TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2014, No. 3

Comité Editorial:

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Luis Eduardo García Hernández

Carlos Jacob Rubio Barrios

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

©Queda estrictamente prohibida la reproducción parcial o total por cualquier sistema o método, mecánico o electrónico, sin autorización previa del autor.
Impreso y hecho en México.
Agosto de 2014.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Tzaloa, Año 2014, Número 3

Conforme avanza el año, en Tzaloa redoblamos nuestro esfuerzo y entusiasmo por brindar a toda la comunidad olímpica nuevos e interesantes problemas. Como siempre en las secciones *Problemas de práctica* y *Problemas de entrenamiento* hemos incluido retos accesibles para todos los niveles, ya que nuestro principal interés es contribuir de manera útil brindando material adecuado, tanto para principiantes como para experimentados.

Por su contribución para la conformación de este número, agradecemos de manera muy especial a Pedro Sánchez y Didier Solís, quienes amablemente accedieron a escribir para Tzaloa el artículo titulado *Una propuesta para la generación de problemas para competencias matemáticas*. A través de sus páginas nos introducen al diseño y generación de problemas para un examen de olimpiada. Estamos seguros de que este material será de gran utilidad para aquellos profesores y alumnos que participan en la elaboración de los distintos exámenes de la olimpiada mexicana de matemáticas.

En nuestra nueva sección de *Concursos Estatales* presentamos los problemas de la tercera etapa de la 28^a Olimpiada de Matemáticas en Morelos. Estamos seguros que la difusión a nivel nacional de estos materiales locales, tiende puentes que favorecen el intercambio entre los estados, y por esta razón invitamos a los delegados estatales a que nos envíen sus propuestas de exámenes que utilizan para seleccionar a las delegaciones

[1] Vocablo náhuatl cuyo significado en español es *aprender*.

que representan a sus estados en el concurso nacional de la olimpiada mexicana de matemáticas.

Finalmente, presentamos las soluciones de los alumnos que representaron a México en la XXVI Olimpiada de la Cuenca del Pacífico, la III Olimpiada Europea Femenil y la XVI Olimpiada de Centroamérica y el Caribe.

Esperamos que los contenidos, problemas, soluciones, exámenes, información olímpica y materiales que hemos escogido, revisado y preparado sean de interés y utilidad para todos nuestros lectores.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

28ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 28^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1995. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2014-2015 y, para el 1° de julio de 2015, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 28^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 9 al 14 de noviembre de 2014 en Toluca, Estado de México. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2014 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXVII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 56^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Tailandia, julio de 2015) y a la XXX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (Puerto Rico, septiembre de 2015).

De entre los concursantes nacidos en 1999 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XVII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (junio de 2015).

De entre los más jóvenes se seleccionará la delegación mexicana que nos representará en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC).

Una propuesta para la generación de problemas para competencias matemáticas

Por Pedro David Sánchez Salazar y Didier Adán Solís Gamboa

Nivel Intermedio

Una pieza fundamental en la organización de la olimpiada de matemáticas es sin duda el diseño de los exámenes. Un ciclo del proceso selectivo con miras al Concurso Nacional usualmente conlleva la aplicación de cinco o seis exámenes a lo largo de un período que se extiende por varios meses. Para poder elegir los problemas que conformarán dichos exámenes resulta indispensable contar con un banco de problemas al cual recurrir. Debido a la naturaleza de la Olimpiada, los problemas que conforman los distintos exámenes deben ser inéditos, por lo que contar con un acervo del cual ocupar varias decenas de ellos anualmente presenta un desafío. En este artículo compartimos una alternativa para solucionar este problema.

Generación de problemas

Concebir un problema para ser usado en una Olimpiada de Matemáticas no es algo sencillo. A diferencia de un ejercicio mecánico, un problema de olimpiada debe satisfacer ciertos criterios: poder plantearse y resolverse usando conceptos básicos, admitir distintas soluciones, ser inédito, etc. De tal suerte, el proceso de generar los problemas para un examen de olimpiada requiere una gran dosis de creatividad y experiencia.

Usualmente, para crear un problema se requiere incorporar elementos de uno o varios problemas conocidos. Este acoplamiento de técnicas requiere que el diseñador tenga una vasta experiencia en resolución de problemas de olimpiada. Sin embargo, existen

muchas ocasiones en los que gente con poca experiencia en la olimpiada requiere crear problemas. Dos casos típicos que ejemplifican esta situación son los siguientes:
(1) un estudiante queda en la pre-selección estatal y su profesor – que tiene mucho entusiasmo pero poca experiencia previa en la olimpiada – quiere brindarle acompañamiento durante el proceso selectivo;
(2) un profesor (con las mismas características) se aboca a organizar la olimpiada en su escuela, zona o distrito escolar.
En estos casos, una alternativa que permite a la gente con relativamente poca experiencia en la olimpiada crear un banco de problemas, es la modificación de problemas conocidos.
Evidentemente, cuando hablamos de modificar un problema para generar otro, estamos suponiendo que la modificación es de cierto modo sustancial, de manera que el problema modificado y el problema original tengan atributos diferentes. Dichas modificaciones pueden presentarse de diversas maneras, por ejemplo, en las hipótesis del problema, en el resultado, los elementos que lo constituyen, etc.
Otra alternativa que con frecuencia se sigue al generar problemas consiste en usar las ideas o métodos que surgen al plantear o resolver un problema y enmarcarlas en un contexto distinto. En estos casos, los enunciados de los problemas modificados suelen ser totalmente distintos respecto al problema original, aunque su planteamiento y solución compartan muchos rasgos comunes.

Un ejemplo

A continuación presentaremos un ejemplo de cómo la modificación de un problema puede dar lugar a una diversidad de nuevos problemas. Hemos escogido un problema que es un clásico en el contexto de los acertijos matemáticos, a saber, el conocido problema de los cuadrados mágicos. El enunciado es el siguiente:

Problema 0. *Dibuja una cuadrícula de* 3×3. *Coloca un número entre el 0 y el 8 en cada casilla de la cuadrícula, de tal forma que ningún número se repita y que la suma de los números en cada renglón, columna y diagonal principal de la cuadrícula sea la misma.*

Solución: Supongamos que podemos acomodar los números de manera que se satisfagan las condiciones del problema y llamemos S a la suma común de los tres números en cada renglón, columna o diagonal principal. Procedemos a hallar S usando una estrategia muy útil: hacer un conteo de dos maneras distintas. Primero notemos que si sumamos renglón por renglón entonces la suma de todos los números de la cuadrícula será $S + S + S = 3S$. Por otro lado, dado que los números se acomodaron sin repetir, la suma de todos los números de la cuadrícula será $0 + 1 + 2 + \cdots + 8 = \frac{8\cdot 9}{2} = 36$. Igualando estas expresiones obtenemos $3S = 36$ y por tanto $S = 12$.
Nuestro siguiente paso será encontrar las posibles formas en que podemos sumar 12 con tres números distintos conjunto $A = \{0, 1, 2 \ldots, 8\}$, lo cual puede hacerse con relativamente poco esfuerzo si procedemos ordenadamente, listando la sumas de manera que sus sumandos estén en orden creciente. La siguiente tabla muestra las únicas

8 sumas posibles:

S_1	$0+4+8$
S_2	$0+5+7$
S_3	$1+3+8$
S_4	$1+4+7$
S_5	$1+5+6$
S_6	$2+3+7$
S_7	$2+4+6$
S_8	$3+4+5$

Dado que en total necesitamos 8 sumas (3 para los renglones, 3 para las columnas y 2 para las diagonales) podemos concluir que cada una de las sumas debe aparecer exactamente una vez en el acomodo. Ahora bien, notemos que cada casilla de la cuadrícula contribuye en 2, 3 o 4 sumas diferentes, dependiendo su ubicación: la casilla central contribuye en 4 sumas (un renglón, una columna y las dos diagonales), las casillas de las esquinas están en 3 sumas (una correspondiente a renglón, otra a columna y la tercera a una diagonal) y las casillas restantes aportan a 2 sumas únicamente (un renglón y una columna). Esta observación nos permitirá avanzar en la solución, pues los números del conjunto A también se dividen en exactamente tres categorías, dependiendo si aparecen en 2, 3 o 4 sumas, respectivamente.

Número	Sumas que lo contienen	Cantidad de sumas
0	S_1, S_2	2
1	S_3, S_4, S_5	3
2	S_6, S_7	2
3	S_3, S_6, S_8	3
4	S_1, S_4, S_7, S_8	4
5	S_s, S_5, S_8	3
6	S_5, S_7	2
7	S_2, S_4, S_6	3
8	S_1, S_3	2

Combinando la observación con la tabla anterior, podemos agrupar los números de A en tres clases y además indicar en qué posible posición de la cuadrícula se encontrarán, como se observa en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline * & \mathrm{O} & * \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{X} & \mathrm{O} \\ \hline * & \mathrm{O} & * \\ \hline \end{array} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{O} & \longleftrightarrow & \{0,2,6,8\} \\ * & \longleftrightarrow & \{1,3,5,7\} \\ \mathrm{X} & \longleftrightarrow & \{4\} \end{array}$$

Podemos ver que el número 4 necesariamente debe estar en el centro. Si nos fijamos ahora en el grupo $\{0,2,6,8\}$ podemos ver que se divide en dos parejas: $\{0,8\}$ y $\{2,6\}$, cada una de los cuales aparece en una sola suma (S_1 y S_7, respectivamente). De este modo, al ubicar un elemento de cada conjunto, digamos el 0 y el 2, los restantes quedan determinados (el 8 quedará opuesto al 0 y el 6 opuesto al 2) por lo que solo resta acomodar los elementos de las esquinas. Pero siendo un poco observadores notaremos que en dicho caso los valores de las esquinas también quedan determinados. Por ejemplo, en el acomodo que se presenta a continuación, la esquina superior izquierda solo puede contener al número 7, ya que es el único que comparte una suma con el 0 (la suma S_2) y con el 2 (la suma S_6).

