguales a 0). Además, como cada moneda tiene a lo más dos vecinos, tenemos que $V \leq 2M$, de donde $4M - 68 \leq 2M$ de donde $M \leq 34$. Esta cota puede alcanzarse poniendo monedas en todo el último renglón, en toda la última columna y en la esquina superior izquierda. Luego, se pueden poner a lo más 34 monedas.

Solución del problema 2. En el triángulo ABC, el ángulo en B mide $180° - 80° - 60° = 40°$. Si llamamos I al punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle A$

y $\angle B$, entonces, en el triángulo IAB el ángulo en A mide $40°$ y el ángulo en B mide $20°$. Puesto que los tres ángulos deben sumar $180°$, el ángulo en I es igual a $120°$. Así, las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ se cortan formando ángulos de $60°$ y $120°$, por lo que el ángulo agudo es de $60°$.

Solución del problema 3. Sea $P(x) = x^2 + ax + b$ y supongamos que t es la raíz común de $P(x)$ y $P(P(P(x)))$. Entonces $P(t) = 0$ y $P(P(P(t))) = P(P(0)) = 0$. Además, $P(0) = b$ y $P(1) = 1 + a + b$. Entonces

$$0 = P(P(0)) = P(b) = b^2 + ab + b = b(b + a + 1) = P(0)P(1).$$

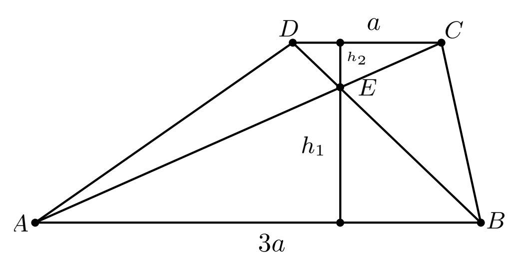
Solución del problema 4. Utilizando la factorización $n^n - 1 = (n-1)(n^{n-1} + n^{n-2} + \cdots + n + 1)$ y dividiendo por n, la desigualdad se traduce en demostrar

$$\frac{n^{n-1} + n^{n-2} + \cdots + n + 1}{n} > n^{\frac{n-1}{2}}.$$

Notemos que $n^{\frac{n-1}{2}} = \sqrt[n]{n^{\frac{n(n-1)}{2}}} = \sqrt[n]{n^{n-1} \cdot n^{n-2} \cdots n \cdot 1}$ que es la media geométrica de los números $1, n, n^2, \ldots, n^{n-2}, n^{n-1}$. Luego, la desigualdad se da al aplicar la desigualdad MA-MG a estos números. La desigualdad es estricta puesto que $n \neq 1$.

Solución del problema 5. Para que un número sea múltiplo de 5, debe terminar en 0 o 5, por lo cual, para que $4n + 1$ sea chilo, el número $4n$ debe terminar en 9 o 4. Pero $4n$ es par, así que n es chilo exactamente cuando $4n$ termina en 4. Haciendo la lista de posibilidades, esto ocurre precisamente cuando n termina en 1 o 6. Ahora bien, entre 500 y 1000 hay exactamente 50 números que terminan en 1, y 50 que terminan en 6. Por tanto, hay exactamente 100 números chilos entre 500 y 1000.

Solución del problema 6. Sea a la longitud de DC, y por lo tanto $AB = 3a$, además sea h la distancia entre los lados AB y CD (la longitud del segmento perpendicular a AB y DC). Entonces el área de este cuadrilátero es $\frac{(a+3a)h}{2}$, que es igual a $1\, cm^2$, luego $2ah = 1$.



Puesto que AB es paralela a CD los triángulos CDE y ABE son semejantes y de razón 3. Entonces si h_1 y h_2 son las alturas desde E a AB y CD se tiene que $h_1 = 3h_2$, de donde $h = h_2 + 3h_2 = 4h_2$. Sustituyendo obtenemos que $2a(4h_2) = 1$, de donde el área del triángulo ABE es igual a $\frac{(3a)h_1}{2} = \frac{3a(3h_2)}{2} = \frac{9}{16}\, cm^2$.

Solución del problema 7. Observemos primero que cualesquiera dos de los tres números primos son distintos, ya que si, por ejemplo, $p = q$ entonces $p^4 - 1$ no sería divisible entre q. Sin pérdida de generalidad, supongamos que p es el menor de los tres números. Sabemos que $p^4 - 1 = (p-1)(p+1)(p^2+1)$ es divisible entre qr. Como $p-1$ es menor que los dos números primos q y r, tenemos que $p-1$ es primo relativo con cada uno de ellos. Por lo tanto, $(p+1)(p^2+1)$ es divisible entre qr. Por otra parte, notemos que el número p^2+1 no puede ser divisible entre ambos números q y r, ya que $p^2+1 < (p+1)(p+1) < qr$. Por lo tanto, $p+1$ es divisible entre alguno de los números primos q o r, digamos q. Luego, $q \leq p+1$. Como $q > p$, la única posibilidad es $q = p+1$. Como q es primo, p no puede ser un primo impar. Luego, $p = 2$ y $q = 3$. Ahora, $3r$ debe dividir a $p^4 - 1 = 2^4 - 1 = 15$, esto es, r debe dividir a 5. Como r también es primo, $r = 5$. Finalmente, es fácil verificar que la terna $(2,3,5)$ satisface las condiciones del problema. Por lo tanto, las ternas que satisfacen el problema son todas las permutaciones de los números $2, 3$ y 5.

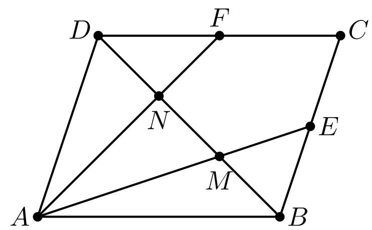
Solución del problema 8. Dividamos el problema en dos casos. El primer caso es que las letras del primer renglón son todas distintas, y en el segundo caso será que hay dos letras iguales en el primer renglón. En el primer caso, como las tres letras del primer renglón son distintas, y por ser 3 casillas, tenemos $3! = 6$ posibilidades para determinar las letras del primer renglón. Para acomodar las letras del segundo renglón sólo hay dos posibilidades, que la A esté debajo de la B o bien, debajo de la C, pues no puede haber dos letras en la misma columna. Una vez colocada la A, las letras B y C quedan totalmente determinadas. Así en este primer caso hay $2 \times 3! = 12$ posibilidades. Para el segundo caso, como hay dos letras iguales y una distinta, tenemos 3 opciones para la letra del primer renglón que se repite, y dos opciones para la letra restante de ese mismo renglón. Una vez determinadas, hay 3 posibilidades que se obtienen al acomodar esas tres letras en el primer renglón, así que van $3 \times 3 \times 2 = 18$ posibilidades. Ahora bien, la letra que no se repitió en el primer renglón, no puede ir en la misma columna al acomodar la del segundo renglón, por tanto, tenemos dos casillas donde escribirla. Una vez hecho esto, las letras restantes quedan determinadas, por lo que en este segundo caso hay $18 \times 2 = 36$ posibilidades. En total por los dos casos, hay $12 + 36 = 48$ maneras de escribir las letras, como se pide en las condiciones del problema.

Solución del problema 9. En cada hoja del libro, hay dos números consecutivos, por lo que uno de ellos es par y el otro es impar. La suma de ambos números, es pues, impar. Como son 45 hojas, la suma de los 90 números es precisamente la suma de los 45 números impares obtenidos al sumar hoja por hoja. Puesto que la suma de un número impar de números impares es de nuevo un número impar, es imposible obtener 2070 como resultado. Por ello, es Daniel quien se debió equivocar al sumar.

Solución del problema 10. Si Fernando y Gerardo tomaran cada uno 5 talleres, podría pasar que no estén juntos en ningún taller; esto puede suceder si Fernando toma 5 talleres distintos a los de Gerardo, cubriendo así 10 de los 11 talleres posibles. En el caso de que cada uno tome 6 talleres, forzosamente deben compartir un taller porque de lo contrario debería haber al menos $6+6 = 12$ talleres distintos (6 talleres que lleva

Fernando y 6 talleres que lleva Gerardo), pero sólo hay 11 talleres. Por lo tanto si cada uno toma 6 talleres compartirán al menos uno.

Solución del problema 11. Como las rectas AB y DF son paralelas, tenemos que los triángulos ABN y FDN son semejantes. Además, como $\frac{DF}{AB} = \frac{DF}{BC} = \frac{1}{2}$ tenemos que $\frac{DN}{NB} = \frac{1}{2}$. Análogamente obtenemos que $\frac{BM}{MD} = \frac{1}{2}$. Estas dos igualdades implican que $DN = MB = \frac{1}{3}DB$, como se quería demostrar.



Solución del problema 12. Claramente, el área del cuadrado es igual a $1\,cm^2$. Calcularemos primero el área de la región del cuadrado que está afuera del triángulo. Dicha región es un triángulo rectángulo, por lo que, para conocer su área, basta calcular las longitudes de sus catetos. Llamémosle l al lado del triángulo que corta al cuadrado y llamemos h y v al lado horizontal y al lado vertical del cuadrado que son cortados por l, respectivamente. Observemos que l es la diagonal de un rectángulo de 2×3 y por eso, l pasa por el centro de ese rectángulo. También podemos ver que h pasa por el centro de ese rectángulo, y que dicho centro es el punto medio de h. Por tanto, l interseca a h en su punto medio. Por semejanza, podemos ver que l corta a v en razón $1 : 2$, por lo que el cateto vertical del triangulito mide $\frac{1}{3}\,cm$. Por tanto, el área de dicho triangulito es $\frac{1/2 \times 1/3}{2} = \frac{1}{12}\,cm^2$. Así, el área sombreada es $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}\,cm^2$.

Solución del problema 13.

(a) Notemos que si usamos los siete interruptores excactamente una vez, logramos hacer que todos los focos cambien de encendido a apagado. Por ejemplo, si numeramos los focos con los números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, entonces el foco 2 se ve afectado por los interruptores de los focos $5, 6, 7, 1$ y 2, es decir, se ha encendido y apagado un número impar de veces, por lo cual a final de cuentas el foco 2 pasó del estado apagado a encendido. Lo mismo ocurre con los otros focos.

(b) Para probar que es posible obtener cualquier configuración de focos encendidos, basta demostrar que podemos hacer una serie de movimientos de los interruptores de manera que al final se tenga que sólo un foco pasó de estar encendido a apagado, porque dada una configuración de focos encendidos, podemos aplicar este procedimiento que sólo cambia un foco a cada uno de los que queremos que resulten encendidos. Ahora bien, si todos los focos están apagados y queremos que el foco número 3 sea el único encendido, podemos activar los interruptores 1, 3 y 6. En general, activamos el interruptor del foco que queremos encender, el que ocupa dos lugares antes y el del que ocupa tres lugares después en sentido horario.

(c) Demostraremos que cada vez que activamos un interruptor, no cambia la paridad del número de focos encendidos, y esto implicará que no se puede llegar a que todos estén encendidos. Hay cinco posibilidades a considerar:

1. *Ningún foco, de los cuatro que cambia el interruptor, está encendido:* En este caso, el interruptor encenderá los cuatro focos que estaban apagados, y como el número de focos encendidos aumentó en 4, su paridad no cambia.
2. *Sólo un foco, de los cuatro que cambia el interruptor, está encendido:* En este caso, antes de usar el interruptor había un foco encendido y tres apagados, y después de usarlo pasamos a la situación contraria. Así, el número de focos encendidos se incrementó en 2, por lo que su paridad no cambia.
3. *Dos focos, de los cuatro que cambia el interruptor, están encendidos y los otros dos están apagados:* En este caso, después de usar el interruptor vuelven a estar dos focos encendidos y dos apagados, por lo que la paridad del número de focos encendidos no cambia.
4. *Sólo un foco, de los cuatro que cambia el interruptor, está apagado:* En este caso, antes de usar el interruptor había un foco apagado y tres encendidos, y después de usarlo pasamos a la situación contraria. Así, el número de focos encendidos se redujo en 2, por lo que su paridad no cambia.
5. *Ningún foco, de los cuatro que cambia el interruptor, está apagado:* En este caso, el interruptor apagará los cuatro focos que estaban encendidos, y como el número de focos encendidos disminuyó en 4, su paridad no cambia.

Solución del problema 14. Viendo la igualdad en módulo 9, como $n \equiv S(n)$ concluimos que 9 divide a $U(n)^2$. Luego, los valores de la unidad pueden ser 0, 3, 6 o 9. Por otro lado, si n tiene k dígitos se tiene que

$$10^{k-1} \leq n = S(n) + U(n)^2 \leq 9k + 81.$$

Por lo que $10^{k-1} \leq 9k + 81$. Si $k = 4$ esto es falso, pues $1000 > 4 \cdot 9 + 81$. Si $k > 4$ se sigue cumpliendo que $10^{k-1} > 9k + 81$, pues el lado izquierdo se multiplica por 10 y el derecho sólo aumenta en 9. Luego, $k \leq 3$. Veamos los tres casos.

- n tiene un dígito. Si a es el dígito tenemos que $a = a + a^2$, lo cual implica que $a = 0$ y n no es entero positivo.
- n tiene dos dígitos. Digamos que $n = 10a+b$ con a y b dígitos y $a \neq 0$. Tenemos que $10a + b = a + b + b^2$ de donde $9a = b^2$. Si $b = 0$ se obtiene que $a = 0$ y $n = 0$. Si $b = 3$, 6 o 9, obtenemos los números 13, 46 y 99, los cuales cumplen.
- n tiene tres dígitos. Digamos que $n = 100a + 10b + c$ con a, b y c dígitos con $a \neq 0$. Se tiene que $100a + 10b + c = a + b + c + c^2$ de donde $c^2 = 99a + 9b$, pero esto es imposible, pues $c^2 \leq 81 < 99 \leq 99a \leq 99a + 9b$, por lo que no hay soluciones en este caso.

Luego, los números que cumplen son 13, 46 y 99.

Solución del problema 15. Supongamos que tenemos n triángulos. La suma de los $3n$ ángulos interiores de estos triángulos debe ser igual a $180n$. Por otro lado, esta suma es igual a la suma de los ángulos interiores del polígono (juntanto los ángulos en los que los dividen) más 50 veces $360°$, pues cada punto interior aporta $360°$ a esa suma. Se tiene que $180n = 78 \cdot 180 + 50 \cdot 360$, de donde $n = 178$.