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline * & O & * \\ \hline O & 4 & O \\ \hline * & O & * \\ \hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline * & 0 & * \\ \hline 2 & 4 & O \\ \hline * & O & * \\ \hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline * & 0 & * \\ \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline * & 8 & * \\ \hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 7 & 0 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline 3 & 8 & 1 \\ \hline\end{array}$$

□

Ahora procedemos a ilustrar cómo este sencillo y conocido problema puede dar origen a una gama de problemas con muy diversos matices. El primer paso a considerar será tratar de extraer los aspectos claves que conforman el problema. Una buena idea es tratar de enunciar el problema en los términos más simples y generales. En otras palabras, trataremos de responder la pregunta *¿De qué se trata el problema?* de la manera más sencilla posible.

Por ejemplo, en el caso de nuestro problema podemos decir que se trata de acomodar un conjunto de números (el conjunto $\{0, 1, \ldots, 8\}$) en un arreglo de casillas (la cuadrícula) de manera que se cumplan ciertas relaciones con respecto a una operación (que las sumas sean iguales). A partir de este enunciado simplificado podemos enlistar los elementos básicos que conforman el problema, a saber, (1) el conjunto de números, (2) la operación usada, (3) la forma en que las casillas están dispuestas, (4) lo que se pide hallar. Modifiquemos cada uno de estos elementos.

El conjunto de números

Una manera obvia de modificar el problema consiste en tratar de cambiar el conjunto de números que se está usando.

Una primera observación es que podemos sumar una misma cantidad a todos los números de la cuadrícula y obtener un nuevo arreglo. Por ejemplo, a partir del arreglo

7	0	5
2	4	6
3	8	1

que obtuvimos para el conjunto de números $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, obtenemos el siguiente arreglo para el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

pues todas las sumas $S_1, S_2, \ldots, S_8$ aumentan exactamente en 3 unidades y por tanto en el segundo arreglo todas las sumas vuelven a coincidir (iguales a 15 en vez de 12).

Tras un breve análisis, nos damos cuenta que en general cualquier progresión aritmética de 9 números funcionaría para este fin, por lo que los siguientes son dos posibles nuevos problemas.

Problema 1. *Dibuja una cuadrícula de* 3×3. *Coloca un número del conjunto de números* $\{-3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ *en cada casilla de la cuadrícula, de tal forma que ningún número se repita y que la suma de los números en cada renglón, columna y diagonal principal de la cuadrícula sea la misma.*

Problema 2. *Considera una cuadrícula de* 3×3 *y una progresión aritmética de* 9 *elementos. Demuestra es posible acomodar estos números en las casillas de la cuadrícula, de tal forma que ningún número se repita y que la suma de los números en cada renglón, columna y diagonal principal de la cuadrícula sea la misma.*

La operación usada

En muchas ocasiones se pueden usar analogías conocidas para modificar un problema. Por ejemplo, observando que una progresión aritmética es a la suma lo que una progresión geométrica es a la multiplicación, podemos modificar el Problema 0 para obtener el siguiente problema.

Problema 3. *Dibuja una cuadrícula de* 3×3. *Coloca un número tomado del conjunto* $\{1, 2, 4, 8, \ldots, 256\}$ *en cada casilla de la cuadrícula, de tal forma que ningún número se repita y que el producto de los números en cada renglón, columna y diagonal principal de la cuadrícula sea el mismo.*

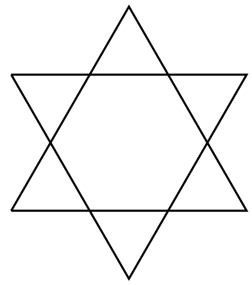
Por otro lado, podemos observar que en cualquier cuadrado mágico de 3×3 construido a partir de una progresión aritmética la suma común es divisible entre 3; por lo que siguiendo la analogía, podemos concluir que si usamos la multiplicación en vez de la suma, el producto común debiera ser un cubo. Esta observación da origen al siguiente problema:

Problema 4. *Dibuja una cuadrícula de* 3×3. *Coloca un número del conjunto* $\{4, 6, 9\}$ *en cada casilla de la cuadrícula, de tal forma que cada número se use al menos una vez y que el producto de los números en cada renglón, columna y diagonal principal de la cuadrícula sea el mismo.*

La forma en que están dispuestas las casillas

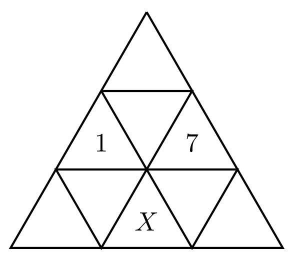
Otro aspecto que resulta natural modificar es la disposición de las casillas. En esta caso trabajaremos con otras dos formas geométricas con un alto grado de simetría: un hexágono y un triángulo. El primer problema es una variación inmediata, ya que conserva todos los demás elementos.

Problema 5. *En cada una de las* 7 *regiones de la figura se coloca un número del* 0 *al* 6 *sin repetir y de manera que la suma de los números en tres regiones colineales sea la misma. ¿Qué números pueden ir en la región central?*



El segundo problema involucra una complejidad mayor.

Problema 6. *(Concurso Estatal, Yucatán, 2008) Tony tiene un tablero triangular de lado 3 cm. como el que se muestra a continuación y 9 fichas numeradas del 1 al 9. Después de mucho trabajo Tony logró acomodar una ficha en cada triangulito del tablero, de manera que la suma de los números en cada uno de los triángulos medianos (de lado 2 cm) es la misma. En un descuido, Tony sacudió el tablero y se caen todas las fichas, salvo las fichas numeradas con en el 1 y el 7, las cuales se mantuvieron en el lugar correcto ¿Qué ficha tenía Tony en el triangulito marcado con una X?*



Lo que te pide el problema

Esta es una de las formas más comunes para generar problemas. Podemos observar que la manera de acomodar los números del 0 al 8 en las casillas no es única, por lo que tiene sentido preguntarse de cuántas formas puede hacerse esto. Más aún, dada la simetría de la figura, también es posible calcular cuántas acomodos distintos existen.

Problema 7. *En cada casilla de una cuadrícula de* 3×3 *se coloca un número del 0 al 8 de tal forma que ningún número se repita y que la suma de los números en cada renglón, columna y diagonal principal de la cuadrícula sea la misma. ¿De cuántas maneras es posible hacer esto?*

Una vez llenado el arreglo, podemos rotarlo 90° o escribir todas las filas (o las columnas) al revés, resultando nuevamente en un arreglo donde todas las sumas coinciden.

De alguna forma, esas nuevas formas de llenar el tablero son esencialmente la misma que la original, por lo que cabe preguntarnos cuántas formas esencialmente distintas hay de llenar el tablero con los números.

Problema 8. *En cada casilla de una cuadrícula de* 3×3 *se coloca un número del 0 al 8 de tal forma que ningún número se repita y que la suma de los números en cada renglón, columna y diagonal principal de la cuadrícula sea la misma. ¿De cuántas maneras esencialmente distintas es posible hacer esto? Nota: se dice que dos acomodos son esencialmente distintos si no es posible generar uno a partir del otro usando una de las simetrías del tablero.*

La misma idea

Finalizamos con una última alternativa para generar problemas que con frecuencia rinde buenos frutos. Se trata de tomar las mismas ideas que se emplearon en la solución. En este caso, la técnica sobre la cual nos enfocaremos es la de sumar las mismas cantidades de dos formas distintas. Iniciamos con una ligera variación.

Problema 9. *En cada casilla de una cuadrícula de* 3×3 *se coloca un número del 0 al 8 de tal forma que ningún número se repita y que la suma de los números en cada renglón, columna y diagonal principal de la cuadrícula sea la misma. Considera cada renglón como un número de 3 cifras y llamemos* A *a la suma de estos 3 números. De manera análoga, considera cada columna como un número de 3 cifras y llamemos* B *a esta suma. Demuestra que* $A = B$.

El siguiente problema es una modificación del problema anterior, ya que no se considera más la condición original que define los cuadrados mágicos.

Problema 10. *(Concurso Estatal, Yucatán, 1997) En una cuadrícula de* 3×3 *se colocan los números del 1 al 9 sin repetir. Considera cada renglón como un número de 3 cifras y llamemos* A *a la suma de estos 3 números. De manera análoga, considera cada columna como un número de 3 cifras y llamemos* B *a esta suma. ¿Es posible acomodar los números en la cuadrícula de manera que* $A + B = 1997$*?*

Notemos que este problema difiere en varios aspectos fundamentales del Problema 0: tanto las hipótesis como el resultado son diferentes, sin embargo conserva muchos otros aspectos del problema original como son el conjunto de nueve enteros consecutivos y la cuadrícula de 3×3. Nuestro último ejemplo no considera estos elementos tampoco. De hecho, el único aspecto fundamental que lo relaciona con el Problema 0 es la forma en que se resuelve.

Problema 11. *(Selectivo de Primarias, Yucatán, 2012). Un número de 5 cifras es fantabuloso si se escribe usando cada uno de los dígitos 1, 3, 5, 7, 9 exactamente una vez. Por ejemplo, 15379 y 73591 son números fantabulosos.*

1. *¿Cuántos números fantabulosos hay?*
2. *Encuentra el resultado de sumar todos los números fantabulosos.*

El contexto

Desde hace más de una década la Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Yucatán convoca en su proceso selectivo a un gran número de estudiantes de educación secundaria, llegando a más del 95 % de la matrícula de educación secundaria año tras año desde 2008. En 2011 se incorpora educación primaria, alcanzando una cobertura masiva en 2012. Paralelamente al crecimiento en el número de participantes crece la demanda por cursos e instancias de formación para los profesores de los concursantes. En 2011 se oferta en educación secundaria el Curso-taller de evaluación y generación de problemas para profesores-entrenadores, en tanto que en 2012 y 2014 se imparte el Curso-taller de estrategias orientadas a la resolución de problemas para profesores-entrenadores de educación primaria. En ambos cursos se incluyó un taller de generación de problemas con 5 horas de duración. Los Problemas 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 y 9 (así como otros muchos) fueron creados a partir del enunciado del Problema 0 en dichos talleres por profesores de educación primaria cuyos estudiantes participaban por primera vez en la fase estatal de la Olimpiada de Matemáticas.

Soluciones

1. Este es un caso particular del Problema 2 en donde la diferencia común es $d = 2$ y el valor inicial es $a = -3$.

2. Un argumento similar al mencionado para sumar un mismo número a todas las casillas nos convencerá también que es posible multiplicar todas las entradas por un mismo número y obtener otro arreglo en donde las sumas coinciden. Así, a partir del ejemplo dado con los números del 1 al 9 podemos obtener el arreglo

16	2	12
6	10	14
8	18	4

   donde todas las sumas son iguales a 30 en vez de 15.

   Entonces, para obtener un arreglo para la progresión aritmética $a, a+d, a+2d, \ldots, a+8d$ procedemos a multiplicar todas las casillas del arreglo formado con los números $\{0, 1, 2, \ldots, 8\}$ y obtenemos un arreglo con los números $\{0, d, 2d, 3d, \ldots, 8d\}$. Finalmente, sumamos a en cada una de las casillas y obtenemos el arreglo buscado.

3. Notando que $1 = 2^0$ y $256 = 2^8$ podemos obtener una solución usando únicamente potencias de dos. Observemos que los números son potencias de 2 consecutivas: $a^i = 2^1, i = 0, 1, \ldots, 8$. Sea P el producto común. Procediendo como en el Problema 2 obtenemos que

$$P^3 = a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_8 = 2^{0+1+2+\cdots+8} = 2^{36}$$

   y en consecuencia $P = 2^{12}$. Identificando 2^i con i del Problema 0 se obtiene un arreglo con las condiciones requeridas.

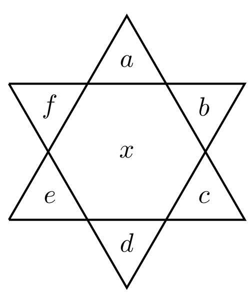
A final de cuentas, estamos aprovechando la ley de los exponentes que convierte productos de una misma base en sumas de exponentes.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 7 & 0 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline 3 & 8 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2^7 & 2^0 & 2^5 \\ \hline 2^2 & 2^4 & 2^6 \\ \hline 2^3 & 2^8 & 2^1 \\ \hline \end{array} \quad = \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 128 & 1 & 32 \\ \hline 4 & 16 & 64 \\ \hline 8 & 256 & 2 \\ \hline \end{array}$$

4. Por lo discutido en la solución del Problema 3, el producto de los 9 números debe ser un cubo perfecto. Una alternativa natural para que esta condición se cumpla es tomar 3 cuatros, 3 seises y 3 nueves. El producto común en este caso será $P = 4 \cdot 6 \cdot 9 = 216 = 6^3$. Por tanto basta con encontrar un acomodo donde en cada columna, renglón o diagonal haya exactamente un 4, un 6 y un 9 o bien tres números 6. Uno de dichos arreglos es el siguiente:

4	9	6
9	6	4
6	4	9

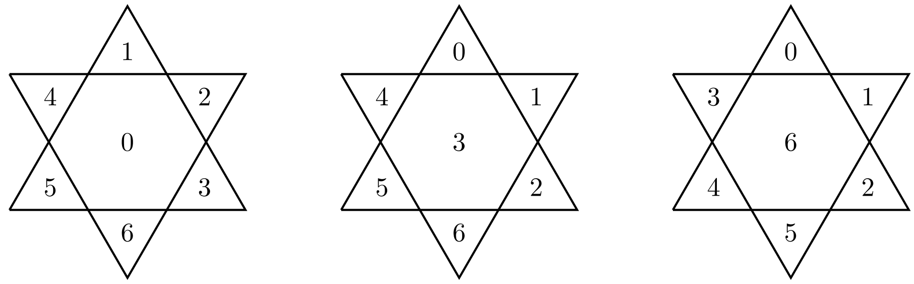
5. En este caso tenemos únicamente tres sumas y todas ellas comparten el número la casilla central. Denotemos por S a la suma común y los números que van en cada casilla como lo indica la figura:



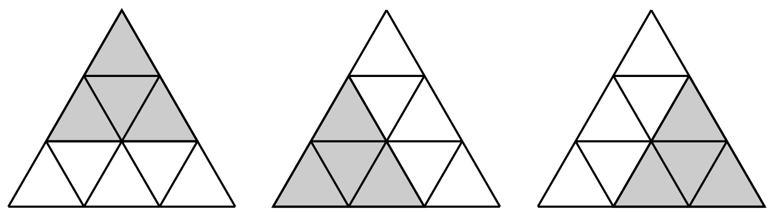
Entonces tenemos

$$\begin{aligned} 3S &= (a + x + d) + (b + x + e) + (c + x + f) \\ &= (a + b + c + d + e + f + x) + 2x \\ &= 21 + 2x \end{aligned}$$

y reacomodando términos obtenemos $3(S - 7) = 2x$. En consecuencia $3 \mid 2x$ y por tanto $3 \mid x$, así que la únicas posibles opciones son $x = 0$, $x = 3$ ó $x = 6$. Las correspondientes sumas en cada caso son $S = 7$, $S = 9$ y $S = 11$, respectivamente. Finalmente, es fácil comprobar que cada una de estas opciones da lugar a un acomodo válido, como lo indican los siguientes ejemplos:



6. Llamemos nuevamente S a la suma común. En esta figura, las siguientes tres zonas deben tener suma igual a S:

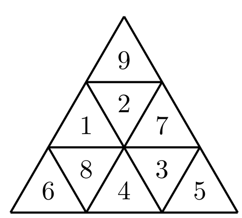


De esta manera, si sumamos las tres obtendremos como total $3S$, pero al sumarlas, las casillas con el 1, 7 y X están siendo sumadas dos veces, pues cada una aparece en dos triángulos. De esta manera, la suma de todas las casillas (sin repetición) de la figura será igual a $3S - (1 + 7 + X) = 3S - 8 - X$.

Por otro lado, la suma de todas las casillas, sin repetir, es $1+2+3+\cdots+9 = 45$. Tenemos entonces la ecuación

$$3S - 8 - X = 45.$$

Como 45 y $3S$ son múltiplos ambos de 3, necesariamente $-8 - X$ y por tanto $8 + X$ también lo serán. Entonces tenemos las posibilidades: $X = 1, X = 4, X = 7$ pero la primera y la última son imposibles porque ya se usaron esos números en otras casillas. Concluimos pues, que $X = 4$ es la respuesta. Con esa información incluso podríamos completar la figura (aunque no lo pide el problema).



7. Recordemos que el 4 necesariamente debe ir en la casilla del centro y los números del conjunto $\{0, 2, 6, 8\}$ deben ubicarse en las casillas marcadas por I, II, III y IV en la siguiente cuadrícula:

	I	
II	4	III
	IV	

Fijémonos en la casilla marcada por el I. Para ocuparla tenemos 4 opciones. Una vez que se elija el número que irá en I, el número que irá en IV queda determinado. Así, sólo quedan 2 opciones para la casilla II, con lo que queda determinado el número que irá en III. Como se comentó en el Problema 0, ya que estas 5 casillas están ocupadas, las casillas de las esquinas quedan determinadas. Por tanto hay $4 \cdot 2 = 8$ distintas formas. A continuación está la lista de los 8 arreglos:

5	6	1
0	4	8
7	2	3

1	8	3
6	4	2
5	0	7

3	2	7
8	4	0
1	6	5

7	0	5
2	4	6
3	8	1

5	0	7
6	4	2
1	8	3

3	8	1
2	4	6
7	0	5

7	2	3
0	4	8
5	6	1

1	6	5
8	4	0
3	2	7

8. Recordemos que un cuadrado tiene 8 simetrías: rotaciones de $90°, 180°, 270°$ y $360°$; y reflexiones respecto a los ejes, vertical, horizontal y los dos diagonales. Por tanto, de la solución anterior concluimos que como son 8 acomodos distintos, cada uno corresponde exctamente a una simetría y en consecuencia solo hay un arreglo esencialmente distinto. De hecho, si observamos con detenimiento los 8 arreglos del inciso anterior, podemos ver que los arreglos de la primera fila corresponden con las 4 rotaciones y los de la segunda fila con las cuatro reflexiones respecto al arreglo original presentado en el Problema 0.