Solución del problema 16. Tenemos que

$$A\left(1 + \frac{B}{100}\right) = B\left(1 - \frac{A}{100}\right),$$

lo cual es equivalente a $AB + 50A - 50B = 0$ y llegamos a que $(50 - A)(50 + B) = 2500$. Como $B \geq 100$ tenemos que $50 - A \leq \frac{2500}{150} < 17$. Los únicos divisores de 2500 menores que 17 son 1, 2, 4, 5 y 10. Además, si $50 - A$ es menor o igual a 2, tenemos que $50 + B$ es al menos 1250, por lo que B tendría cuatro dígitos. Luego, $50 - A$ puede ser 4, 5 o 10.

- Si $50 - A = 4$ tenemos que $B + 50 = 625$, obteniendo la pareja $(46, 575)$.
- Si $50 - A = 5$ tenemos que $B + 50 = 500$, obteniendo la pareja $(45, 450)$.
- Si $50 - A = 10$ tenemos que $B + 50 = 250$, obteniendo la pareja $(40, 200)$.

Por lo que concluimos que las posibles parejas son $(46, 575)$, $(45, 450)$ y $(40, 200)$.

Solución del problema 17. Denotemos por M al mayor de ambos números y por m al menor. Para que la diferencia $M - m$ sea la menor posible, las centenas de ambos deberán ser números consecutivos. Por otra parte, el número de dos dígitos formado por las unidades y decenas de m deberá ser el mayor posible, a saber, 65, y el número formado por las unidades y decenas de M deberá ser el menor posible, a saber, 12. Así, $M = 412$ y $m = 365$, cuya diferencia es 47.

Solución del problema 18. Sean x, y y z el número de parejas de botas usables de talla 8, 9 y 10, respectivamente. Tenemos que $n = x + y + z$ y supongamos que $n = 50$ o 51. Pongamos aparte estas $2n$ botas. Nos hemos quedado con $250 - n$ botas para pie izquierdo y con $300 - n$ botas para pie derecho. Entre todas estas no debe ser posible hacer otro par usable.

Como $300 - n \geq 249$, de entre las botas derechas que nos quedan debe haber de al menos dos tallas (pues de una talla hay a lo más 200). Luego, las $250 - n$ botas izquierdas deben ser todas de la misma talla (pues de otro modo tendríamos al menos una pareja usable más). Como $250 - n \geq 199$, esta talla no puede ser ni la 8 ni la 9 (pues de estas hay 175 botas). Luego, las $250 - n$ botas izquierdas deben ser todas de talla 10 y las $300 - n$ botas derechas deben ser talla 8 o 9.

Luego, el total de botas talla 10 es igual a $200 = (250 - n) + 2z$, por lo que n es par y es imposible que n sea 51.

Para $n = 50$ sí es posible, basta tomar $z = 0$ (es decir, que haya 200 botas talla 10 izquierdas) y poner 25 botas izquierdas y 150 botas derechas.

Solución del problema 19. Las condiciones son:

$$\begin{aligned} r^2 + br + c &= 1, & (1)\\ s^2 + bs + c &= b, & (2)\\ t^2 + bt + c &= c, & (3)\\ r + t &= 2s. & (4) \end{aligned}$$

De la ecuación (3) tenemos que $t(t + b) = 0$, de donde $t = 0$ o $t = -b$. Consideremos cada caso.

Caso 1: $t = 0$. De la ecuación (4) tenemos que $r = 2s$. Sustituyendo en (1) obtenemos $4s^2+2bs+c = 1$. Restando (2) de esta última ecuación obtenemos que $3s^2+bs = 1-b$ la cual puede escribirse en la forma $(s + 1)(3s - 3 + b) = -2$. De aquí, tenemos que $s + 1$ divide a 2. Por lo tanto, los posibles valores de s son: -3, -2, 0 y 1. Sin embargo, como $s > t$ el único valor que cumple es $s = 1$. Concluimos entonces que $b = -1$. Finalmente, de la ecuación (2) obtenemos que $c = -1$ y el polinomio es $f(x) = x^2 - x - 1$ con $r = 2$, $s = 1$ y $t = 0$.

Caso 2: $t = -b$. De la ecuación (4) obtenemos que $r = 2s + b$. Sustituyendo en (1) obtenemos $4s^2 + 6sb + 2b^2 + c = 1$. Restando (2) de esta ecuación, obtenemos $3s^2 + 5sb + 2b^2 = 1 - b$ la cual puede escribirse en la forma $(3s + 2b + 3)(s + b - 1) = -2$. De aquí, tenemos que -2 es divisible por $s + b - 1$. Como $r > s > t = -b$, tenemos que $s + b > 0$. Luego, $s + b - 1 > -1$ y por lo tanto $s + b - 1 = 1$ o 2. Si $s + b - 1 = 1$, tenemos que $3s + 2b + 3 = -2$ y de aquí $s = -9$ y $b = 11$. Sustiyuendo estos valores en la ecuación (2) obtenemos que $c = 29$. Luego, $f(x) = x^2 + 11x + 29$ con $r = -7$, $s = -9$ y $t = -11$. Si $s + b - 1 = 2$, tenemos que $3s + 2b + 3 = -1$ y por lo tanto $s = -10$ y $b = 13$. Luego, $f(x) = x^2 + 13x + 43$ con $r = -7$, $s = -10$ y $t = -13$.

Solución del problema 20. Consideremos las $\binom{10}{2} = 45$ parejas de personas. A cada una de estas parejas les falta al menos una llave. Por otro lado, siempre que tomemos dos parejas les tiene que faltar llaves distintas, pues si les falta la misma llave, al juntarlas tendríamos al menos tres personas y no podrían abrir todos los candados. Luego, a cada pareja le falta una llave diferente y tiene que haber al menos 45 llaves.
Para concluir el problema, veamos que se puede con 45 llaves. Numeramos las 45 parejas del 1 al 45. A cada persona le damos las llaves de las 45 candados y les quitamos las llaves con número igual a cada pareja donde pueden ellos estar. Con ello a cada uno le quitamos 9 llaves (pues cada persona está en 9 parejas). Por construcción, ninguna pareja puede abrir la caja y si tenemos tres personas, digamos A, B y C entre las tres deben estar las llaves de los 45 candados, pues cada candado representa una pareja y para cada pareja, al menos uno entre A, B y C no está en ella.

Problemas de Entrenamiento

Esta es la sección interactiva de la revista y su construcción sólo es posible con la participación entusiata de todos sus lectores. Los siguientes 10 problemas que presentamos carecen de solución pues están esperando a que tú los resuelvas. Acepta el reto y resuelve uno o todos los *Problemas de Entrenamiento* y una vez que lo logres, envíanos tus soluciones cuanto antes para que puedan salir publicadas con tu nombre impreso.

Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo.

Problemas de Entrenamiento.
Año 2014 No. 2.

Problema 1. Los primeros cuatro dígitos de un entero positivo son 1, 1, 3 y 7. Demuestra que podemos reacomodar sus dígitos de tal manera que el nuevo número sea divisible entre 7.

Problema 2. Demuestra que hay una infinidad de enteros positivos pares m tales que $m + p^2$ es compuesto para todo número primo p.

Problema 3. Alrededor de una circunferencia están marcados 60 puntos de manera que 30 de ellos son rojos, 20 azules y 10 verdes. Estos puntos dividen la circunferencia en

60 arcos y a cada arco se le asigna un número, dependiendo de los colores de sus dos extremos:

- Si un arco tiene extremos rojo y verde, se le asigna el número 1.
- Si un arco tiene extremos azul y rojo, se le asigna el número 2.
- Si un arco tiene extremos verde y azul, se le asigna el número 3.
- Si un arco tiene extremos del mismo color, se le asigna el número 0.

¿Cuál es la máxima suma de los números asignados a los arcos?

Problema 4. Diez niñas, numeradas del 1 al 10 se sientan alrededor de una mesa de cualquier manera. Cada niña recibe un nuevo número, que es la suma de su número y el de sus dos vecinas. Demuestra que alguna niña recibe un número mayor que 17.

Problema 5. Sea $ABCD$ un cuadrado de diagonales AC y BD y llamémosle O a su centro. Se construye un cuadrado $PQRS$, cuyos lados son paralelos a los de $ABCD$, tal que P está sobre el segmento AO, Q está sobre el segmento BO, R está sobre el segmento CO, S está sobre el segmento DO. Si el área del cuadrado $PQRS$ es la mitad del área del cuadrado $ABCD$ y M es el punto medio del lado AB, ¿Cuánto mide el ángulo $\angle AMP$?

Problema 6. Cada uno de los números $a_1, a_2, \ldots, a_{2014}$ puede tomar uno de los valores $\sqrt{3}-1$ y $\sqrt{3}+1$. Considera la suma

$$\sum_{k=1}^{1007} a_{2k-1}a_{2k} = a_1a_2 + a_3a_4 + \cdots + a_{2013}a_{2014}.$$

¿Cuántos valores enteros distintos puede valer esta suma?

Problema 7. Sean x, y, z números reales positivos. Si $\sqrt{a} = x(y-z)^2$, $\sqrt{b} = y(z-x)^2$ y $\sqrt{c} = z(x-y)^2$, demuestra que $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc + ca)$.

Problema 8. Un poliedro P cumple que cada una de sus aristas es tangente a un esfera y todas sus aristas son congruentes. Si una de las caras de P tiene una cantidad impar de lados, demuestra que existe una esfera que pasa por todos los vértices de P.

Problema 9. El incírculo del triángulo ABC toca a los lados BC y AD en los puntos D y F, respectivamente; e intersecta a la recta AD nuevamente en H y a la recta CF nuevamente en K. Demuestra que $\dfrac{FD \cdot HK}{FH \cdot DK} = 3$.

Problema 10. Demuestra que para cada entero positivo k, existen infinitos enteros positivos n tales que los números

$$2^n + 3^n - 1, 2^n + 3^n - 2, \ldots, 2^n + 3^n - k$$

son todos compuestos.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2013 No. 3.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 3, año 2013. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 4, año 2013, por lo que todavía estás a tiempo para que tus trabajos puedan salir publicados dándote todo el crédito que mereces.

Problema 1. Sean a y b números reales positivos tales que $a^3 = a + 1$ y $b^6 = b + 3a$. Demuestra que $a > b$.

Solución. Como $a^3 = a+1$ tenemos que $a > 1$ (de otro modo $a^3 < a < a+1$). De la misma manera, como $b^6 = b+3a$ tenemos que $b > 1$ (de otro modo $b^6 < b < b+3a$). Ahora, si $b \geq a$ tenemos que

$$\begin{aligned} b - a &> (b-a) - (a-1)^2 = b - a^2 + a - 1 = (b+3a) - (a+1)^2 = b^6 - a^6 \\ &= (b-a)(b^5 + b^4 a + b^3 a^2 + b^2 a^3 + b a^4 + a^5) \geq b - a, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción y concluimos que $a > b$.

Problema 2. Un número de cuatro dígitos $abcd$, se dice que es *defectuoso* si el producto de sus dos últimos dígitos c y d es igual al número de dos dígitos ab, y si el producto de los dígitos $c-1$ y $d-1$ es igual al número de dos dígitos ba. Encuentra todos los números defectuosos.

Solución. Observemos que si $abcd$ es un número defectuoso, entonces $a \neq 0$, $c \geq 1$, $d \geq 1$ y $b \neq 0$. Además

$$\begin{aligned} c \times d &= 10a + b = ab \\ (c-1) \times (d-1) &= 10b + a = ba \end{aligned}$$

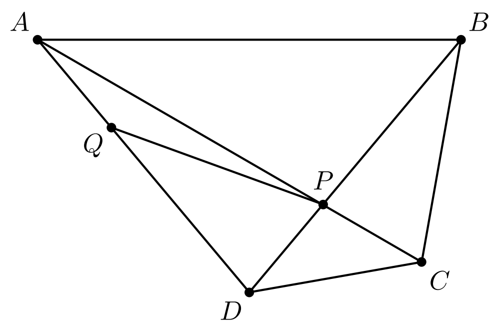
Entonces,

$$\begin{aligned} 10b + a &= cd - d - c + 1 \\ &= 10a + b - d - c + 1 \\ 9(a-b) &= c + d - 1 \end{aligned}$$

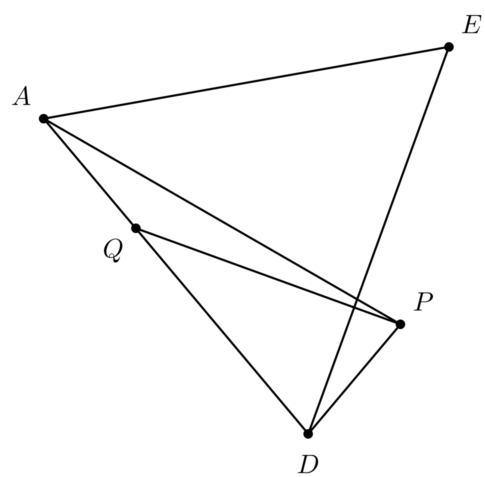
Luego, $1 \leq 9(a-b) \leq 17$, de donde $9(a-b) = 9$, esto es, $a = b+1$. Entonces $c + d = 10$. Sustituyendo tenemos que $c(10-c) = 10(b+1) + b$, es decir, $c^2 - 10c + (11b + 10) = 0$. Resolviendo esta ecuación cuadrática en la variable c obtenemos que $c = 5 \pm \sqrt{15 - 11b}$, de donde $15 - 11b \geq 0$, es decir, $b \leq \frac{15}{11} < 2$. Luego, $b = 0$ o 1. Si $b = 0$, c no es entero. De aquí que $b = 1$, $a = 2$ y $c = 7$ o $c = 3$, lo que implica que $d = 3$ o $d = 7$, respectivamente. Por lo tanto, los únicos números defectuosos son 2137 y 2173.

Problema 3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $\angle BAC = 30°$, $\angle CAD = 20°$, $\angle ABD = 50°$ y $\angle DBC = 30°$. Sea P la intersección de las diagonales de $ABCD$. Demuestra que $PC = PD$.

Solución de Francisco Javier Navarro Nieblas. Como $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 50° = \angle ABD$, se tiene que el triángulo ABD es isósceles, de donde $AD = BD$. Además, tenemos que, $\angle APD = \angle PAB + \angle ABP = 80°$, ya que es ángulo externo del triángulo APB.



Como $\angle DAP = 20°$, si nos fijamos en el triángulo ADP, tenemos que $\angle ADP = 180° - (\angle DAP + \angle APD) = 180° + 100° = 80° = \angle APD$. Por lo que el triángulo ADP es isósceles con $AD = AP$. Además, como $AD = DB$, se sigue que $AD = AP = DB$. Sea Q el punto sobre el segmento AD tal que $\angle PQD = 30°$. Demostraremos que $AQ = DP$ y $PE = PQ$.



Sea E el punto tal que el triángulo ADE es equilátero. El segmento DE separa a los puntos A y P, de manera que el segmento AP intersecta al segmento DE como muestra la figura. Como ADE es equilátero, se tiene que $\angle ADE = 60°$ y como

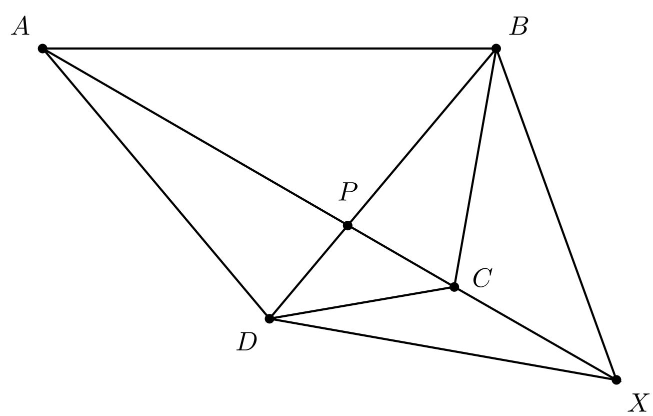
$\angle ADP = 80^\circ = \angle ADE + \angle EDP$, se sigue que $\angle EDP = 20^\circ$. Como $\angle DAE = 60^\circ = \angle DAP + \angle PAE = 20^\circ + \angle PAE$, tenemos que $\angle PAE = 40^\circ$.

Como $AD = AP$ y $AD = DE = EA$ tenemos que $AD = AP = DE = EA$, de donde el triángulo APE es isósceles, con $\angle APE = \angle PEA$, y como $\angle PAE = 40^\circ$, se sigue que $\angle APE = \angle PEA = 70^\circ$. Además, como $\angle DEA = 60^\circ$, se sigue que $\angle DEP = 10^\circ$, de donde $\angle DPE = 150^\circ$.

Por otra parte, como $\angle DQP = 30^\circ$, se sigue que $\angle AQP = 150^\circ$ y que $\angle QPA = 10^\circ$. Con esto podemos concluir que los triángulos AQP y DPE son semejantes y como $DE = AP$, también son congruentes, de donde $PE = PQ$ y $DP = AQ$, como queríamos demostrar.

Como $AD = DB$, se sigue que $AD = AQ + QD = DP + PB = DB$ y como $AQ = DP$, concluimos que $QD = PB$. Por último, como $\angle APD = \angle BPC = 80^\circ$ y $\angle APD = \angle ADP$ entonces $\angle ADP = \angle QDP = \angle BPC$. Y $\angle DQP = \angle PBC = 30^\circ$, se tiene que los triángulos QPD y BPC son semejantes, pero como $QD = PB$, también son congruentes y concluimos que $PD = PC$, como queríamos.

Solución alternativa. Como $\angle DAB = 50^\circ = \angle DBA$ el triángulo BAD es isósceles con $DA = DB$ y $\angle ADB = 180^\circ - 2(50^\circ) = 80^\circ$. Consideramos el punto X tal que el triángulo BDX es un triángulo equilátero con X y A en diferentes lados de la recta BD. Como $DA = DB = DX$ el triángulo ADX es isósceles y como $\angle ADX = \angle ADB + \angle XDB = 80^\circ + 60^\circ = 140^\circ$ tenemos que $\angle AXD = \angle DAX = 20^\circ$. Como $\angle DAX = \angle DAC$, X está en la prolongación de la recta AC.



Como $\angle DBC = 30^\circ$, la recta BC es una mediana del triángulo equilátero BDX, de donde el triángulo CDX es isósceles con $CD = CX$ y $\angle XDC = \angle CXD = 20^\circ$ de donde $\angle PDC = \angle BDX - \angle CDX = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$ y $\angle DCP = \angle XDC + \angle CXD = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$. Luego, el triángulo DCP es isósceles con $PC = PD$.

Problema 4. Determina todos los enteros positivos n tales que $n+1$ se pueda expresar como la suma de tres divisores positivos de n distintos entre sí.

Solución de Arturo Juárez Vargas. Primero consideremos la siguiente ecuación

$$n+1=\frac{n}{a}+\frac{n}{b}+\frac{n}{c}$$

donde $\frac{n}{a}$, $\frac{n}{b}$ y $\frac{n}{c}$ son los tres divisores positivos de n. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a<b<c$. No se puede dar que $a=1$, pues esto implicaría que $1=\frac{n}{b}+\frac{n}{c}$, lo cual es imposible. Factorizando n obtenemos que

$$n+1=n\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Sabemos que $n<n+1$, por lo que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1$. Como $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, tenemos que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}.$$

Por otro lado, como todos los divisores son enteros distintos, tenemos que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}.$$

Veamos primero que $a=2$ y $b=3$.
Si $a\neq 2$, tenemos que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}<1,$$

lo cual es una contradicción y $a=2$. Si $b\neq 3$, tenemos que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}<1,$$

lo cual vuelve a ser una contradicción y $b=3$. Sustituyendo tenemos que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{c}>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

de donde llegamos a que $6>c$. Como $c>b=3$, tenemos que c sólo puede ser igual a 4 o 5. Veamos ambos casos.

- $c=4$. Tenemos que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{13}{12}$. De aquí tenemos que 12 divide a n. Notamos que $n=12$ cumple. Si n crece, como $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1$ tendremos que $n(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})>n+1$, por lo que no hay otra solución.

- $c=5$. Tenemos que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{31}{30}$. Por un razonamiento similar llegamos a que la única solución en este caso es $n=30$.

Concluimos pues, que los enteros que cumplen son el 12 y el 30.

Solución alternativa. Sean $\frac{n}{a}$, $\frac{n}{b}$ y $\frac{n}{c}$ los divisores de n, con $a < b < c$, tales que

$$n + 1 = \frac{n}{a} + \frac{n}{b} + \frac{n}{c}. \tag{5}$$

Demostraremos primero que $a < 3$. Para esto procederemos por contradicción. Supongamos que $a \geq 3$. Entonces $b \geq 4$ y $c \geq 5$. Luego,

$$n + 1 \leq \frac{n}{3} + \frac{n}{4} + \frac{n}{5} = \frac{47n}{60} < n$$

lo cual es un absurdo. Por lo tanto, $a < 3$.
Si $a = 1$, la ecuación (5) se reduce a $1 = \frac{n}{b} + \frac{n}{c}$ lo cual no puede ser ya que al menos uno de los números $\frac{n}{b}$ o $\frac{n}{c}$ debe ser mayor que 1. Concluimos que $a = 2$ y la ecuación (5) se reduce a la ecuación

$$\frac{n+2}{2} = \frac{n}{b} + \frac{n}{c}. \tag{6}$$

Demostraremos que $b < 4$. Supongamos que $b \geq 4$. Entonces $c \geq 5$. Luego,

$$\frac{n+2}{2} \leq \frac{n}{4} + \frac{n}{5} = \frac{9n}{20} < \frac{n}{2}$$

lo cual es un absurdo. Por lo tanto, $b < 4$ y como $2 = a < b$, concluimos que $b = 3$. Luego, de la ecuación (6) tenemos que,

$$\frac{n+6}{6} = \frac{n+2}{2} - \frac{n}{3} = \frac{n}{c}$$

de donde

$$c = \frac{6n}{n+6} = \frac{(6n+36) - 36}{n+6} = 6 - \frac{36}{n+6}.$$

Como $c > b = 3$, se sigue que $\frac{36}{n+6}$ puede ser 1 o 2, es decir, $n = 30$ o $n = 12$, y en ambos casos obtenemos solución al problema:

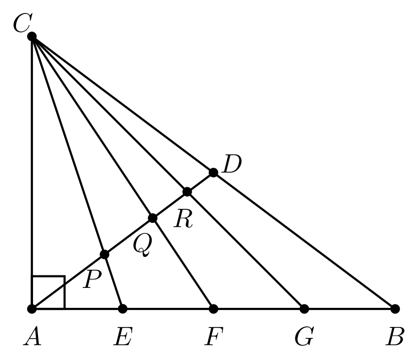
$$12 + 1 = \frac{12}{2} + \frac{12}{3} + \frac{12}{4}, \quad 30 + 1 = \frac{30}{2} + \frac{30}{3} + \frac{30}{5}.$$

Problema 5. ¿Existen 16 enteros positivos de tres dígitos que usen entre todos solamente tres dígitos distintos, tales que todos dejen un residuo diferente al ser divididos entre 16?

Solución. Veamos que esto no es posible. Si los tres dígitos son de la misma paridad, todos los residuos resultarían de la misma paridad y no podríamos tener todos. Luego, debe haber exactamente dos de una paridad y uno de la otra. Supongamos que un dígito es impar y dos pares (el otro caso se resuelve igual). Sea i el dígito impar.

De los 16 residuos, 8 son impares y deben obtenerse al dividir números impares. Para ello, estos números tienen que acabar en el único dígito impar que tenemos. Sea A el número formado por los dos primeros dígitos. Como hay tres opciones para cada dígito, tenemos 9 opciones para el número A. Como los números de la forma $10A + i$ (con A variando) deben de dejar todos los residuos pares al dividirse entre 16, los números $10A$ deben de dejar todos los resiudos pares al dividirse entre 16. Como algunos de estos residuos son 2, 6, 10 y 14, los números $5A$ deben de dejar los residuos 1, 3, 5 y 7 al dividirse entre 8. Esto ocurre solamente si los números A dejan todos los residuos 1, 3, 5 y 7 al dividirse entre 8 (pues $5A$ es congruente a 5, 7, 1 y 3 si A es congruente a 1, 3, 5 y 7, respectivamente).
Como debe haber cuatro números A que dejen residuos 1, 3, 5 y 7 al dividirse entre 8, tienen que ser impares. Como solo i es impar, solo podemos obtener 3 números A impares. Esto es una contradicción.

Problema 6. En el triángulo rectángulo ABC, sean D el punto medio de BC, F el punto medio de AB, E el punto medio de AF y G el punto medio de FB. Si AD intersecta a CE, CF y CG en P, Q y R, respectivamente, determina la razón $\frac{PQ}{QR}$.



Solución de Francisco Javier Navarro Nieblas. Por el teorema de Menelao aplicado en el triángulo ADB con las rectas CE, CF y CG, tenemos que

$$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{DC}{CB} \cdot \frac{BE}{EA} = -1, \quad \frac{AQ}{QD} \cdot \frac{DC}{CB} \cdot \frac{BF}{FA} = -1 \quad \text{y} \quad \frac{AR}{RD} \cdot \frac{DC}{CB} \cdot \frac{BG}{GA} = -1.$$

Como D es el punto medio de CB, se tiene que $\frac{DC}{BC} = \frac{1}{2}$, de donde $\frac{DC}{CB} = -\frac{1}{2}$. Sustituyendo este valor en las tres ecuaciones llegamos a que

$$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{BE}{EA} = 2, \quad \frac{AQ}{QD} \cdot \frac{BF}{FA} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{AR}{RD} \cdot \frac{BG}{GA} = 2.$$

Ahora, usando que F es punto medio de AB, E punto medio de AF y G punto medio de FB se tiene que $AE = EF = FG = GB$, lo que implica que $\frac{BE}{EA} = 3$, $\frac{BF}{FA} = 1$ y $\frac{BG}{GA} = \frac{1}{3}$. Sustituyendo estos tres valores obtenemos que

$$\frac{AP}{PD} = \frac{2}{3}, \quad \frac{AQ}{QD} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{AR}{RD} = 6.$$

Sumando 1 a cada una de estas igualdades obtenemos que

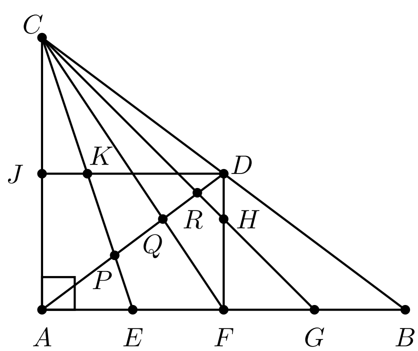
$$\frac{AD}{PD} = \frac{5}{3}, \quad \frac{AD}{QD} = 3 \quad \text{y} \quad \frac{AD}{RD} = 7,$$

de donde

$$\frac{PD}{AD} = \frac{3}{5}, \quad \frac{QD}{AD} = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \frac{RD}{AD} = \frac{1}{7}.$$

Restando la segunda igualdad de la primera llegamos a que $\frac{PQ}{AD} = \frac{4}{15}$ y restando la tercera de la segunda obtenemos que $\frac{QR}{AD} = \frac{4}{21}$. Finalmente, dividiendo estas dos últimas igualdades, concluimos que $\frac{PQ}{QR} = \frac{7}{5}$. (Observe que no se usó que el triángulo ABC fuera rectángulo.)

Solución alternativa. Como CF y AD son medianas del triángulo ABC que se intersectan en Q, entonces $\frac{AQ}{QD} = \frac{2}{1}$. Además, D es el punto medio de la hipotenusa del triángulo ABC, entonces es el centro del circuncírculo de radio $DA = DC = DB$. Tracemos desde D una perpendicular a AB y CA. Los pies de las perpendiculares son F y J, respectivamente, donde J es el punto medio de AC, pues DF y DJ son alturas de los triángulos isósceles ADB y ADC, respectivamente.



En el triángulo CFB, los segmentos CG y FD son medianas y se intersectan en H a razón $2:1$, luego $\frac{HD}{FD} = \frac{1}{3}$. De aquí podemos ver que los triángulos ARC y DRH son semejantes, ya que sus ángulos son iguales. Como $FD = JA$ y $2JA = AC$ entonces $HD = \frac{1}{6}CA$ y el triángulo ARC es 6 veces más grande que el triángulo DRH. Luego tenemos que $\frac{AR}{RD} = \frac{6}{1}$ y como $AR + RD = AD$, entonces $\frac{RD}{AD} = \frac{1}{7}$.
Análogamente, los triángulos APE y KPD son semejantes, donde las medianas DJ y CE se intersectan en K. Tenemos que $AE = \frac{1}{4}AB$, luego $JK = \frac{1}{4}JD$, ya que JD es papalela a AB. De aquí tenemos que $\frac{AE}{KD} = \frac{2}{3}$, y como los triángulos son semejantes, $\frac{AP}{PD} = \frac{2}{3}$. Además como $AP + PD = AD$, entonces $\frac{AP}{AD} = \frac{2}{5}$. Considerando lo anterior tenemos que, $AP = \frac{2}{5}AD$, $AQ = \frac{2}{3}AD$, $QD = \frac{1}{3}AD$ y $RD = \frac{1}{7}AD$.
Luego,

$$PQ = AQ - AP = \frac{2}{3}AD - \frac{2}{5}AD = \frac{4}{15}AD$$

y
$$QR = QD - RD = \frac{1}{3}AD - \frac{1}{7}AD = \frac{4}{21}AD.$$
Por lo tanto, $\frac{PQ}{QR} = \frac{7}{5}$.