   Podemos, sin embargo, argumentar de otra manera como sigue. El 4 siempre está al centro, por lo que está fijo. El 0 tiene que ir en una orilla, mas no en una esquina. Cualquiera de las cuatro orillas son esencialmente la misma al considerar rotaciones. Una vez colocado el cero, la orilla opuesta tiene que contener al 8. Las otras dos orillas necesariamente tendrán al 2 y al 6, pero considerando reflexiones, es indistinto cómo colocarlos. Y una vez que se han puesto en las casillas los números $0, 2, 4, 6, 8$, las casillas de las esquinas necesariamente quedan determinadas. Por tanto, sólo puede haber un arreglo esencialmente distinto.

9. Supongamos que tenemos un arreglo que cumple las condiciones pedidas. Representemos con variables los números que aparecen en cada casilla.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Entonces, trabajando con renglones, los tres números obtenidos son $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, $\overline{def} = 100d + 10e + f$ y $\overline{ghi} = 100g + 10h + i$.

Al hacer la suma $\overline{abc} + \overline{def} + \overline{ghi}$ y simplificar obtendremos

$$A = 100(a + d + g) + 10(b + e + h) + (c + f + i).$$

Si denotamos por S a la suma común de todos los renglones y columnas, obtenemos

$$A = 100S + 10S + S = 111S.$$

Del mismo modo, pero trabajando ahora por columna, obtenemos los tres números $\overline{adg} = 100a + 10d + g$, $\overline{beh} = 100b + 10e + h$ y $\overline{cfi} = 100c + 10f + i$ y por tanto

$$B = 100(a + b + c) + 10(d + e + f) + (g + h + i)$$

y por un argumento similar al usado por renglones, obtenemos

$$B = 100S + 10S + S = 111S.$$

Concluimos entonces que necesariamente $A = B$.

10. No es posible acomodar los números de manera que se satisfaga $A + B = 1997$. Para llegar a esta conclusión denotemos por $a, b, c, \ldots, h, i$ a los números dígitos y acomodémoslos en la cuadrícula de la siguiente forma:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Notemos que por la prueba del criterio de divisibilidad por 3 tenemos que $\overline{abc} \equiv a + b + c \pmod 3$, $\overline{def} \equiv d + e + f \pmod 3$ y $\overline{ghi} \equiv g + h + i \pmod 3$. Como $A = \overline{abc} + \overline{def} + \overline{ghi}$ entonces tenemos

$$A \equiv a+b+c+d+e+f+g+h+i \equiv 1+2+3+4+5+6+7+8+9 \equiv 45 \equiv 0 \pmod 3.$$

De manera similar podemos observar que a raíz de las congruencias $\overline{adg} \equiv a + d + g \pmod 3$, $\overline{beh} \equiv b + e + h \pmod 3$ y $\overline{cfi} \equiv c + f + i \pmod 3$ se concluye que $B \equiv 0 \pmod 3$ y por tanto $A + B \equiv 0 \pmod 3$. Sin embargo $1997 \equiv 2 \pmod 3$, lo que prueba la imposibilidad del acomodo.

11. Dado que hay cinco dígitos y pueden aparecer en cualquier orden, la respuesta a la primera pregunta es $5! = 120$.

Para la segunda pregunta, retomando la idea de los problemas anteriores, pensar que tenemos una cuadrícula de 120×5 y en cada renglón acomodamos los dígitos de cada número fantabuloso. Ahora, en la columna de la derecha, correspondiente a las unidades, cada uno de los dígitos aparece repetido varias veces. Para ser precisos, cada dígito aparece 24 veces, pues cada una de las $4! = 24$ formas de acomodar los dígitos restantes corresponde exactamente a un número fantabuloso diferente, es decir, a un renglón distinto. Por tanto, la suma de la columna de las unidades es $24 \cdot 1 + 24 \cdot 3 + 24 \cdot 5 + 24 \cdot 7 + 24 \cdot 9 = 24 \cdot 25 = 600$.

Pero en la segunda columna sucederá exactamente lo mismo, sólo que al ser columna de decenas, estos aportarán a la suma 10 veces más que la de las unidades, es decir, 6000. El mismo argumento aplica para las centenas, millares y decenas de millar. De este modo, la suma de todos los números fantabulosos será

$$600 + 6000 + 60000 + 600000 + 6000000 = 6666600.$$

Bibliografía

1. Guerrero, E., Sánchez, P. y Solís, D. *Estrategias orientadas a la solución de problemas*. Universidad Autónoma de Yucatán, 2012.

2. Guerrero, E., Pérez, E. y Solís, D. *Evaluación y generación de problemas*. Universidad Autónoma de Yucatán, 2011.

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este tercer número del año 2014. Como seguramente ya habrás observado, el nivel de dificultad de los problemas que contiene esta sección varía conforme va transcurriendo el año. Es así, que el material seleccionado para el primer número es en su mayoría de nivel principiante y a partir de ahí, paulatinamente se incrementa el nivel, de manera que la selección para el cuarto (último) número del año es la que incorpora la mayor proporción de problemas avanzados. De cualquier manera, en todos los números siempre buscamos que la selección sea diversa que incluya retos interesantes y a la medida de todos.

Por último, te invitamos a contribuir al enriquecimiento de esta sección de la revista enviando problemas interesantes cuya solución desees compartir. Para ello ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos todas tus propuestas.

Problema 1. Sean a y b números reales positivos tales que $a+b=1$. Demuestra que $a^a b^b + a^b b^a \leq 1$.

Problema 2. Sean p y n números naturales tales que p es primo y $1+np$ es un cuadrado. Demuestra que $n+1$ es suma de p cuadrados.

Problema 3. En un pentágono $ABCDE$ los triángulos ABC, BCD, CDE, DEA y EAB tienen la misma área. Sean M y N los puntos de intersección de BE con AC y AD, respectivamente. Demuestra que $BM = EN$.

Problema 4. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones en los números reales

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_{2014} &= 2014, \\ x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{2014}^4 &= x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{2014}^3. \end{aligned}$$

Problema 5. Sea $ABCDEF$ un hexágono regular y sea P un punto en su interior tal que $\angle BAP = \angle DCP = 50°$. Determina la medida del ángulo $\angle ABP$.

Problema 6. Demuestra que la suma de los cuadrados de dos enteros positivos consecutivos no puede ser igual a la suma de cuartas potencias de dos enteros positivos consecutivos.

Problema 7. Se tienen 11 enteros en un pizarrón. Demuestra que se pueden elegir algunos de ellos (quizás todos) y poner $+$ o $-$ entre cada dos de ellos de manera que el resultado sea divisible entre 2014.

Problema 8. Demuestra que para cualquier entero $n \geq 3$ se cumple que $(2n)! < n^{2n}$.

Problema 9. Decimos que un entero positivo es *lindo*, si es divisible por cada uno de sus dígitos no nulos. Demuestra que no puede haber más de 13 números lindos consecutivos, y encuentra una lista de 13 números lindos consecutivos.

Problema 10. Demuestra que para cualquier entero $n \geq 4$, se puede partir un triángulo isósceles de ángulos $120°, 30°, 30°$ en n triángulos semejantes.

Problema 11. Sean ABC un triángulo y X un punto en su interior. Encuentra todos los puntos X tales que $(BXC) = (CXA) = (AXB)$, donde (WYZ) denota el área del triángulo WYZ.

Problema 12. Determina todos los números primos p y q tales que $pq \mid 5^p + 5^q$.

Problema 13. En una competencia de tenis hay n jugadores de tal manera que cualesquiera dos van a jugar entre sí. Se sabe que en cada juego hubo un ganador y un perdedor, es decir, no hubo empates. Si G_i y P_i son el número de juegos que ganó y perdió el jugador i, respectivamente, demuestra que

$$P_1^2 + P_2^2 + \cdots + P_n^2 = G_1^2 + G_2^2 + \cdots + G_n^2$$

Problema 14. Se define $p_1 = 2$ y para cada $n \geq 2$ se define p_n como el mayor número primo que divide al número $p_1 p_2 \cdots p_{n-1} + 1$. Demuestra que el 5 nunca aparece en esta sucesión.

Problema 15. Inicialmente se tienen tres enteros a, b y c. En un paso se permite elegir dos de ellos, sumarle 1 a uno y restarle 1 al otro. ¿Qué tienen que cumplir a, b y c para que, después de un número finito de pasos, se vuelvan iguales?

Problema 16. Sea ABC un triángulo con $AB \neq AC$. El incírculo con centro en I toca los lados BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. Sea M el punto medio de EF y sea P el otro punto de intersección del segmento AD y el incírculo. Demuestra que el cuadrilátero $PMID$ es cíclico.

Problema 17. Sea n un entero positivo y sea P un conjunto de n números primos. Demuestra que cualquier conjunto de $n + 1$ números naturales tal que sus divisores primos están todos en P, contiene un subconjunto no vacío tal que el producto de sus elementos es un cuadrado.