Problema 7. Ana y Beto juegan el siguiente juego. En la mesa hay 2013 fichas y cada jugador en su turno debe tomar algunas fichas. Puede tomar al menos una ficha o a lo más la mitad de las fichas que quedaron en la mesa al momento de su turno. El jugador que deje en la mesa exactamente una ficha pierde el juego. Si Ana es la primera en tomar fichas, determina para cuál de los jugadores existe una estrategia ganadora y descríbela.

Solución de José Ramón Tuirán Rangel. Demostraremos por inducción que cuando hay $a_n = 2 + 3(2^{n-1} - 1)$ fichas, para un entero $n \geq 1$, el jugador en turno está en posición perdedora y éstas son las únicas posiciones perdedoras.
Si $n = 1$ el jugador en turno pierde, pues su único movimiento es reducir en 1.
Nuestra hipótesis de inducción es que para cierto entero n nuestra afirmación es cierta. De aquí hay que demostrar que para $n + 1$ también es cierta. Primero notamos que $a_{n+1} = 2a_n + 1$, pues
$$2a_n + 1 = 2(2 + 3(2^{n-1} - 1)) + 1 = 4 + 3(2^n) - 6 + 1 = 2 + 3(2^n - 1) = a_{n+1}.$$
Veamos que si hay entre $a_n + 1$ y $2a_n$ fichas, el jugador en turno está en una posición ganadora. En efecto, pues si hay un número de fichas perteneciente a este intervalo, podemos quitar las suficientes para que el otro jugador tenga exactamente a_n fichas y por la hipótesis inductiva quedaría en posición perdedora.
Ahora demostraremos que $a_{n+1} = 2a_n + 1$ es una posición perdedora. En efecto, pues el jugador con esas fichas en turno puede quitar entre una ficha (dejando $a_{n+1} - 1 = 2a_n$ fichas) y a_n fichas (dejando $a_{n+1} - a_n = a_n + 1$). Luego, dejará una cantidad de fichas en el intervalo $[a_n + 1, 2a_n]$ y ya demostramos que éstas son posiciones ganadoras.
Finalmente, observamos que 2013 es un número en posición ganadora, pues está entre $a_{10} + 1$ y $2a_{10}$, por lo que Ana gana el juego dejando a Beto con un número a_i para $1 \leq i \leq 10$ en cada turno.

Solución alternativa. Cuando queden en la mesa $k \geq 2$ fichas, diremos que k es una posición "perdedora"si en la que sin importar qué haga el jugador que le toca jugar, el otro jugador puede asegurar su victoria, y diremos que es una posición "ganadora "si al jugador que le toca jugar puede crear una posición "perdedora"para su adversario.
Supongamos que k es una posición perdedora. Entonces $k+1, k+2, \ldots, 2k$ son posiciones ganadoras ya que es posible dejar k fichas en la mesa para el adversario. Entonces $2k+1$ es una posición perdedora ya que, de acuerdo con las reglas del juego, el jugador puede dejar al menos $k+1$ y a lo más $2k$ fichas en la mesa, dando una posición ganadora al oponente.
Como $k = 2$ es una posición perdedora, deducimos que las posiciones perdedoras son los enteros U_n donde $U_0 = 2$ y $U_{n+1} = 2U_n + 1$. Por inducción podemos probar que

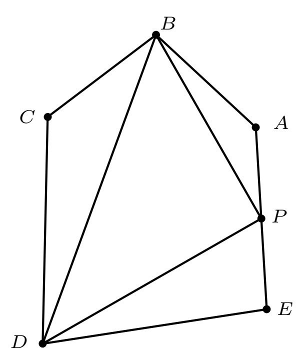
$U_n = 3 \times 2^n - 1$ para $n \geq 0$. Ahora bien, 2013 no es de la forma $3 \times 2^n - 1$ dado que 2014 no es múltiplo de 3. Por lo tanto, 2013 es una posición ganadora, y dado que Ana inicia el juego, ella tiene la estrategia ganadora.
Basta con que Ana deje sobre la mesa, en turnos consecutivos, las siguientes cantidades de fichas,

$$\begin{aligned}
U_9 &= 3 \times 2^9 - 1 = 1535,\\
U_8 &= 3 \times 2^8 - 1 = 767,\\
U_7 &= 3 \times 2^7 - 1 = 383,\\
U_6 &= 3 \times 2^6 - 1 = 191,\\
U_5 &= 3 \times 2^5 - 1 = 95,\\
U_4 &= 3 \times 2^4 - 1 = 47,\\
U_3 &= 3 \times 2^3 - 1 = 23,\\
U_2 &= 3 \times 2^2 - 1 = 11,\\
U_1 &= 3 \times 2^1 - 1 = 5,\\
U_0 &= 3 \times 2^0 - 1 = 2.
\end{aligned}$$

Problema 8. Se tiene un pentágono de papel, $ABCDE$, tal que $AB = BC = 3\,cm$, $CD = DE = 5\,cm$, $EA = 4\,cm$, $\angle ABC = 100°$ y $\angle CDE = 80°$.
Divide el pentágono en cuatro triángulos, mediante tres cortes rectos, de manera que con los cuatro triángulos se arme un rectángulo, sin superposiciones ni huecos. (Los triángulos se pueden girar y/o dar la vuelta.)

Solución. Sea P el punto medio del lado EA. Hacemos los cortes a lo largo de DP, BP y BD. Como la suma de los ángulos internos del pentágono es $540°$, tenemos que

$$\angle BCD + \angle DEA + \angle EAB = 540° - \angle ABC - \angle CDE = 540° - 100° - 80° = 360°.$$



Además, $AP = PE$, $AB = BC$ y $CD = DE$. En consecuencia, los triángulos BAP, DEP y BCD se pueden unir con un vértice común en A, E y C. Los lados del triángulo que resulta son BP, DP y BD, es decir, iguales a los lados del triángulo

BPD. Por lo tanto, el triángulo que se arma es igual al BPD. Entonces,

$$\angle BPD = \angle BPA + \angle DPE = \frac{1}{2}\angle APE = 90^\circ.$$

Como el triángulo BPD es rectángulo, con dos copias de BPD se arma un rectángulo.

Problema 9. Demuestra que los números enteros del 1 al 16 pueden ser distribuidos en un tablero de 4×4, uno en cada casilla, de tal manera que la suma de los números escritos en cualesquiera dos casillas vecinas sea un número primo. ¿Se cumpliría lo mismo si en lugar de los números del 1 al 16 se distribuyen los números del 2 al 17? (Nota: Dos casillas son vecinas si tienen un lado en común.)

Solución. Primera parte: Si dos números vecinos tienen la misma paridad, entonces su suma es un número compuesto, ya que es par mayor que 2. Luego, dos números vecinos deben tener distinta paridad. Esto significa que si el tablero es pintado como un tablero de ajedrez, los números pares van en las casillas negras y los impares en las blancas (o viceversa). Es posible demostrar que siempre existen dos números vecinos cuya suma es múltiplo de 3, por eso haremos que ese múltiplo de 3 venga de la suma $1 + 2$, que es primo. Siguiendo esto es fácil encontrar una de las maneras de completar el tablero, por ejemplo:

8	11	6	13
5	12	7	16
2	1	10	3
15	4	9	14

Segunda parte: Demostraremos que no es posible hacer la distribución. Para esto, demostraremos que cuando alternamos pares e impares, siempre hay dos números vecinos cuya suma es múltiplo de 3, y como la suma de dos números vecinos es por lo menos $2 + 3 = 5$, dicho múltiplo de 3 debe ser un número compuesto.

Módulo 3 los números pares dejan los siguientes residuos: $0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2$; y los impares dejan los residuos: $0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2$. Supongamos que hay una manera de colocar los números de tal manera que no haya dos casillas vecinas cuyos números sumen un múltiplo de 3, es decir, no existen dos números vecinos formando las parejas $(0, 0)$, $(1, 2)$ o $(2, 1)$, si son escritos los residuos módulo 3 en vez de los números. Entonces tenemos que *cada casilla no puede estar rodeada por los números* 0*,* 1 *y* 2 *al mismo tiempo, ya que el número escrito en ella con alguno de los números* 0*,* 1 *o* 2 *sumará múltiplo de* 3*.*

Coloquemos los números pares en las casillas "negras" como si fuera un tablero de ajedrez (empezando en la casilla superior izquierda). Si las dos casillas negras centrales tienen escrito el mismo número x, entonces sólo se presentan los siguientes casos (según x se repita 2 o 3 veces):

c		d	
	x		e
b		x	
	a		x

b		c	
	x		d
a		x	
	x		e

c		d	
	x		e
b		x	
	a		f

en donde cada número a, b, c, d y e es distinto de x módulo 3. Luego, según la observación anterior, a y b, b y c, c y d, d y e, deben ser iguales, lo que implica que a, b, c, d y e son iguales, lo cual es una contradicción, pues ningún residuo se repite 5 veces.

Entonces, las dos casillas negras centrales tienen distintos números, digamos que son x e y.

c		d	
	x		e
b		y	
	a		f

En este caso, por la observación inicial, los números a, b, d y e no pueden ser distintos de x e y. De aquí que c y f deben ser iguales al número restante z, que debe aparecer exactamente dos veces, es decir, $z = 0$. Además, $b = d = x$ y $a = e = y$. Con esto, la distribución es:

0		1	
	1		2
1		2	
	2		0

Ahora podemos hallar los números restantes: el número escrito en cada casilla blanca es, de acuerdo con la observación inicial: 0 si está rodeado por 1 y 2; 1 si está rodeado por 1 y 0; 2 si está rodeado por 0 y 2. Por lo tanto, la distribución final es:

0	1	1	0
1	1	0	2
1	0	2	2
0	2	2	0

la cual es imposible, ya que entre los impares hay tres residuos iguales a 0 y no cuatro.

Por lo tanto, la segunda distribución es imposible.

Problema 10. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo. Demuestra que

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\leq 3.$$

Solución. En primer lugar, observemos que por la desigualdad del triángulo, los denominadores en la desigualdad a demostrar son positivos. En efecto, $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$ si y sólo si $a+2\sqrt{ab}+b>c$, lo cual es cierto por la desigualdad del triángulo $a+b>c$. De manera análoga tenemos que $\sqrt{b}+\sqrt{c}>\sqrt{a}$ y $\sqrt{c}+\sqrt{a}>\sqrt{b}$.
Por la simetría de la desigualdad, podemos asumir que $a\geq b\geq c$. Bastará demostrar que

$$\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\leq 1 \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}\leq 2.$$

La primera desigualdad se obtiene de

$$\sqrt{a+b-c}-\sqrt{a}=\frac{(a+b-c)-a}{\sqrt{a+b-c}+\sqrt{a}}\leq\frac{b-c}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\sqrt{b}-\sqrt{c}.$$

Para demostrar la segunda desigualdad, sean $p=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ y $q=\sqrt{a}-\sqrt{b}$. Entonces, $a-b=pq$ y la desigualdad se convierte en

$$\frac{\sqrt{c-pq}}{\sqrt{c}-q}+\frac{\sqrt{c+pq}}{\sqrt{c}+q}\leq 2.$$

Para $a\geq b\geq c$ tenemos que $p\geq 2\sqrt{c}$. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt{c-pq}}{\sqrt{c}-q}+\frac{\sqrt{c+pq}}{\sqrt{c}+q}\right)^2 &\leq \left(\frac{c-pq}{\sqrt{c}-q}+\frac{c+pq}{\sqrt{c}+q}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{c}-q}+\frac{1}{\sqrt{c}+q}\right)\\
&= \frac{2(c\sqrt{c}-pq^2)}{c-q^2}\cdot\frac{2\sqrt{c}}{c-q^2}\\
&= 4\cdot\frac{c^2-\sqrt{c}pq^2}{(c-q^2)^2}\\
&\leq 4\cdot\frac{c^2-2cq^2}{(c-q^2)^2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, como $c^2-2cq^2\leq c^2-2cq^2+q^4=(c-q^2)^2$, se sigue que

$$\left(\frac{\sqrt{c-pq}}{\sqrt{c}-q}+\frac{\sqrt{c+pq}}{\sqrt{c}+q}\right)^2\leq 4\cdot\frac{c^2-2cq^2}{(c-q^2)^2}\leq 4$$

y por lo tanto,

$$\frac{\sqrt{c-pq}}{\sqrt{c}-q}+\frac{\sqrt{c+pq}}{\sqrt{c}+q}\leq 2,$$

como se quería.

Concursos Estatales

Olimpiada Potosina de Matemáticas

La Olimpiada Potosina de Matemáticas (OPM) consta de varias etapas. Las primeras etapas son: Escolar, Regional y Estatal. La etapa estatal consta de tres categorías:

- Koala, para alumnos de primaria.
- Wálabi, para alumnos de primero y segundo de secundaria.
- Canguro, para alumnos de tercero de secundaria y preparatoria.

En esta ocasión, en la etapa estatal participaron 50 alumnos en la categoría Koala, 120 alumnos en la categoría Wálabi y 220 alumnos en la categoría Canguro. En cada categoría, los alumnos resuelven en dos días consecutivos, dos exámenes de 5 problemas cada uno en un máximo de 4.5 horas. Además, los problemas tienen distinto puntaje.

A continuación presentamos los problemas del concurso estatal de la OPM en la categoría "Canguro".

Problema 1. Sabemos que el número 144^x divide a 2014!, donde

$$2014! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 2012 \times 2013 \times 2014.$$

¿Cuál es el valor de x más grande que cumple lo anterior? (2 puntos)

Problema 2. En un triángulo ABC se escogen puntos M, N, P sobre los lados AB, AC, BC, respectivamente. Encuentra el área del triángulo ABC si se sabe que $AM = MB = BP = 15$ y $AN = NC = CP = 25$. (3 puntos)

Problema 3. Un triángulo ABC está inscrito en un círculo con diámetro $AC = 10$. Calcula la altura desde B si se sabe que $\sqrt{AB \cdot BC}$ vale lo mismo que la mediana desde B. (4 puntos)

Problema 4. El lenguaje de Totorolandia tiene alfabeto A, B, D, E, F, G, I, J, L, M, N, O, P, R, S, T, U (5 vocales pero sólo 12 consonantes). Las palabras se forman por tres letras, sin que aparezcan dos vocales o dos consonantes consecutivas. Por ejemplo: PAS, INA, LUL y ONO son palabras, pero TRI, AAN, MIA y UGG no lo son.