Problema 18. Sean x, y, z números reales positivos tales que su producto es igual a 1. Demuestra que

$$\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}+\frac{(x+y-1)^2}{z}\geq x+y+z.$$

Problema 19. Decimos que un grupo de tres personas es *simétrico*, si cada una conoce a las otras dos o bien cada una no conoce a ninguna de las otras dos.
En una fiesta hay 20 personas y cada una conoce a exactamente otras 9 personas de la fiesta. Determina el número de grupos simétricos de tres personas que hay en la fiesta.

Problema 20. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones en los números reales positivos

$$\frac{1}{xy}=\frac{x}{z}+1,\quad \frac{1}{yz}=\frac{y}{x}+1,\quad \frac{1}{zx}=\frac{z}{y}+1.$$

Soluciones a los problemas de práctica

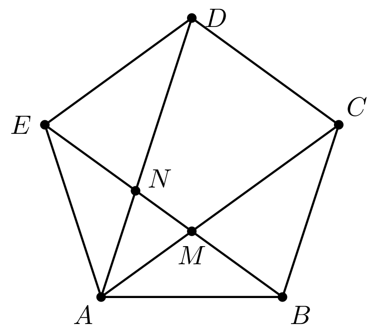
En esta sección podrás encontrar las soluciones de los 20 problemas de la sección anterior. Sin embargo, no te recomendamos consultarla antes de tener tu propia respuesta o por lo menos no sin haberle dedicado bastante tiempo a cada problema. Ten en cuenta que la clave para mejorar tus capacidades está en la perseverancia y el esfuerzo.

Cabe aclarar que las soluciones que aquí se presentan no son necesariamente las únicas o las mejores, tan sólo son ejemplos que muestran el tipo de razonamiento que busca estimular la olimpiada. En matemáticas, cada problema puede tener tantas soluciones correctas como ideas originales se desarrollen con creatividad y lógica. Si tú encontraste una solución diferente de las que aquí se presentan y no estás seguro de su validez o simplemente quieres compartirla con nosotros, te invitamos para que nos escribas a `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Observemos que $1 = a + b = a^{a+b} + b^{a+b} = a^a a^b + b^a b^b$. Luego, $1 - a^a b^b - a^b b^a = (a^a a^b + b^a b^b) - a^a b^b - a^b b^a = (a^a - b^a)(a^b - b^b)$.
Si $a \leq b$, entonces $a^a \leq b^a$ y $a^b \leq b^b$. Si $a \geq b$, entonces $a^a \geq b^a$ y $a^b \geq b^b$. En cualquier caso, se sigue que el producto $(a^a - b^a)(a^b - b^b)$ es no negativo para todos los números positivos a y b. Por lo tanto, $a^a b^b + a^b b^a \leq 1$.

Solución del problema 2. Supongamos que $1+np = k^2$ para algún entero k. Entonces $np = (k+1)(k-1)$. Como p es primo, o bien $p \mid (k-1)$ o $p \mid (k+1)$. En el primer caso, sea $sp = k - 1$ para algún entero s. Entonces $np = (k-1)(k+1) = sp(sp+2)$ y de aquí $n = s(sp+2) = s^2p+2s$. Por lo tanto, $n+1 = s^2p+2s+1 = (p-1)s^2+(s+1)^2$ el cual es una suma de p cuadrados. De manera similar, en el segundo caso tenemos que $tp = k + 1$ para algún entero t y $n + 1 = (p-1)t^2 + (t-1)^2$.

Solución del problema 3. Los triángulos ABC y ABE tienen la base común AB y como tienen la misma área, tienen la misma áltura correspondiente a AB, por lo que las rectas AB y EC son paralelas. De la misma manera, tenemos que $BC \,||\, AD$, $CD \,||\, EB$, $ED \,||\, AC$ y $EA \,||\, DB$.



Como AD y BC son paralelas, por el teorema de Thales, tenemos que $\frac{BM}{MN} = \frac{CM}{MA}$. Además, como DC y EB, por el mismo teorema, tenemos que $\frac{CM}{MA} = \frac{DN}{NA}$. Finalmente, como ED y AC son paralelas, tenemos que $\frac{DN}{NA} = \frac{EN}{NM}$, por lo que tenemos que $\frac{BM}{MN} = \frac{EN}{NM}$, de donde $EN = MB$, como queríamos demostrar.

Solución del problema 4. El sistema es equivalente al sistema

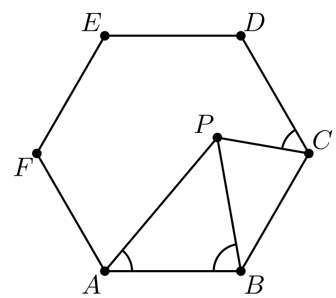
$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \cdots + (x_{2014} - 1) = 0, \quad (1)$$
$$x_1^3(x_1 - 1) + \cdots + x_{2014}^3(x_{2014} - 1) = 0. \quad (2)$$

Restando (1) de (2) obtenemos

$$(x_1 - 1)^2(x_1^2 + x_1 + 1) + \cdots + (x_{2014} - 1)^2(x_{2014}^2 + x_{2014} + 1) = 0.$$

Como $x^2 + x + 1 > 0$ (pues el polinomio $x^2 + x + 1$ no tiene soluciones reales) y $(x-1)^2 \geq 0$, para que se cumpla la igualdad anterior, debemos tener que $x_i - 1 = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, 2014$. Finalmente, es fácil ver que $x_i = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, 2014$ es solución del sistema original.

Solución del problema 5. Como cada ángulo interno del hexágono mide $120°$, tenemos que $\angle PCB = 120° - \angle DCP = 120° - 50° = 70°$. Luego, $\angle CPA = 360° - \angle PCB - \angle BAP - \angle ABC = 360° - 120° - 50° - 70° = 120°$. Por lo tanto, el punto P está sobre una circunferencia con centro en B y radio BO, donde O es el centro del hexágono. De aquí, $AB = PB$ y $\angle ABP = 180° - \angle PAB - \angle APB = 80°$.



Solución del problema 6. Lo que queremos es ver si la ecuación $x^2 + (x+1)^2 = y^4 + (y+1)^4$ tiene soluciones en los enteros positivos. Desarrollando ambos lados llegamos a $2x^2 + 2x + 1 = 2y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1$. Eliminando el 1, dividiendo entre 2 y sumando 1 a cada lado llegamos a $x^2 + x + 1 = y^4 + 2y^3 + 3y^2 + 2y + 1$. Por último, factorizando el lado derecho llegamos a

$$x^2 + x + 1 = (y^2 + y + 1)^2.$$

Luego, $x^2 + x + 1$ tendría que ser un cuadrado perfecto, pero como $x > 0$, se tiene que

$$x^2 < x^2 + x + 1 < x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2,$$

por lo que $x^2 + x + 1$ siempre está entre dos cuadrados perfectos consecutivos, de donde no puede ser cuadrado y la ecuación no tiene soluciones en los enteros positivos.

Solución del problema 7. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ los enteros. Sabemos que el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_{11}\}$ tiene $2^{11} - 1 = 2047$ subconjuntos no vacíos. Si uno de ellos cumple que la suma de sus elementos es divisible entre 2014, acabamos. De otro modo, como $2047 > 2014 + 1$, por el principio de las casillas, debe haber dos, digamos $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ y $\{c_1, c_2, \ldots, c_l\}$, tales que $b_1 + b_2 + \cdots + b_k$ y $c_1 + c_2 + \cdots + c_l$ dejan el mismo residuo al ser divididos entre 2014. Luego, 2014 divide a

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_k - c_1 - c_2 - \cdots - c_l$$

y como este número es combinación de sumas y restas de los 11 números originales, acabamos.

Solución del problema 8. Lo demostraremos por inducción en n. Si $n = 3$, tenemos que $(2n)! = 6! = 720$ y $n^{2n} = 3^6 = 729$. Luego, es claro que $720 < 729$. Supongamos que la desigualdad se cumple para un cierto $n \geq 3$. Para demostrar que se cumple para $n + 1$, basta demostrar la desigualdad

$$(2n+1)(2n+2) < \frac{(n+1)^{2n}}{n^{2n}}(n+1)^2.$$

Como $(2n+1)(2n+2) < (2n+2)^2 = 4(n+1)^2$, basta demostrar a su vez que $\frac{(n+1)^{2n}}{n^{2n}} > 4$. Pero esta desigualdad es equivalente a la desigualdad $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$.

Aplicando el teorema del binomio tenemos que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i} = 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i} = 2+\sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}.$$

Como $\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i} > 0$ si $n \geq 2$, tenemos que $(1+\frac{1}{n})^n > 2$, como se quería.

Solución alternativa. El caso $n = 3$ es como en la solución anterior. Supongamos que $n \geq 4$. Dividamos los números $2, 3, \ldots, 2n-2$ en parejas de la forma $(k, 2n-k)$ con $2 \leq k \leq n-1$, dejando sólo a n. Para cada pareja tenemos que

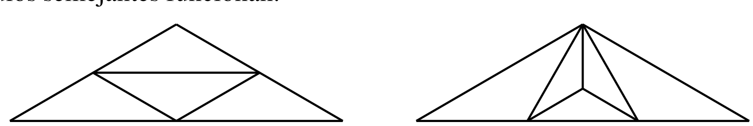
$$k(2n-k) = (n-(n-k))(n+(n-k)) = n^2-(n-k)^2 < n^2.$$

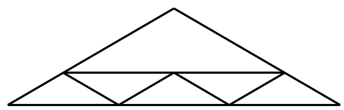
Luego, $2 \cdot 3 \cdots (2n-2) < (n^2)^{n-2} \cdot n = n^{2n-3}$ y por lo tanto

$$(2n)! < n^{2n-3}(2n-1)(2n) < n^{2n-3}(2n)^2 = 4n^{2n-1} \leq n^{2n}.$$

Solución del problema 9. Notemos en primer lugar que los números $1, 2, \ldots, 12$ son todos lindos. Luego, al menos hay 12 números lindos consecutivos. Notemos que si n termina en 9, entonces n y $n+4$ no pueden ser ambos lindos, pues en caso contrario n sería divisible por 9 y $n+4$ sería divisible por 3 (pues termina en 3), de modo que n y $n+4$ serían divisibles por 3, lo que implica que también lo sería su diferencia $(n+4)-n = 4$, lo que es una contradicción.
Ahora consideramos un bloque B de al menos 12 números lindos consecutivos. Uno de ellos, n, termina en 9. El caso $n = 9$ corresponde al bloque $1, 2, \ldots, 12$ mencionado al comienzo, así que sea $n \geq 19$. Por la observación del párrafo anterior, el último número de B es a lo más $n+3$. Además, el primer número de B es por lo menos $n-9$. Si no, B contendría a $n-10$; pero $n-10$ termina en 9, luego $(n-10)+4 = n-6$ no es lindo, de nuevo por la observación. Por otra parte, $n-6$ pertenece a B, lo cual es imposible. En resumen, B está contenido en el intervalo $[n-9, n+3]$, de modo que contiene a lo más $(n+3)-(n-10) = 13$ números.
Ahora construimos un ejemplo de 13 números consecutivos lindos. Sea M el mínimo común múltiplo de $1, 2, \ldots, 9$ (el valor numérico de M es irrelevante). Tomamos un múltiplo N de M que tenga sólo dígitos 1 y 0 (tal múltiplo existe para cada entero positivo). Entonces, los 13 números consecutivos $100N, 100N+1, 100N+2, \ldots, 100N+12$ son todos lindos.

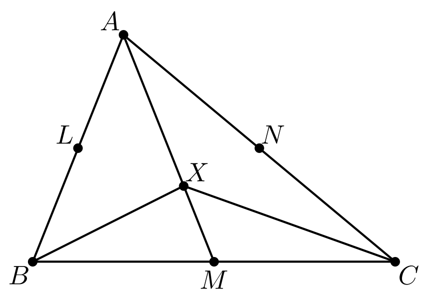
Solución del problema 10. Veamos que para $n = 4, 5, 6$ las siguientes particiones de triángulos semejantes funcionan.





Entonces, por inducción, para cualquier $n \geq 6$ se puede partir alguno de los triángulos en cuatro triángulos semejantes, lo cual agrega tres triángulos semejantes más a la partición.

Solución del problema 11. Sea X un punto dentro del triángulo ABC que satisface $(BXC) = (CXA) = (AXB)$ y sean M, N, L los puntos medios de los lados BC, CA y AB, respectivamente.



Por ser M punto medio de BC se cumple que $(BXM) = (CMX)$ (comparten la altura desde X y tiene bases de la misma longitud). Luego,

$$(AXB) + (BXM) = (CAX) + (CMX) = \frac{(ABC)}{2}.$$

Por otro lado también se tiene que $(AMB) = (ACM) = \frac{1}{2}(ABC)$. Si X no estuviera sobre el segmento AM, alguna de las regiones $AXMB$ o $ACMX$ serían menor y mayor que la mitad del área del triángulo ABC, lo que es una contradicción. Por lo tanto, X está sobre AM. De manera simétrica X esta sobre BN y CL, de modo que X es el gravicentro del triángulo ABC.

Solución del problema 12. Si $2 \mid pq$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p = 2$, y entonces $q \mid 5^q + 25$. Por el pequeño teorema de Fermat tenemos que $q \mid 5^q - 5$ y en consecuencia q divide a $(5^q + 25) - (5^q - 5) = 30$. Luego, las posibles parejas (p, q) son $(2, 2), (2, 3)$ y $(2, 5)$. Es fácil ver que de estas sólo cumplen $(2, 3)$ y $(2, 5)$.
Ahora, si $5 \mid pq$, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que $p = 5$ y entonces $5q \mid 5^q + 5^5$. Claramente $q = 2$ cumple. Supongamos entonces que q es impar. Si $q \neq 5$, entonces por el pequeño teorema de Fermat tenemos que $q \mid 5^{q-1} - 1$ y en consecuencia q divide a $(5^{q-1} + 5^4) - (5^{q-1} - 1) = 5^4 + 1 = 626$. Como q es impar, se sigue que q divide a $\frac{626}{2} = 313$ y como 313 es primo, tenemos que $q = 313$. Finalmente, es claro que $q = 5$ cumple. Por lo tanto, en este caso las soluciones son $(p, q) = (5, 5), (5, 2)$ y $(5, 313)$.
Supongamos que $2 \nmid pq$ y $5 \nmid pq$. De aquí, $5 \nmid p$ y $5 \nmid q$ lo que implica que 5 es primo

relativo con pq. Como $pq \mid 5(5^{p-1}+5^{q-1})$ se sigue que $pq \mid 5^{p-1}+5^{q-1}$ y por lo tanto $5^{p-1}+5^{q-1} \equiv 0 \pmod p$. Además, por el pequeño teorema de Fermat tenemos que $5^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. De estas dos congruencias se sigue que $5^{q-1} \equiv -1 \pmod p$.
Escribamos $p-1 = 2^k(2r-1)$ y $q-1 = 2^l(2s-1)$ donde k,l,r,s son enteros positivos.
Si $k \leq l$ tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= 1^{2^{l-k}(2s-1)} \equiv (5^{p-1})^{2^{l-k}(2s-1)} \\ &= 5^{2^l(2r-1)(2s-1)} = (5^{q-1})^{2r-1} \equiv (-1)^{2r-1} \\ &\equiv -1 \pmod p, \end{aligned}$$

lo que contradice que $p \neq 2$. De manera análoga, si $l \leq k$ obtenemos una contradicción.
Por lo tanto, las parejas de primos (p,q) que satisfacen el problema son $(2,3)$, $(3,2)$, $(2,5)$, $(5,2)$, $(5,5)$, $(5,313)$ y $(313,5)$.

Solución del problema 13. Veamos que como cada jugador i se enfrentó contra los otros $n-1$ tenistas, se cumple que $P_i + G_i = n-1$, el número de enfrentamientos disputados. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} P_i^2 - G_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(P_i+G_i)(P_i-G_i) &= \sum_{i=1}^{n}(n-1)(P_i-G_i) \\ &= (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{i=1}^{n} G_i\right). \end{aligned}$$

Sin embargo, $\sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{i=1}^{n} G_i = 0$ puesto que $\sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} G_i$ la cantidad de partidos ganados en toda la competencia es igual a la cantidad de partidos perdidos. Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n}(P_i^2 - G_i^2) = 0.$$

Solución del problema 14. Los primeros números son $p_1 = 2$ y $p_2 = 3$. Como estos están en el producto $p_1p_2\cdots p_{n-1}$ para $n \geq 3$ y $p_1p_2\cdots p_{n-1}+1$ es primo relativo con $p_1p_2\cdots p_{n-1}$, ningún número de la forma $p_1p_2\cdots p_{n-1}+1$ es divisible entre 2 o 3. De esta forma, si tenemos que $p_{i+1} = 5$, entonces $p_1p_2\cdots p_i + 1$ tiene mayor divisor primo 5 y no es divisible entre 2 ni entre 3, por tanto es una potencia de 5. Expresándolo de esta forma y restando el 1 obtenemos

$$p_1p_2\cdots p_i = 5^j - 1 = (5-1)(5^{j-1}+5^{j-2}+\cdots+5+1) = 4r$$

para algun entero positivo r. Pero esta igualdad es imposible puesto que el lado izquierdo solo es múltiplo de 2, mientras que el lado derecho es múltiplo de 4. Por lo tanto, 5 no aparece en la sucesión.

Solución del problema 15. Como en cada paso le sumamos 1 a uno y le restamos 1 a otro, nunca modificamos la suma de los tres números. Si al final queremos que los números lleguen a ser el mismo entero, digamos x, esa suma será $3x$, y para que sea posible, es necesario que $a+b+c=3x$ para cierto entero x, por lo que $a+b+c$ tiene que ser divisible entre 3.
Veamos ahora que, si $a+b+c$ es múltiplo de 3, sí se puede lograr que los tres números sean iguales. Definimos x como $\frac{a+b+c}{3}$. Queremos que los números lleguen a ser x. Primero, hacemos que a sea igual a x. Hay tres casos:

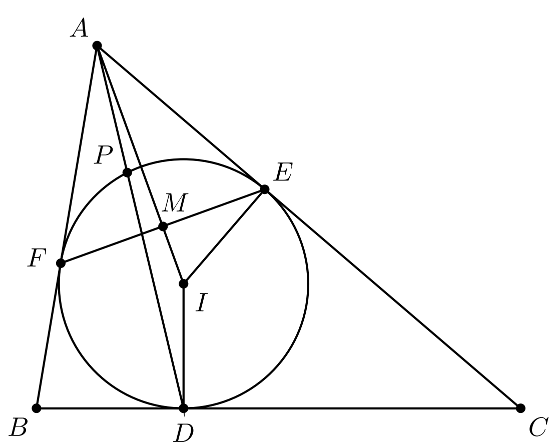
- Si $a=x$, no hay nada que hacer.
- Si $a>x$, hacemos $a-x$ veces la siguiente operación: restar 1 a a y sumar 1 a b.
- Si $a<x$, hacemos $x-a$ veces la siguiente operación: sumar 1 a a y restar 1 a b.