(a) ¿Cuántas palabras hay en ese lenguaje?
(b) Si se escribe un diccionario de ese lenguaje en dos tomos, en orden alfabético y de manera que cada tomo contenga la misma cantidad de palabras, ¿cuál será la primera palabra del segundo tomo? (5 puntos)

Problema 5. Los números primos p, q, r satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$pq + pr = 80, \quad pq + qr = 425.$$

Encuentra el valor de $p + q + r$. (7 puntos)

Problema 6. Los enteros positivos a, b, c satisfacen el siguiente sistema:

$$c^2 - a^2 - b^2 = 101, \quad ab = 72.$$

Encuentra el valor de $a + b + c$. (2 puntos)

Problema 7. En un examen de Olimpiada, el promedio de la gente que pasó fue 14 puntos mientras que el promedio de la gente que no pasó fue de 6 puntos. Si el promedio general fue de 11 puntos, ¿qué fracción del total pasó el examen? (3 puntos)

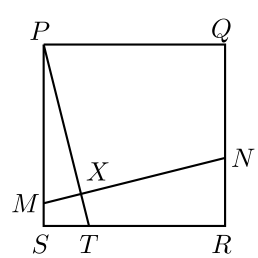
Problema 8. Raúl tiene que dar un banquete a 120 personas que pidieron pizza. Raúl hace un truco de magia el cual convierte comida como sigue:

$$1 \text{ pizza} \longrightarrow 1 \text{ sopa}, \quad 1 \text{ sopa} \longrightarrow 1 \text{ pan}, \quad 1 \text{ pan} \longrightarrow 1 \text{ pizza}.$$

El problema con el truco de magia, es que cada vez que hace el truco forzosamente lo tiene que hacer a 3 alimentos a la vez. Si actualmente tiene 119 sopas y 1 pan, ¿puede Raúl llegar a las 120 pizzas? (4 puntos)

Problema 9. Un número se dice *capicúa* si se lee igual al derecho y al revés. ¿Cuántas parejas de números capicúas de tres dígitos cumplen que su suma es un número capicúa de cuatro dígitos? (5 puntos)

Problema 10. En la figura, $PQRS$ es un cuadrado de lado 12. Sabemos que T es un punto sobre SR tal que $ST = 5$, y N es un punto sobre el lado QR. La recta MN es perpendicular a la recta PT en el punto X. Si sabemos que $MX = 4$, ¿cuánto vale XN? (7 puntos)



Problemas y Soluciones del Concurso Nacional 2013

Del 24 al 30 de noviembre de 2013 se llevó a cabo en Huasca de Ocampo, Hidalgo, el Concurso Nacional de la 27^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de todos los estados de la República.

Los 20 alumnos ganadores del primer lugar (ordenados por estados) fueron:

Arturo Arellano Árias (Campeche).
Luis Enrique Chachón Ochoa (Chihuahua).
José Nieves Flores Máynez (Chihuahua).
Luis Carlos García Ramos (Chihuahua).
Jorge Pat De la Torre Sánchez (Coahuila).
Zeus Caballero Pérez (Distrito Federal).
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco).
Juan Carlos Ortiz Rhoton (Jalisco).
Miguel Ángel Prado Godoy (Jalisco).
Oscar Samuel Henney Arthur (Michoacán).
Juan Carlos Castro Fernández (Morelos).
Joseandres Hinojoza Ortuño (Morelos).
Marlet Morales Franco (Nayarit).
Kevin William Beuchot Castellanos (Nuevo León).
Diego Alonso Roque Montoya (Nuevo León).
Diego Fajardo Rojas (Puebla).
Jorge Luis Marroquín López (Puebla).
Pablo Meré Hidalgo (Querétaro).
Sandra Berenice Mendoza Peñúñuri (Sonora).
Luis Xavier Ramos Tormo (Yucatán).

Los 7 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Arturo Arenas Esparza (Chihuahua).
José Nieves Flores Máynez (Chihuahua).
Antonio López Guzmán (Chihuahua).
Karol José Gutiérrez Suárez (Colima).
Saúl Adrián Álvarez Tapia (Distrito Federal).
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco).
Jesús Emilio Domínguez Rusell (Sinaloa).

Los 7 alumnos preseleccionados para la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) fueron:

Sergio Felipe López Robles (Colima).
Victor Hugo Almendra Hernández (Distrito Federal).
Leonardo Ariel García Morán (Jalisco).
Juan Carlos Castro Fernández (Morelos).
Rodolfo Flores Jiménez (Puebla).
Fernando Isaí Sáenz Meza (Tlaxcala).
Juan Eduardo Castañedo Hernández (Zacatecas).

Las 9 alumnas preseleccionadas para la Olimpiada Europea Femenil fueron:

Nayeli Reyes Moreno (Baja California).
Myriam Hernández Ketchul (Baja California Sur).
Naomi Mastache López (Guerrero).
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco).
Alka Xavier Earathu (Morelos).
Marlet Morales Franco (Nayarit).
María Cecilia Rojas Cuadra (Puebla).
Sandra Berenice Mendoza Peñúñuri (Sonora).
Katya Denisse Ortega Luna (Tlaxcala).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que obtuvieron los primeros 10 lugares en el Concurso Nacional de la 27^a OMM.

1. Chihuahua.
2. Nuevo León.
3. Jalisco.
4. Yucatán.
5. Morelos.
6. Puebla.
7. Distrito Federal.
8. Michoacán.
9. San Luis Potosí.
10. Sonora.

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó Copa "**Fray Diego Rodríguez**", y fue ganado por Chihuahua. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon Puebla y Michoacán, respectivamente.

A continuación presentamos los problemas y las soluciones del examen del Concurso Nacional 2013. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Se escriben los números primos en orden, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots$. Encuentra todas las parejas de números enteros positivos a y b con $a - b \geq 2$, tales que $p_a - p_b$ divide al número entero $2(a - b)$.

(Problema sugerido por Leonardo Ignacio Martínez Sandoval)

Solución de Olga Medrano Martín del Campo. Consideramos la sucesión de los números primos: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc. Para $i \geq 1$ definimos $d_i = p_{i+1} - p_i$, las diferencias entre primos consecutivos.
Vemos que $d_1 = 1$ y que para $k \geq 2$ se tiene que d_k va a ser la diferencia entre dos impares (pues solo $p_1 = 2$ es primo par), y por lo tanto es par y entero positivo. De aquí vemos que $d_k \geq 2$ para todo entero positivo $k \geq 2$.
Como $p_1 = 2$ y $a > b$ tenemos que $b = 1$ y $a > 1$. Entonces $p_a - 2$ divide a $2(a - 1)$ para que p_a, p_1 cumplan, pero como p_a es impar, $p_a - 2$ también es impar. Como no tiene factores 2 tenemos que $(p_a - 2, 2) = 1$, por lo que la divisibilidad se convierte en $p_a - 2$ divide a $a - 1$. Para que esto sea cierto, como $a - 1 > 0$, necesitamos que $p_a - 2 \leq a - 1$.
A $p_a - 2$ lo podemos reescribir como

$$p_a - 2 = (p_a - p_{a-1}) + (p_{a-1} - p_{a-2}) + \cdots + (p_2 - p_1) = d_{a-1} + d_{a-2} + \cdots + d_1,$$

por lo que $p_a - 2 = 1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_{a-1}$. Como cada d_k es mayor o igual a 2 (pues $k \geq 2$), se sigue que

$$p_a - 2 = 1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_{a-1} \geq 1 + 2(a - 2) = 2a - 3,$$

y al juntarlo con la otra desigualdad, concluimos que

$$a - 1 \geq p_a - 2 \geq 2a - 3,$$

lo cual implica que $a - 1 \geq 2a - 3$ lo que es equivalente a que $1 \geq a - 1$, lo cual es una contradicción, pues $a - 1$ tenía que ser mayor o igual que 2. Luego, 2 no puede ser uno de los primos.
Supongamos ahora que $b > 1$. Queremos que se cumplan las siguientes dos condiciones: $a - b \geq 2$ y $p_a - p_b \mid 2(a - b)$. Para la segunda condición, como $2(a - b) > 0$, necesitamos que $p_a - p_b \leq 2(a - b)$. Tenemos que

$$p_a - p_b = (p_a - p_{a-1}) + (p_{a-1} - p_{a-2}) + \cdots + (p_{b-1} - p_b) = d_{a-1} + d_{a-2} + \cdots + d_b.$$

Como $b \geq 2$, cada uno de los d_k en esa suma es mayor o igual a 2, luego tenemos la desigualdad

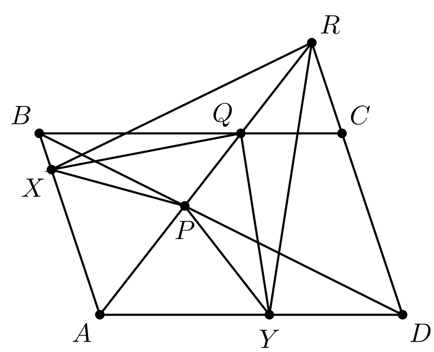
$$p_a - p_b = d_{a-1} + d_{a-2} + \cdots + d_b \geq 2(a - b),$$

pero también tiene que suceder que $p_a - p_b \leq 2(a-b)$, por lo que concluimos que $p_a - p_b = 2(a-b)$ y esto solo es posible cuando cada una de las diferencias d_b, d_{b+1},..., d_a es igual a 2. Como $a - b \geq 2$ entonces en $\{d_b, d_{b+1}, \ldots, d_a\}$ tendremos presentes a d_b y a d_{b+1}, que tienen que ser iguales a 2. Luego, los números p_b, $p_b + 2$ y $p_b + 4$ deben ser todos primos. Pero notamos que cada uno de estos tiene una congruencia diferente módulo 3, por lo que alguno de ellos tiene que ser divisible por 3 y al ser primo, tiene que ser igual a 3. Las únicas tres posibilidades son que $(p_b, p_b + 2, p_b + 4)$ sea igual a $(3, 5, 7)$, $(1, 3, 5)$ o $(-1, 1, 3)$. De estas, la única en la que se obtienen tres primos es $(3, 5, 7)$, por lo que $p_b = 3$. Como $d_4 = 11 - 7 = 4 > 2$, a no puede valer más que 4, pero para que $a - b \geq 2$, a tiene que valer 4.
Para finalizar, notamos que $a = 4$, $b = 2$ cumplen, pues $p_4 = 7$, $p_2 = 3$ y $p_4 - p_2 = 4$ que divide a $2(a - b) = 4$.

Problema 2. Sea $ABCD$ un paralelogramo con ángulo obtuso en A. Sea P un punto sobre el segmento BD de manera que la circunferencia con centro en P y que pasa por A, corte a la recta AD en A y Y, y corte a la recta AB en A y X. La recta AP intersecta a BC en Q y a CD en R, respectivamente. Muestra que $\angle XPY = \angle XQY + \angle XRY$.

(Problema sugerido por Daniel Perales Anaya)

Solución de Arturo Arellano Arias. Primero veamos que los triángulos BQP y DAP son semejantes, ya que las rectas BC y AD son paralelas. Luego, $\frac{BP}{DP} = \frac{QP}{AP}$.



Luego veamos que los triángulos BPA y DPR son semejantes, pues las rectas BA y RD son paralelas, por lo que $\frac{BP}{DP} = \frac{AP}{RP}$. Por las dos igualdades, podemos concluir que $\frac{QP}{AP} = \frac{AP}{RP}$ o $AP^2 = QP \cdot RP$.
Aplicaremos la inversión con centro en P y radio PA. Como $PA^2 = PQ \cdot PR$, Q resulta la imagen de R. Como X e Y están sobre el círculo de inversión, sus imágenes son ellos mismos.
Como la inversión preserva ángulos, tenemos que $\angle PXQ = \angle PRX$ y que $\angle PYQ = \angle PRY$. Ahora veamos que $\angle XPA = \angle PXQ + \angle XQP$ pues $\angle XPA$ es un ángulo externo del triángulo XPQ. Análogamente tenemos que $\angle APY = \angle QYP + \angle PQY$. Como $\angle XPY = \angle XPA + \angle APY$,

$$\angle XPY = \angle PXQ + \angle XQP + \angle QYP + \angle PQY,$$

pero como $\angle PXQ = \angle PRX$ y $\angle PYQ = \angle PRY$ tenemos que

$$\angle XPY = \angle PRX + \angle XQP + \angle PRY + \angle PQY,$$

lo que es equivalente a $\angle XPY = \angle XQY + \angle XRY$, como se quería demostrar.

Problema 3. ¿Cuál es la mayor cantidad de elementos que puedes tomar del conjunto de números enteros $\{1, 2, \ldots, 2012, 2013\}$, de tal manera que entre ellos no haya tres distintos, digamos a, b, c, tales que a sea divisor o múltiplo de $b - c$?

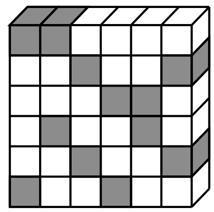
(Problema sugerido por Marco Antonio Figueroa Ibarra)

Solución de Pablo Meré Hidalgo. Consideramos un conjunto $A \subset \{1, 2, 3 \ldots, 2013\}$ que cumple las condiciones del problema con tres o más elementos. Digamos que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ con $a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq 2013$.
Veamos que no puede haber dos números consecutivos en A. Supongamos que x y $x+1$ son elementos de A y consideramos otro elemento y de A. Como y es múltiplo de $1 = (x+1) - x$, lo cual no es posible. Luego

$$a_1 < a_1 + 1 < a_2 < a_2 + 1 < a_3 < \cdots < a_{k-1} + 1 < a_k \leq 2013,$$

como estos son $2k+1$ números, tenemos que $2k + 1 \leq 2013 - a_1 + 1$.
Primero veamos que $k - 1 \leq a_1$. Si $k - 1 > a_1$, como hay a_1 residuos diferentes módulo a_1, necesariamente habrá dos elementos en $A \backslash \{a_1\}$ congruentes módulo a_1, lo que equivale a que a_1 divida a $a_i - a_j$ para ciertos i, j diferentes a 1, lo cual es una contradicción y concluimos que $k - 1 \leq a_1$.
Sumando esta desigualdad con $2k + 1 \leq 2013 - a_1 + 1$ obtenemos que $3k \leq 2016$ o $k \leq 672$.
Veamos que hay un conjunto $A \subset \{1, 2, 3, \ldots, 2013\}$ con 672 elementos que cumple el problema. Para ello se tendrían que darse simultáneamente las igualdades en $2k + 1 \leq 2013 - a_1 + 1$ y $k - 1 \leq a_1$, luego, $a_1 = 672 - 1 = 671$, por lo que $A = \{671, 673, 675, \ldots, 2011, 2013\}$. Sean x, y y z elementos diferentes de A (sin pérdida de generalidad $x > y$). Como son impares, $x - y$ será par y no podrá dividir a z que es impar. Ahora, si z divide a $x - y$. Como $x - y$ es par y z impar, z tiene que dividir a $\frac{x-y}{2}$, por lo que $z \leq \frac{x-y}{2} \leq \frac{2013-671}{2} = 671$, por lo que $z = 671$ y se tienen que dar todas las igualdades y se tiene que $x = 2013$ y $y = 671$, lo cual es una contradicción pues eran diferentes entre sí. Luego, $A = \{671, 673, 675, \ldots, 2011, 2013\}$ cumple las condiciones y acabamos.

Problema 4. Un cubo de $n \times n \times n$ está construido con cubitos de $1 \times 1 \times 1$, algunos negros y otros blancos, de manera que en cada uno de los subprismas de $n \times 1 \times 1$, de $1 \times n \times 1$ y de $1 \times 1 \times n$ hay exactamente dos cubitos negros y entre ellos hay un número par (posiblemente 0) de cubitos blancos intermedios. Por ejemplo, en la siguiente ilustración, se muestra una posible rebanada del cubo de $6 \times 6 \times 6$ (formada por 6 subprismas de $1 \times 6 \times 1$).



Muestra que es posible sustituir la mitad de los cubitos negros por cubitos blancos para que en cada subprisma de $n \times 1 \times 1$, de $1 \times n \times 1$ y de $1 \times 1 \times n$ haya exactamente un cubito negro. (Problema sugerido por María Luisa Pérez Seguí)

Solución de Luis Xavier Ramos Tormo. Coloreamos al cubo usando la coloración de ajedrez para 3 dimensiones (se pinta cada celda de rojo o azul de tal forma que no hayan 2 rojas o 2 azules juntas).
Ahora, cada fila de $1 \times 1 \times n$ (y los otros dos tipos) tienen sus cuadrados coloreados de forma alternada de rojo y azul. Además, sabemos que exactamente 2 cubitos de esos n son negros y están a distancia par. Luego, es claro que uno de ellos es ahora rojo y el otro azul. Ahora, cambiamos todos los negros que sean rojos por blancos. Así, sabemos que de cada columna de $1 \times 1 \times n$, $1 \times n \times 1$ y $n \times 1 \times 1$ queda exatamente uno negro (había un negro-rojo y un negro-azul, pero quitamos el rojo), por lo que conseguimos lo que queríamos.

Problema 5. Una pareja de enteros es *especial* si es de la forma $(n, n-1)$ o de la forma $(n-1, n)$ con n un entero positivo. Muestra que una pareja (n, m) de enteros positivos que no es especial, se puede representar como suma de dos o más parejas especiales diferentes si y sólo si los enteros n y m satisfacen la desigualdad $n + m \geq (n - m)^2$.
Nota: la suma de dos parejas se define como $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
(Problema sugerido por Rogelio Valdez Delgado)

Solución de Sandra Berenice Mendoza Peñúñuri. Vamos a demostrar que si $n + m \geq (n - m)^2$, entonces (n, m) se puede representar como suma de 2 o más parejas especiales diferentes.
Primero, si $(n, m) = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) + \cdots + (a_k, b_k)$ con cada (a_i, b_i) especial para $1 \leq i \leq k$, se tiene que $(m, n) = (b_1, a_1) + (b_2, a_2) + \cdots + (b_k, a_k)$ y cada(b_i, a_i) sigue siendo especial. Luego, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $n \geq m$ y escribimos $n = m + k$ para cierto entero $k \geq 1$. Sustituyendo obtenemos que $n + m \geq (n - m)^2$ es equivalente a $2m + k \geq k^2$ y este a su vez es equivalente a $2m \geq k^2 - k$ y a $m \geq \frac{k(k-1)}{2}$.
Ahora, si $m \geq \frac{k(k-1)}{2}$ escribimos $m = \frac{k(k-1)}{2} + a$, $n = k + \frac{k(k-1)}{2} + a$ y se tiene que $a \geq 0$.
Recordamos que $\frac{k(k-1)}{2} = 1 + 2 + \cdots + (k - 1)$. Tenemos que

$$\left(k + \frac{k(k-1)}{2}, \frac{k(k-1)}{2}\right) = (1, 0) + (2, 1) + (3, 2) + \cdots + (k, k - 1)$$

y

$$\left(k+\frac{k(k-1)}{2}+a, \frac{k(k-1)}{2}+a\right) = (1,0)+(2,1)+(3,2)+\cdots+(k-1,k-2)$$
$$+\ (k+a, k-1+a).$$

Claramente todas estas son parejas especiales y son distintas, pues todas son de la forma (a_i, a_i-1) y cada a_i es mayor al anterior. Si $k=0$ (es decir, $m=n$), podemos poner

$$(m,m) = (m-1,m)+(1,0),$$

las cuales son parejas especiales diferentes, por lo que terminamos. Ahora demostraremos que para (n,m) se puede representar como suma de dos o más parejas especiales, se tiene que dar que $n+m \geq (n-m)^2$.

Tomamos una pareja (n,m) que se puede escribir como suma de parejas especiales distintas. Sea $(n,m) = \sum_{i=1}^{A}(a_i, a_i-1)+\sum_{i=1}^{B}(b_i-1, b_i)$. Como (a_i, a_i-1) y (b_i-1, b_i) son especiales, se tiene que a_i, $b_i \geq 1$. Además, las parejas (a_i, a_i-1) para $1 \leq i \leq A$ son distintas si y solo si $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$. Lo mismo pasa para las parejas (b_i-1, b_i), y se tiene que $b_i \neq b_j$ para $i \neq j$. Luego, podemos ordenarlos: $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_A$ y $1 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_B$. Además, como son diferentes, tenemos que $a_{j+1} \geq a_j+1$ y $bj+1 \geq b_j+1$. Haciendo esto varias veces llegamos a que $a_{j+1} \geq j+1$ y $b_{j+1} \geq j+1$. Luego,

$$a_1+a_2+\cdots+a_A \geq 1+2+\cdots+A = \frac{A(A+1)}{2},$$

y de la misma manera $b_1+b_2+\cdots+b_B \geq \frac{B(B+1)}{2}$. Como

$$(n,m) = \sum_{i=1}^{A}(a_i, a_i-1)+\sum_{i=1}^{B}(b_i-1, b_i),$$

tenemos que

$$n = \sum_{i=1}^{A} a_i + \sum_{i=1}^{B}(b_i-1) = \sum_{i=1}^{A} a_i + \sum_{i=1}^{B} b_i - B$$
$$\geq \frac{A(A+1)}{2}+\frac{B(B+1)}{2}-B = \frac{A(A+1)}{2}+\frac{B(B-1)}{2}.$$

De manera similar, $m \geq \frac{A(A-1)}{2}+\frac{B(B-1)}{2}$. Al sumar estas dos desigualdades se tiene que

$$n+m \geq \frac{A(A+1)}{2}+\frac{B(B-1)}{2}+\frac{A(A-1)}{2}+\frac{B(B-1)}{2} = A^2+B^2$$

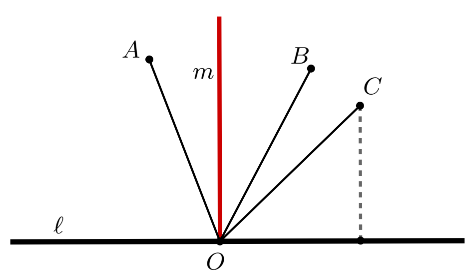
y de $n = \sum_{i=1}^{A} a_i + \sum_{i=1}^{B} b_i - B$ y $m = \sum_{i=1}^{A} a_i + \sum_{i=1}^{B} b_i - A$, obtenemos que $(n-m)^2 = (A-B)^2$. Como $n+m \geq A^2+B^2$ y $(n-m)^2 = (A-B)^2$, si demostramos que $A^2+B^2 \geq (A-B)^2$, terminamos. Desarrollando obtenemos que esta desigualdad es equivalente a $2AB \geq 0$. Como A y B son enteros no negativos, esta última es cierta y acabamos.

Problema 6. Sea $A_1A_2 \ldots A_8$ un octágono convexo, es decir, un octágono donde todos sus ángulos internos son menores que $180°$. Además los lados del octágono tienen la misma longitud y cada par de lados opuestos son paralelos. Para cada $i = 1, \ldots, 8$, definamos el punto B_i como la intersección del segmento A_iA_{i+4} con el segmento $A_{i-1}A_{i+1}$, donde $A_{j+8} = A_j$ y $B_{j+8} = B_j$, para todo número entero j.
Muestra que para algún número i, de entre los números 1, 2, 3 y 4, se cumple que

$$\frac{|A_iA_{i+4}|}{|B_iB_{i+4}|} \leq \frac{3}{2}.$$

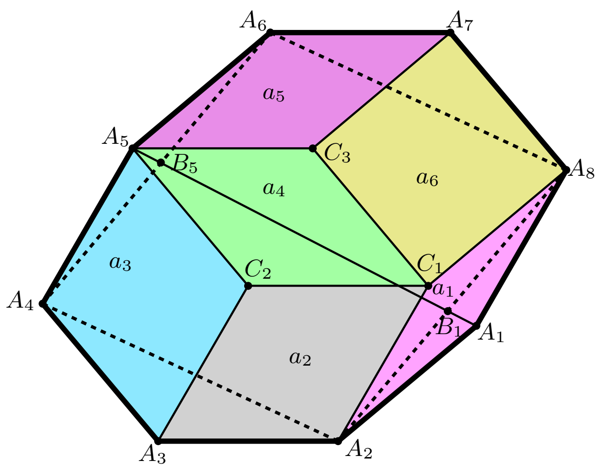
(Problema sugerido por Jesús Jerónimo Castro)

Solución oficial. Para cada lado del octágono vamos a considerar los tres paralelogramos que se pueden formar con dos de sus lados paralelos a dicho lado y sus otros dos lados paralelos a algún otro lado del octágono. Después, de entre todos esos paralelogramos, vamos a considerar uno de los que tenga menor área (podría haber más de uno con área mínima). Sin pérdida de generalidad, supongamos que el paralelogramo con área mínima tiene base en el lado A_1A_2. Entonces los otros dos lados del paralelogramo, no paralelos a A_1A_2, deben ser paralelos a A_3A_2 o a A_1A_8. Para ver que esto debe ser así, sean A, B y C, tres puntos de un mismo lado de una línea ℓ y todos ellos a la misma distancia de un punto O en ℓ, como se muestra en la figura.



Por O trazamos la línea m perpendicular a ℓ. Tenemos que dos de los puntos deben quedar del mismo lado de m (o alguno de ellos sobre m), supongamos B y C. Entonces, de los tres puntos, el que está a menor distancia de ℓ debe ser A ó C. Es decir, no puede ser B.

Supongamos que $A_2C_1A_8A_1$ es el paralelogramo de área mínima a_1 y consideremos los paralelogramos $A_2A_3C_2C_1$, $A_3A_4A_5C_2$, $C_1C_2A_5C_3$, $C_3A_5A_6A_7$ y $C_1C_3A_7A_8$, cada uno de ellos con área a_2, a_3, a_4, a_5 y a_6, respectivamente.



Notemos que $|A_6A_7A_8| + |A_2A_3A_4| = |C_1C_2A_5C_3|$ y $|A_4A_5A_6| = |A_2C_1A_8| = \frac{1}{2}|A_2C_1A_8A_1|$. Entonces, no es difícil ver que

$$\frac{A_1A_5}{B_1B_5} = \frac{2a_1 + a_2 + a_3 + a_5 + a_6}{a_2 + a_3 + a_5 + a_6} = 1 + \frac{2a_1}{a_2 + a_3 + a_5 + a_6}.$$

De aquí se obtiene que

$$\frac{A_1A_5}{B_1B_5} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Olimpiadas Internacionales

XXVI Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Desde 1991, los ganadores del Concurso Nacional de la OMM participan anualmente en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, APMO, por sus siglas en inglés. A diferencia de otros exámenes de olimpiada, éste consiste en un único examen con 5 problemas para resolver en un máximo de 4 horas.
En el mes de marzo, se aplicó el examen de la XXVI Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico a los alumnos que en ese momento formaban parte de la preselección nacional. Dicho examen se aplicó y calificó en México y los 10 mejores exámenes se enviaron a Kazajistán para ser evaluados por el comité organizador. Los resultados de dicho concurso se publicarán en el próximo número de Tzaloa, junto con las mejores soluciones de los participantes.

A continuación presentamos los problemas de la XXVI Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico. Los alumnos tuvieron una sesión de 4 horas para resolverlos.

Problema 1. Para un entero positivo m, denote por $S(m)$ y $P(m)$ a la suma y al producto, respectivamente, de los dígitos de m. Muestre que para cada entero positivo n, existen enteros positivos a_1, a_2, $\ldots$, a_n que satisfacen las siguientes condiciones:

$S(a_1) < S(a_2) < \cdots < S(a_n)$ y $S(a_i) = P(a_{i+1})$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, con $a_{n+1} = a_1$.

Problema 2. Sea $S = \{1, 2, \ldots, 2014\}$. Para cada subconjunto no vacío $T \subseteq S$, uno de sus elementos se elige como su *representante*. Encuentre el número de maneras de asignar representantes a todos los subconjuntos no vacíos de S, de manera que si $D \subseteq S$ es la unión ajena de tres subconjuntos no vacíos A, B, $C \subseteq S$, entonces el representante de D es también representante de alguno de A, B, C.

Problema 3. Encuente todos los enteros positivos n tales que para cualquier entero k, existe un entero a tal que, $a^3 + a - k$ es divisible entre n.

Problema 4. Sean n y b enteros positivos. Diremos que n es b-*perspicaz* si existe un conjunto de n enteros positivos diferentes, menores que b, de manera que no tenga dos subconjuntos diferentes U y V tales que la suma de todos los elementos de U sea igual a la suma de todos los elementos de V.
(a) Muestre que 8 es un entero $100-$ *perspicaz*.
(b) Muestre que 9 no es un entero $100-$ *perspicaz*.

Problema 5. Las circunferencias ω y Ω se cortan en los puntos A y B. Sea M el punto medio del arco AB de la circunferencia ω (con M dentro de Ω). Una cuerda MP de la circunferencia ω corta a Ω en Q (con Q dentro de ω). Sea l_P la recta tangente a ω en P, y sea l_Q la recta tangente a Ω en Q. Muestre que el circuncírculo del triángulo formado por las rectas l_P, l_Q y AB, es tangente a Ω.

III Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas

En el otoño de 2009 la Sociedad Matemática Inglesa estaba planeando mandar un equipo de alumnas a competir en la Olimpiada Matemática China del siguiente año. Fue en diciembre de ese mismo año que Geoff Smith, el líder del equipo británico en la Olimpiada Internacional de Matemáticas, quien tuvo la idea de crear una Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas. Uno de los propósitos de esta olimpiada es estimular y aumentar la participación de alumnas en las olimpiadas de matemáticas, para que, en un futuro, haya un mayor ingreso de mujeres en las carreras científicas en las universidades europeas.

La iniciativa fue aceptada, no solamente por el comité de la Olimpiada Inglesa de Matemáticas, sino por varios comités de los países de la comunidad europea. Es así como se inicia este evento y el primer anuncio oficial de la Olimpiada para las alumnas se hizo público el 8 de marzo de 2011, en el aniversario del día Internacional de la Mujer y la 1^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO, por sus siglas en inglés) se llevó a cabo en Reino Unido.

La Olimpiada Mexicana de Matemáticas desde la creación de la EGMO, buscó que México participara en esta como un país invitado. Esto se logró al fin este año.
Del 9 al 16 de abril pasado se celebró en Antalya, Turquía, la 3^a EGMO con la participación de 110 alumnas provenientes de 28 países: 22 países europeos y 6 países invitados. Hubo dos equipos de Turquía. Los países invitados fueron: Indonesia, República Islámica de Irán, Japón, Arabia Saudita, Estados Unidos y México.
La delegación que presentó a México estuvo integrada por las alumnas: Nayeli Reyes Moreno (Baja California), María Cecilia Rojas Cuadra (Puebla), Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco) y Sandra Berenice Mendoza Peñuñuri (Sonora). Las profesoras que acompañaron a la delegación fueron Ana Rechtman (líder) y Radmila Bulajich (colíder). Nayeli, Cecilia y Olga obtuvieron medalla de bronce y México ocupó el lugar número 17.

A continuación presentamos los problemas de la 3^a EGMO. Las alumnas tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Determina todos los números reales t tales que si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo no degenerado, entonces $a^2 + bct$, $b^2 + cat$, $c^2 + abt$ son también las longitudes de los lados de un triángulo no degenerado.

Problema 2. Sean D y E puntos en los lados AB y AC de un triángulo ABC, respectivamente, y tales que $DB = BC = CE$. Sean F el punto de intersección de las rectas CD y BE, I el incentro del triángulo ABC, H el ortocentro del triángulo DEF y M el punto medio del arco BAC del circuncírculo del triángulo ABC. Demuestra que I, H y M son colineales.

Problema 3. Denotamos por $d(m)$ el número de divisores positivos de un entero positivo m, y por $\omega(m)$ el número de primos distintos que dividen a m. Sea k un entero positivo. Demuestra que hay una infinidad de enteros positivos n tales que $\omega(n) = k$ y $d(n)$ no divide a $d(a^2 + b^2)$ para todos a y b enteros positivos tales que $a + b = n$.

Problema 4. Encuentra todos los enteros $n \geq 2$ para los cuales existen enteros x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}$ que satisfacen la siguiente condición: si $0 < i < n$, $0 < j < n$ con $i \neq j$ y $2i + j$ es divisible entre n, entonces $x_i < x_j$.

Problema 5. Sea n un entero positivo. Se tienen n cajas y cada caja contiene un número no negativo de fichas. Un movimiento consiste en tomar dos fichas de una de las cajas, dejar una fuera de las cajas y poner la otra en otra caja. Decimos que una configuración de las fichas es *resoluble* si es posible aplicar un número finito de movimientos (que puede ser igual a cero) para obtener una configuración en la que no haya cajas vacías. Determinar todas las configuraciones iniciales de fichas que no son resolubles y se vuelven resolubles al agregar una ficha en cualquiera de las cajas (sin importar en cual caja se pone la ficha).

Problema 6. Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la siguiente condición

$$f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = (y + f(x))(x + f(y))$$

para todos x, y números reales.

Problemas y Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XXVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Del 20 al 28 de septiembre de 2013 se llevó a cabo la XXVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas en la ciudad de Panamá, Panamá. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Diego Alonso Roque Montoya y Kevin William Beuchot Castellanos, ambos de Nuevo León, Juan Carlos Ortiz Rhoton de Jalisco y Luis Xavier Ramos Tormo de Yucatán. Juan Carlos y Luis Xavier obtuvieron medalla de oro con examen perfecto, mientras que Diego Alonso y Kevin William obtuvieron medalla de plata. México ocupó el tercer lugar de entre los 20 países participantes. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Marco Antonio Figueroa Ibarra (líder) y Luis Eduardo García Hernández (colíder). Los profesores José Antonio Gómez Ortega y María Luisa Pérez Seguí participaron como coordinadores en esta olimpiada.

A continuación presentamos los problemas con soluciones, de la XXVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Un conjunto S de enteros positivos distintos se llama *canalero* si para cualesquiera tres números a, b, $c \in S$, todos diferentes, se cumple que a divide a bc, b divide a ca y c divide a ab.

1. Demostrar que para cualquier conjunto finito de enteros positivos $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ existen infinitos enteros positivos k, tales que el conjunto $\{kc_1, kc_2, \ldots, kc_n\}$ es canalero.

2. Demostrar que para cualquier entero $n \geq 3$ existe un conjunto canalero que tiene exactamente n elementos y ningún entero mayor que 1 divide a todos sus elementos.

Solución de Luis Xavier Ramos Tormo.

1. Elegimos elentero $k = [c_1, c_2, \ldots, c_n] \cdot t$ donde $[c_1, c_2, \ldots, c_n]$ es el mínimo común múltiplo de c_1, $c_2, \ldots, c_n$ y t es un entero positivo. Veamos que el conjunto $\{kc_1, kc_2, \ldots, kc_n\}$ cumple las condiciones. Sean ka, kb y kc tres elementos arbitrarios del conjunto, queremos ver que ka divide a $(kb)(kc)$, lo cual se da si y solo si a divide a kbc y esto es cierto, pues por construcción, k es múltiplo de a. Análogamente demuestro que kb divide a $(ka)(kc)$ y que kc divide a $(ka)(kb)$.

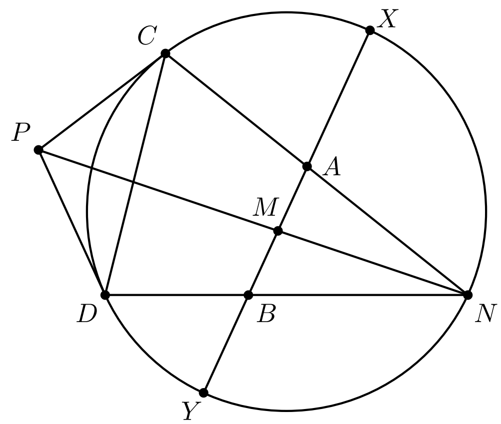
   Como esto es válido para cualquier valor entero positivo de t, obtenemos una infinidad de enteros k con la propiedad requerida.

2. Sean $q_1, q_2, \ldots, q_n$ los primeros n primos y sea Q su producto. Demostraremos que el conjunto
$$\left\{\frac{Q}{q_1}, \frac{Q}{q_2}, \ldots, \frac{Q}{q_n}\right\}$$
   cumple con las condiciones requeridas. Para ello tenemos que ver que $\frac{Q}{q_i}$ divide a $\frac{Q}{q_j} \cdot \frac{Q}{q_k}$ para cada $1 \leq i, j, k \leq n$. Pero $\frac{Q}{q_i}$ divide a Q y $\frac{Q}{q_j q_k}$ es entero (por definición de Q), luego, $\frac{Q}{q_i}$ divide a $Q \cdot \frac{Q}{q_j q_k} = \frac{Q}{q_j} \cdot \frac{Q}{q_k}$. Análogamente se verifican las otras dos divisibilidades y tenemos que el conjunto es canalero.

   Además, si cierto entero positivo r divide a todos los elementos de este conjunto, como r dividiría a Q (pues Q es múltiplo de todos los del conjunto), r sería de la forma $q_1^{a_1} q_2^{a_2} \cdots q_n^{a_n}$ donde cada a_i es 0 o 1. Si $a_m = 1$ para cierto $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tendríamos que q_m tendría que dividir a $\frac{Q}{q_m}$, lo cual es falso. Luego, $a_m = 0$ para todo $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $r = 1$.

Problema 2. Sean X, Y los extremos de un diámetro de una circunferencia Γ y N el punto medio de uno de los arcos XY de Γ. Sean A y B dos puntos en el segmento XY. Las rectas NA y NB cortan nuevamente a Γ en los puntos C y D, respectivamente. Las tangentes a Γ en C y D se cortan en P. Sea M el punto de intersección del segmento XY con el segmento NP. Demostrar que M es el punto medio del segmento AB.

Solución de Diego Alonso Roque Montoya. Como N es el punto medio del arco $\widehat{XY}$ tenemos que $\widehat{XN} = \widehat{NY}$, luego
$$\angle NCD = \frac{\widehat{ND}}{2} = \frac{\widehat{NY} + \widehat{YD}}{2} = \frac{\widehat{XN} + \widehat{YD}}{2} = \angle NBA.$$
Análogamente $\angle NAB = \angle NDC$ y tenemos que los triángulos NAB y NDC son semejantes.



Por construcción NP es simediana del triángulo NCD, entonces

$$\frac{\text{sen}(\angle CNP)}{\text{sen}(\angle PND)} = \frac{NC}{ND}$$

y $\frac{NC}{ND} = \frac{NB}{NA}$, de donde

$$\frac{AM}{MB} = \frac{NA}{NB} \cdot \frac{\text{sen}(\angle CNP)}{\text{sen}(\angle PND)} = \frac{NA}{NB} \cdot \frac{NC}{ND} = 1,$$

por lo que M es el punto medio de AB.

Problema 3. Sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ con $n > 5$. Demostrar que existe un conjunto finito B de enteros positivos distintos tal que $A \subseteq B$ y tiene la propiedad:

$$\prod_{x \in B} x = \sum_{x \in B} x^2,$$

es decir, el producto de los elementos de B es igual a la suma de los cuadrados de los elementos de B.

Solución de Juan Carlos Ortiz Rhoton. Digamos que un conjunto finito es *bueno* si tiene al menos 5 elementos, *extravagante* si es bueno y además el producto de sus elementos es igual a la suma de sus cuadrados, *pegadito* si es bueno y el producto de sus elementos es mayor o igual que la suma de sus cuadrados y *distanciado* si es extravagante o si no es pegadito.

Para cualquier conjunto bueno C definimos $p(C)$ como el producto de sus elementos, $s(C)$ la suma de los cuadrados de sus elementos y $f(C) = p(C) - s(C)$ y para C pegadito definimos $\Omega(C) = C \cup \{p(C) - 1\}$.

$|\Omega(C)| - 1$ es un entero positivo pues C tiene más de un elemento, por lo que si D es bueno, $\Omega(D)$ también lo es. Si d es un elemento de D se tiene que

$$p(D) - 1 \geq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot d - 1 = 24d - 1 \geq 23d > d,$$

por lo que $p(D)-1$ no está en D y $\Omega(D)$ tiene un elemento más que D.
Para D se tiene que

$$\begin{aligned} f(\Omega(D)) &= p(\Omega(D)) - s(\Omega(D)) = p(D)(p(D)-1) - (s(D) + (p(D)-1)^2) \\ &= p(D)^2 - p(D) - s(D) - p(D)^2 + 2p(D) - 1 \\ &= p(D) - s(D) - 1 = f(D) - 1 \end{aligned}$$

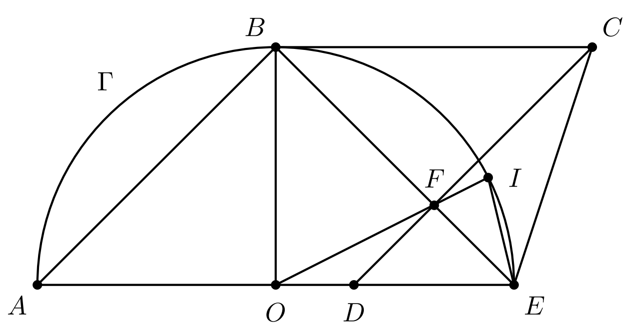
Mostraré que existe E bueno con $D \subseteq E$ y tal que E sea extravagante. Si $f(D) = 0$, $E = D$ y acabamos. Si $f(D) = k > 0$, $f(\Omega(D)) = k-1 \geq 0$ por lo que D es pegadito. Luego, $f(\Omega(\Omega(D))) = k - 2$. Continúo esto hasta que $f(\Omega(\Omega(\ldots\Omega(D)\ldots))) = 0$ y $\Omega(\Omega(\ldots\Omega(D)\ldots))$ es extravagante, de donde $E = \Omega^k(D)$, $D \subseteq E$ y E es extravagante.
Resta ver que A es pegadito, o $n! - (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) > 0$ para $n \geq 5$. Probémoslo por inducción. Si $n = 5$ se tiene que $5! - (1^2 - 2^2 - 3^2 - 4^2 - 5^2) = 65 > 0$. Suponemos que la desigualdad es cierta para cierto $n = m$. Para $n = m+1$ tenemos que

$$\begin{aligned} (m+1)! &\geq (m+1)(1^2 + 2^2 + \cdots + m^2) \\ &= 1^2 + 2^2 + \cdots + m^2 + m(1^2 + 2^2 + \cdots + m^2) \\ &\geq 1^2 + 2^2 + \cdots + m^2 + m\left(m + 2 + \frac{1}{m}\right) \\ &= 1^2 + 2^2 + \cdots + m^2 + (m+1)^2, \end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración.

Problema 4. Sean Γ una circunferencia de centro O, AE un diámetro de Γ y B el punto medio de uno de los arcos AE de Γ. El punto $D \neq E$ está sobre el segmento OE. El punto C es tal que el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo con AB paralelo a CD y BC paralelo a AD. Las rectas EB y CD se cortan en el punto F. La recta OF corta al arco menor EB de Γ en el punto I. Demostrar que la recta EI es la bisectriz del ángulo BEC.

Solución de Juan Carlos Ortiz Rhoton. Como B es el punto medio del arco y AE es un diámetro de Γ se tiene que $\angle BOE = \angle ABE = 90°$.



Como AB y DC son paralelas, $\angle DFE = 90°$ y como $\angle BOD = \angle BFD = 90°$ tenemos que el cuadrilátero $BODF$ es cíclico. Como $\widehat{BA}$ es la mitad del semicírculo se tiene que $\angle BEA = 45°$. También $\angle BAE = 45°$ y como $BADC$ es paralelogramo, $\angle BCD = 45°$. Luego $\angle BCD = \angle BED = 45°$ por lo que el cuadrilátero $BDEC$ es cíclico. Por lo tanto

$$\angle BEI = \frac{\angle BOI}{2} = \frac{\angle BDF}{2} = \frac{\angle BDC}{2} = \frac{\angle BEC}{2},$$

y EI biseca el ángulo $\angle BEC$.