Ahora tenemos que a ya es igual a x. Como la suma siempre es $3x$, se tiene que $b+c=2x$ (los actuales valores de b y c). Ahora consideramos tres casos:

- Si $b=x$, se tiene que $c=x$ y terminamos.
- Si $b>x$, se tiene que $c<x$ con $b-x=x-c$, luego, basta hacer $b-x$ veces la operación: restar 1 a b y sumar 1 a c.
- Si $b<x$, se tiene que $x<c$, con $c-x=x-b$, luego, basta hacer $c-x$ veces la operación: sumar 1 a b y restar 1 a c.

Con esto se demuestra que es suficiente la condición de que $a+b+c$ sea divisible entre 3.

Solución del problema 16. Como $AF=AE$, por ser tangentes, y $FI=EI$, por ser radios, tenemos que el cuadrilátero $AFIE$ es simétrico con respecto a la diagonal AI. Luego, M está en esa diagonal.



Como ME es altura del triángulo AIE, se tiene que los triángulos AME y AEI son semejantes, de donde $\frac{AE}{AM} = \frac{AI}{AE}$, esto es, $AE^2 = AM \cdot AI$. Por otro lado, por la potencia de A al incírculo, se tiene que $AE^2 = AP \cdot AD$ y podemos concluir que $AM \cdot AI = AP \cdot AD$. Nuevamente, por potencia, se tiene que el cuadrilátero $PMID$ es cíclico.

Solución del problema 17. Sea P un conjunto de n números primos distintos p_1, $p_2, \ldots, p_n$ y sea M un conjunto de $n+1$ números naturales. Sea S cualquier subconjunto no vacío de M, y escribamos el producto de los números de S en la forma $x = y^2 z$ donde y^2 es el mayor cuadrado que divide a x. Entonces z tiene la forma $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$ donde el vector $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tiene todas sus entradas iguales a 0 o 1. Tenemos 2^n posibles vectores. Sin embargo, hay $2^{n+1} - 1$ subconjuntos no vacíos de M y en consecuencia la misma cantidad de posibles productos x. Como $2^{n+1} - 1 > 2^n$, por el principio de las casillas hay dos productos, digamos $x = y^2 z$ y $u = v^2 w$ que tienen el mismo vector. Si ambos x y u tienen factores de M en común, dividimos por el producto de estos factores para obtener productos de subconjuntos ajenos A y B de M. Estos dos productos tendrán el mismo vector, de modo que deben ser de la forma $r^2 t$ y $s^2 t$, donde t es un producto de primos distintos de P. El producto de los números en $A \cup B$ es $r^2 s^2 t^2$, que es un cuadrado como se quería.

Solución del problema 18. Aplicando la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica a los números $\frac{(y+z-1)^2}{x}$ y x tenemos que

$$\frac{(y+z-1)^2}{x} + x \geq 2|y+z-1|.$$

Si $y+z-1 \geq 0$, se tiene que $|y+z-1| = y+z-1$. Si $y+z-1 < 0$, se tiene que $|y+z-1| > 0 > y+z-1$. De cualquiera manera, podemos concluir que

$$\frac{(y+z-1)^2}{x} + x \geq 2(y+z-1).$$

Análogamente obtenemos que $\frac{(z+x-1)^2}{y} + y \geq 2(z+x-1)$ y $\frac{(x+y-1)^2}{z} + z \geq 2(x+y-1)$. Sumando las tres desigualdades obtenemos que

$$\frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} + \frac{(x+y-1)^2}{z} \geq 3(x+y+z) - 6.$$

Si demostramos que $3(x+y+z) - 6 \geq x+y+z$, habremos acabado. Esta última desigualdad es equivalente a $x+y+z \geq 3$, lo cual es cierto, pues por la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica aplicada a los números x, y y z, se tiene que

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} = 1,$$

que era justo lo que faltaba probar.

Solución del problema 19. El número total de grupos de 3 personas en la fiesta es $\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140$. Sea a la cantidad de grupos simétricos y b la cantidad de

grupos no simétricos, entonces $a+b=1140$.
Fijamos una persona A y hacemos la lista de los grupos A, B, C (A participa en todos los grupos de la lista) tales que o bien A conoce a B y a C, o A no conoce a ninguno de los otros dos. Para el caso en que A conoce a B y a C, el par B, C se puede elegir de $\binom{9}{2}=\frac{9(8)}{2}=36$ maneras, pues A posee exactamente 9 conocidos. Para el caso en el que A no conoce ni a B ni a C, el par B, C se puede elegir de $\binom{10}{2}=\frac{10(9)}{2}=45$ maneras, pues A no conoce a exactamente $20-1-9=10$ personas en la fiesta. En total la lista de los grupos de tres personas que se ha hecho contiene $36+45=81$ grupos. Si se hace lo mismo para cada persona de la fiesta, el resultado es $20\cdot 81=1620$ grupos de 3 personas. Entre estos 1620 grupos de 3 personas, figura cada uno de los 1140 posibles grupos de 3 personas. Notemos que cada grupo simétrico figura tres veces: si todos los integrantes del grupo A, B, C conocen a los otros dos, entonces el grupo A, B, C figura en la lista de cada uno de sus integrantes, y lo mismo ocurre con un grupo en el que nadie conoce a nadie. Por otra parte, un grupo que no es simétrico figura exactamente una vez. Se deduce que $3a+b=1620$.
Dado que $a+b=1140$ y $3a+b=1620$, obtenemos $2a=(3a+b)-(a+b)=1620-1140=480$, de donde $a=240$. Por lo tanto, en la fiesta hay 240 grupos simétricos de tres personas.

Solución del problema 20. El sistema se reduce a

$$z=x^2y+xyz,\ \ x=y^2z+xyz,\ \ y=z^2x+xyz.$$

Luego,

$$z-x^2y=x-y^2z=y-z^2x.$$

Si $x=y$, entonces $y^2z=z^2x$ y por lo tanto $x^2z=z^2x$. De aquí, $xz(x-z)=0$ y como x,z son positivos, obtenemos que $x=z$. Por lo tanto, $x=y=z$. De manera análoga, $x=z$ implica que $x=z=y$. Luego, si cualesquiera dos de x,y,z son iguales, entonces todos son iguales. Supongamos que no hay dos de x,y,z iguales. Podemos suponer que x es el mayor de los tres de manera que $x>y$ y $x>z$. Tenemos dos posibilidades: $y>z$ o $z>y$.
Supongamos que $x>y>z$. De las relaciones $z-x^2y=x-y^2z=y-z^2x$ obtenemos que

$$y^2z>z^2x>x^2y.$$

De aquí, $y^2z>z^2x$ y $z^2x>x^2y$ implican que $y^2>zx$ y $z^2>xy$. Así,

$$(y^2)(z^2)>(zx)(xy).$$

Luego, $yz>x^2$. Esto es una contradicción pues $z<y<x\Rightarrow yz<y^2<x^2$. De manera análoga obtenemos una contradicción si $x>z>y$. La única posibilidad es entonces $x=y=z$ y en este caso obtenemos la ecuación $x^2=\frac{1}{2}$. Como $x>0$, obtenemos $x=\frac{1}{\sqrt{2}}=y=z$.

Problemas de Entrenamiento

Esta es la sección interactiva de la revista y su construcción sólo es posible con la participación entusiata de todos sus lectores. Los siguientes 10 problemas que presentamos carecen de solución pues están esperando a que tú los resuelvas. Acepta el reto y resuelve uno o todos los *Problemas de Entrenamiento* y una vez que lo logres, envíanos tus soluciones cuanto antes para que puedan salir publicadas con tu nombre impreso.

Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo.

Problemas de Entrenamiento.
Año 2014 No. 3.

Problema 1. Sean a y b dos enteros tales que $a > b > 0$. Si $ab - 1$ y $a + b$ son primos relativos, y también $ab + 1$ y $a - b$, demuestra que $(ab + 1)^2 + (a - b)^2$ no es un cuadrado.

Problema 2. Sea ABC un triángulo con $AB > AC$. Sobre la tangente por A al circuncírculo de ABC se toma un punto D tal que $DA = AC$ y D está en el mismo semiplano definido por AB. Además, sobre el segmento AB sea E un punto tal que $AE = AC$. Demuestra que DE pasa por el incentro del triángulo ABC.

Problema 3. Sean n un número natural, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números no negativos y $0 < b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ tales que para cualquier $k \leq n$ se satisface $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_k$. Demuestra que

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n} \leq \sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \cdots + \sqrt{b_n}.$$

Problema 4. Sea $n \geq 3$ un entero y sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales tales que $\min\limits_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| = 1$. Determina el valor mínimo de la suma

$$|a_1|^3 + |a_2|^3 + \cdots + |a_n|^3.$$

Problema 5. Determina todos los enteros positivos x, y tales que $\dfrac{xy^3}{x+y}$ sea el cubo de un número primo.

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo y sean D, E y F puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente, tales que $\angle AFE = \angle BFD$, $\angle BDF = \angle CDE$ y $\angle CED = \angle AEF$. Demuestra que D, E y F son los pies de las alturas del triángulo ABC.