Problema 5. Sean A y B dos conjuntos tales que:

1. $A \cup B$ es el conjunto de los enteros positivos.
2. $A \cap B$ es vacío.
3. Si dos enteros positivos tienen como diferencia a un primo mayor que 2013, entonces uno de ellos está en A y el otro en B.

Hallar todas las posibilidades para los conjuntos A y B.

Solución de Kevin William Beuchot Castellanos. Primero demostraremos que todos los primos mayores a 2013 están en el mismo conjunto. Sean p y q dos primos mayores que 2013 y supongamos que $p \in A$. Como la diferencia entre $2p$ y p es $p > 2013$, $2p$ tiene que estar en B. Por el mismo razonamiento $3p \in A$, $4p \in B$ y así sucesivamente llegamos a que $qp \in A$ (pues q es impar). Si $q \in B$ llegaríamos a que qp está en B (pues p también es impar) lo cual sería una contradicción. Luego, p y q tienen que estar en el mismo conjunto.
Veamos ahora que todos los demás impares también están en ese conjunto. Sea k un impar y supongamos que está en el otro conjunto. Notamos ahora que existen primos p y q con $p > 2013$ y un entero positivo r tal que p divide a $qr + k$ (una opción es elegir a p y a q diferentes con $p > 2013$ y resolver la congruencia para r). Luego, $qr + k = pt$ para algún entero t. Veamos ahora unos casos.

1. Si $(p, k) > 1$, como p es primo, $(p, k) = p$, por lo que $k = ps$ con s impar, de donde p y k tendrían que estar en el mismo conjunto, lo cual es una contradicción.
2. Si $(p, k) = 1$ consideramos dos casos.

   a) t es impar. En este caso se tiene que r es par, por lo que k y tp están en el mismo conjunto, de la misma manera que p y tp, por lo que p y k están en el mismo y llegamos a una contradicción.

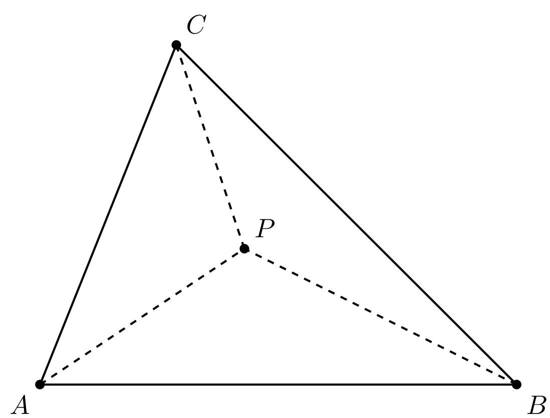
   b) t es par. Se tiene que r es impar. Luego, k y tp están en distintos conjuntos, pero p y tp también, por lo que p y k están en el mismo.

Luego, todos los impares están en uno de los dos conjuntos. Los pares deben estar en el otro conjunto, pues al suparle un primo $p > 2013$ el resultado es impar y está en el otro conjunto. Así divididos, claramente funcionan, por lo que el problema está completo.

Problema 6. Una *configuración* es un conjunto finito S de puntos del plano entre los cuales no hay tres colineales y a cada punto se le asigna algún color, de modo que si un triángulo cuyos vértices están en S tiene un ángulo mayor o igual a $120°$, entonces exactamente dos de sus vértices son de un mismo color. Hallar el número máximo de puntos que puede tener una configuración.

Solución de Luis Xavier Ramos Tormo. Primero demostremos que entre cualesquiera seis puntos de la confuguración tres de ellos formarán un ángulo mayor o igual que $120°$. Veamos dos casos

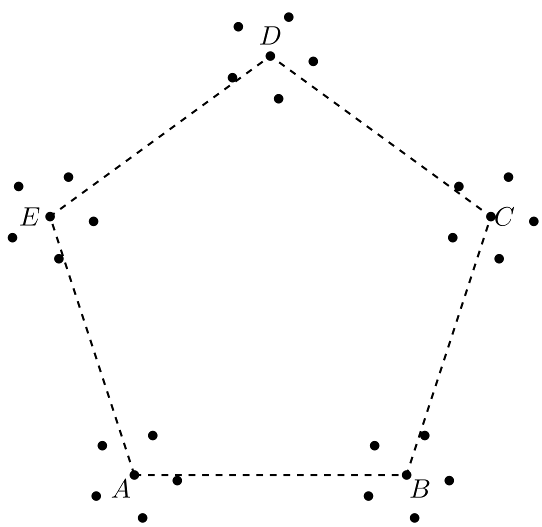
- La envolvente convexa de los seis puntos es un hexágono. Como la suma de ángulos internos de cualquier hexágono es $720°$, alguno de sus ángulos internos será mayor o igual que $\frac{1}{6}(720°) = 120°$.
- Tenemos al menos un punto dentro de la envolvente. Sea P ese punto y digamos que queda dentro del triángulo ABC.



Como $\angle APB + \angle BPC + \angle CPA = 360°$, tenemos que alguno de estos tres ángulos debe ser mayor que $\frac{1}{3}(360°) = 120°$.

Ahora veamos que $|S| \leq 25$. Si $|S| \geq 26$, digamos que hay c colores distintos. Si $c \geq 6$, tomo un punto de cada color y por lo que demostré, habrá tres formando un ángulo mayor o igual que $120°$. Luego $c \leq 5$.
Como $c \leq 5$, debe haber al menos un color con $\lceil \frac{|S|}{c} \rceil \geq \lceil \frac{26}{5} \rceil = 6$ (aquí, $\lceil x \rceil$ denota el menor entero que es mayor o igual que x). Tomando seis puntos de ese color, volvemos a encontrar un ángulo mayor o igual que $120°$. Esto demuestra que $|S| \leq 25$.

Para terminar, veamos un ejemplo con 25 puntos. Consideremos un pentágono convexo $ABCDE$ con lado R. Tomando como centro cada uno de los cinco vértices, consideramos un pentágono regular inscrito en un círculo de radio r. Pintamos del mismo color cada uno de los pentágonos regulares pequeños (los puntos del pentágono regular original no se consideran de la configuración). Veamos que con ligeros arreglos éste funciona.



Para asegurar que no haya tres puntos colineales, podemos girar un poco cada uno de los pentágonos regulares, conservando su mismo centro. Ahora, como los ángulos entre los puntos A, B, C, D y E son $36°$, $72°$ y $108°$, podemos hacer a r suficientemente pequeño de manera que ángulos formados con colores diferentes se parezcan lo suficiente a estos tres ($36°$, $72°$ y $108°$). En particular, podemos hacer que todos estos ángulos sean menores que $120°$. Finalmente, si tomamos tres puntos del mismo color, serán vértices de un pentágono regular, por lo que formarán un ángulo de $36°$, $72°$ y $108°$.

Luego, el número máximo de puntos de una configuración es justo 25.

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas de mayo a julio de 2014.

1 al 10 de mayo, Cuernavaca, Morelos

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes selectivos para determinar la delegación que representará a México en la 55^a Olimpiada Internacional (6 participantes), la delegación que representará a México en la XVI Olimpiada Centroamericana y del Caribe (3 participantes) y la preselección que nos representará en la XXIX Olimpiada Iberoamericana.

3 de junio

Envío a los estados el examen semifinal propuesto por el Comité Organizador de la OMM.

7 de junio

Aplicación en los estados registrados con este propósito del examen semifinal propuesto por el Comité Organizador de la OMM (puede aplicarse después).

6 al 14 de junio, San José, Costa Rica

XVI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe.

25 de junio al 5 de julio, Querétaro, Querétaro

Entrenamiento previo a la 55^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Julio

Publicacin del 27° número de la revista "Tzaloa".

3 al 13 de julio, Ciudad del Cabo, Sudáfrica

55^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

21 al 26 de julio, Corea del Sur

Competencia Internacional de Matemáticas.

Apéndice

Criterios 1 (Criterios de divisibilidad)**.** *Un número entero es divisible,*

- *entre* 2*, si el dígito de las unidades es un número par.*
- *entre* 3*, si la suma de sus dígitos es divisible entre* 3*.*
- *entre* 4*, si el número formado por los dos últimos dígitos (el de las unidades y el de las decenas) es divisible entre* 4*.*
- *entre* 5*, si el dígito de las unidades es* 5 *o* 0*.*
- *entre* 6*, si es divisible entre* 2 *y* 3*.*
- *entre* 8*, si el número formado por sus últimos tres dígitos es divisible entre* 8*.*
- *entre* 9*, si la suma de sus dígitos es divisible entre* 9*.*

Definición 3 (Divisibilidad)**.** *Si* a *y* b *son enteros, se dice que* b *divide* a *o que* a *es múltiplo de* b*, si* $a = bq$ *para algún entero* q*, y se denota por* $b \mid a$*.*

Definición 4 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros* a*,* b *y un entero positivo* m*, decimos que* a *es congruente con* b *módulo* m *si* $a - b$ *es múltiplo de* m*. En este caso escribimos* $a \equiv b \ (mod\ m)$*.*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean* a, b, c, d, m *enteros con* $m \geq 1$*.*

1. *Si* $a \equiv c \ (mod\ m)$ *y* $c \equiv d \ (mod\ m)$*, entonces* $a \equiv d \ (mod\ m)$*.*
2. *Si* $a \equiv c \ (mod\ m)$ *y* $b \equiv d \ (mod\ m)$*, entonces* $ab \equiv cd \ (mod\ m)$*.*
3. *Si* $a \equiv c \ (mod\ m)$*, entonces* $a^n \equiv c^n \ (mod\ m)$ *para todo entero positivo* n*.*
4. *Si* $ab \equiv bc \ (mod\ m)$*, entonces* $a \equiv c \ (mod\ \frac{m}{(b,m)})$ *donde* (b, m) *denota el máximo común divisor de* b *y* m*.*

Teorema 2 (Pequeño teorema de Fermat)**.** *Si* p *es un número primo y* a *es un entero primo relativo con* p*, entonces* $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$*.*

Teorema 3 (Inducción). *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Principio de las casillas). *Si $kn+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k+1$ objetos. En particular, si $n+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene dos o más objetos.*

Teorema 5 (Desigualdad media aritmética - media geométrica). *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 6 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Para cualesquiera números reales $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ se cumple que,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right).$$

La igualdad se verifica si y sólo si existe un número real λ tal que $x_i = \lambda y_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 7 (Suma de los ángulos internos de un triángulo). *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 8 (Teorema de Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 5 (Congruencia de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 6 (Semejanza de triángulos)**.** *Los triángulos* ABC *y* $A'B'C'$ *son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir,*

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$
$$\angle ACB = \angle A'C'B'$$
$$\angle BAC = \angle B'A'C'$$

y sus lados homólogos son proporcionales, esto es

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos* ABC *y* $A'B'C'$ *son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 9 (Teorema de Thales)**.** *Si* ABC *es un triángulo y* D*,* E *son puntos sobre los lados* AB *y* CA*, respectivamente, entonces los segmentos* DE *y* BC *son paralelos si y sólo si* $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

Teorema 10 (Desigualdad del triángulo)**.** *Los números positivos* a*,* b *y* c *son las medidas de los lados de un triángulo si y sólo si se cumplen las siguientes relaciones,*

$$\begin{aligned} a+b &> c,\\ a+c &> b,\\ b+c &> a. \end{aligned}$$

Definición 7 (Bisectriz)**.** *Dado un ángulo* $\angle ABC$ *su bisectriz es la recta que lo divide en dos ángulos iguales.*

Teorema 11 (Bisectrices)**.** *Las bisectrices internas de un triángulo concurren en un punto que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo. El punto de concurrencia se llama incentro.*

Teorema 12 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco.*

Definición 8 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 13 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo* $ABCD$ *es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a* $180°$*, es decir,*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Bibliografía

[1] T. Andreescu, D. Andrica. *Number Theory. Structures, Examples and Problems.* Birkhäuser, 2009.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[4] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2012.

[5] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[6] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[7] I. Niven, H. Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[8] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[9] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

[10] N. Vilenkin. *¿De cuántas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Directorio del Comité Organizador de la OMM

José Antonio Gómez Ortega (presidente)
Facultad de Ciencias, UNAM
jago@ciencias.unam.mx

Irving Daniel Calderón Camacho
Facultad de Ciencias, UNAM
irvingdanelc@ciencias.unam.mx

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
cobian@ciencias.unam.mx

Luis Cruz Romo
NA-AT Technologies
lcruzromo@gmail.com

Luis Eduardo García Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
microtarxcaty@ciencias.unam.mx

María Eugenia Guzmán Flores
CUCEI, Universidad de Guadalajara
marugeniag@gmail.com

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Facultad de Ciencias, UNAM
ssbmplayer@gmail.com

Ignacio Barradas Bibriesca
Universidad de Guanajuato
barradas@quijote.ugto.mx

Fernando Campos García
Facultad de Ciencias, UNAM
fermexico89@hotmail.com

David Cossío Ruiz
Depto. de Física y Matemáticas
Universidad Autónoma de Cd. Juárez
sirio11@gmail.com

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Metamorfosis del CIMAT
fuerunt@gmail.com

Luis Miguel García Velázquez
Instituto de Matemáticas, UNAM
lmgarcia@im.unam.mx

Jesús Jerónimo Castro
Facultad de Ingeniería
Universidad Autónoma de Querétaro
jesusjero@hotmail.com

Daniel Perales Anaya
Facultad de Ciencias, UNAM
dperanaya@hotmail.com

María Luisa Pérez Seguí
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo
psegui19@gmail.com

Miguel Raggi Pérez
Escuela Nacional de Estudios Superiores
Universidad Nacional Autónoma de México
mraggi@gmail.com

Olga Rivera Bobadilla
Facultad de Ciencias,
Universidad Autónoma del
Estado de México
olgarb@yahoo.com

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
carlos.rubio@uady.mx

David Guadalupe Torres Flores
Departamento de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
ddtorresf@gmail.com

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
valdez@uaem.mx

Rita Vázquez Padilla
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
ritavz14@gmail.com

Eduardo Velasco Barreras
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
lalovelascobar@gmail.com

Hugo Villanueva Méndez
Centro de Estudios en Física y Matemáticas
Básicas y Aplicadas
Universidad Autónoma de Chiapas
hugo.villanueva@unach.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@ciencias.unam.mx`

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

`http://www.ommenlinea.org`

¡Síguenos en facebook y en twitter!