Problema 7. En una aldea hay al menos un habitante y hay algunas asociaciones, de manera que cada habitante pertenece al menos a k asociaciones. Además, cada dos asociaciones pueden tener a lo más un miembro en común. Demuestra que existen k asociaciones con el mismo número de miembros.

Problema 8. Determina todos los enteros positivos que se pueden escribir en la forma

$$\frac{(a+b+1)^2}{ab}$$

para algunos enteros positivos a y b.

Problema 9. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo con $a \geq b \geq c$. Demuestra que

$$\sqrt{a(a+b-\sqrt{ab})} + \sqrt{b(a+c-\sqrt{ac})} + \sqrt{c(b+c-\sqrt{bc})} \geq a+b+c.$$

Problema 10. Considera un tablero de 10×10 casillas. Quieres colocar n monedas en las casillas del tablero de manera que no existan 4 monedas formando un rectángulo de lados paralelos a los lados del tablero. Determina el mayor valor de n para el cual es posible hacer esta construcción.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2013 No. 4.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 4, año 2013. Agradecemos a Gustavo Chinney Herrera por su solución al Problema 9 y aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus trabajos para que puedan salir publicados en los números posteriores de la revista. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 1, año 2014, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Demuestra que para cualesquiera números reales positivos x, y, z, se cumple la desigualdad $\dfrac{x+1}{y+1}+\dfrac{y+1}{z+1}+\dfrac{z+1}{x+1}\leq\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}$.

Solución. Observemos que si a y b son números reales positivos, entonces $\frac{a+1}{b+1}-\frac{a}{b}=\frac{b-a}{b(b+1)}$. Luego, la desigualdad a demostrar es equivalente a la desigualdad

$$\frac{y-x}{y(y+1)}+\frac{z-y}{z(z+1)}+\frac{x-z}{x(x+1)}\leq 0.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x\geq y$ y $x\geq z$. Consideremos dos casos.

Caso 1. $y\geq z$. Tenemos que

$$\frac{x-y}{x(x+1)}\leq\frac{x-y}{y(y+1)},\quad \frac{y-z}{x(x+1)}\leq\frac{y-z}{z(z+1)}.$$

Sumando estas dos desigualdades, obtenemos

$$\frac{x-z}{x(x+1)}\leq-\frac{y-x}{y(y+1)}-\frac{z-y}{z(z+1)},$$

de donde se sigue el resultado.

Caso 2. $y<z$. Tenemos que

$$\frac{z-y}{z(z+1)}\leq\frac{z-y}{y(y+1)},\quad \frac{x-z}{x(x+1)}\leq\frac{x-z}{y(y+1)}.$$

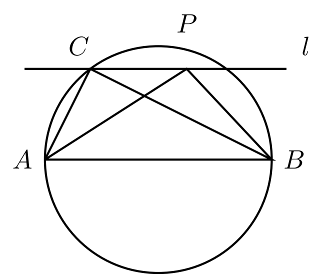
Sumando estas dos desigualdades, obtenemos

$$\frac{z-y}{z(z+1)}+\frac{x-z}{x(x+1)}\leq-\frac{y-x}{y(y+1)},$$

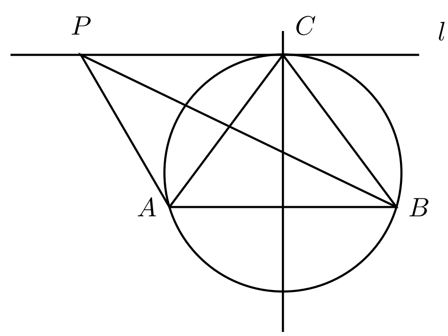
de donde se sigue el resultado.

Problema 2. Encuentra una construcción con regla y compás, de manera que dado un segmento cualquiera AB y una recta l paralela a él, permita localizar un punto C sobre l tal que el producto $AC\cdot BC$ sea mínimo.

Solución. Trazamos la mediatriz del segmento AB y llamamos O al punto medio de AB. Ahora, haciendo centro en O trazamos la circunferencia con diámetro AB. Si esta circunferencia corta a l llamamos C a cualquiera de sus puntos de intersección. Entonces $\angle BCA = 90°$ de manera que el área del triángulo ABC es $\frac{1}{2}AC \cdot BC$. Observamos que si tomamos cualquier otro punto P sobre la recta l, el área del triángulo ABP es $\frac{1}{2}AP \cdot BP \cdot \operatorname{sen}(\angle APB) \leq \frac{1}{2}AP \cdot BP$. Dado que l es paralela con AB, entonces las áreas de los triángulos ABC y ABP son iguales, de aquí se sigue que $AC \cdot BC \leq AP \cdot BP$ de donde C cumple con la condición de minimalidad requerida.



Ahora, si la circunferencia no corta a l, entonces tomamos C en la intersección de l con la mediatriz de AB. Si trazamos la circunferencia circunscrita del triángulo ABC, es claro que dicha circunferencia es tangente a l. Entonces para cualquier otro punto P sobre l, distinto de C, tenemos que $\angle ACB \leq \angle APB$. Dado que las áreas de los triángulos ABC y ABP son iguales, nuevamente es claro que $AC \cdot BC \leq AP \cdot BP$.



Problema 3. En un incio se escriben en el pizarrón el 1 y los números positivos x y y. En cada paso está permitido tomar dos números (no necesariamente distintos) del pizarrón y entonces escribir su suma o su diferencia en el pizarrón. También es posible escoger del pizarrón cualquier número distinto de cero y entonces escribir su recíproco en el pizarrón.

1. ¿Es posible obtener al número x^2 al término de una sucesión finita de pasos?

2. ¿Es posible obtener al número $x \cdot y$ al término de una sucesión finita de pasos?

Solución. Demostraremos que en ambos casos la respuesta es afirmativa.

1. Si $x = 1$, entonces $x^2 = 1$ y acabamos. Ahora supongamos que $x \neq 1$. En los primeros dos pasos escribimos a los números $x + 1$ y $x - 1$. Ahora, en los siguientes dos pasos podemos escribir a sus recíprocos $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x-1}$, y después a su diferencia $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$. Ahora, tomamos el recíproco $\frac{x^2-1}{2}$ y luego sumamos ese número consigo mismo, obteniendo $x^2 - 1$. Finalmente, sumando 1 obtenemos x^2.

2. Comenzamos escribiendo al número $x + y$, y por el procedimiento descrito en (a) escribimos a los números $(x + y)^2$, x^2 y y^2. Ahora, como $2xy = (x + y)^2 - x^2 - y^2$, podemos escribir al número $2xy$ y luego a su recíproco $\frac{1}{2xy}$. Finalmente, sumando este número consigo mismo obtenemos $\frac{1}{2xy} + \frac{1}{2xy} = \frac{1}{xy}$, de donde, tomando el recíproco, obtenemos el número buscado.

Problema 4. Encuentra todos los enteros positivos de dos dígitos $n = 10a + b$ tales que para cualquier entero x la diferencia $x^a - x^b$ es divisible por n.

Solución. Claramente, $n \mid x^a - x^b$ para todos los enteros x si $a = b$. Mostraremos que además de los números $11, 22, \ldots, 99$, hay exactamente tres números n más. Estos son: 15, 28 y 48.
Supongamos que $a \neq b$ y empecemos eliminando algunos posibles valores para n.

1. Si a es par y b es impar, tenemos que si $x = \pm 2$ entonces $n \mid 2^a - 2^b$ y $n \mid 2^a + 2^b$. Luego, $n \mid 2^{a+1}$, que es imposible dado que los únicos divisores de 2^{a+1} son potencias de 2 mientras $n > 1$ es impar.

2. Si a es impar y b es par, tenemos que si $x = \pm 2$ implica también que $n \mid 2^{a+1}$. Luego, n debe ser una potencia de 2. Como a es impar tenemos que $n = 16$ o 32. En cualquier caso, $16 \nmid 2 - 2^6$ y $32 \nmid 2^3 - 2^2$, por lo que no hay soluciones en este caso.

3. Si $b = 0$, entonces n es par y n tendría que dividir a $2^a - 1$, que claramente es imposible.

Utilizando 1, 2 y 3, las posibilidades para n se limitan a los 32 siguientes enteros:

$$13, 15, 17, 19, 24, 26, 28, 31, 35, 37, 39, 42, 46, 48, 51, 53, 57, 59, 62, 64, 68, 71, 73, 75,$$

$$79, 82, 84, 86, 91, 93, 95, 97.$$

Como $n \mid x^a - x^b$ si y sólo si $n \mid x^b - x^a$ podemos suponer que $a > b$ al comprobar si n satisface la propiedad dada. Tenemos que,

$2^3 - 2 = 6$	elimina	13	y	31;
$2^4 - 2^2 = 12$	elimina	24	y	42;
$2^5 - 2 = 30$	elimina	51	pero no al 15;	
$2^5 - 2^3 = 24$	elimina	35	y	53;
$2^6 - 2^2 = 60$	elimina	26	y	62;
$2^6 - 2^4 = 48$	elimina	46	y	64;
$2^7 - 2 = 126$	elimina	17	y	71;
$2^7 - 2^3 = 120$	elimina	37	y	73;
$2^7 - 2^5 = 96$	elimina	57	y	75;
$2^8 - 2^2 = 252$	elimina	82	pero no al 28;	
$2^8 - 2^4 = 240$	elimina	84	pero no al 48;	
$2^8 - 2^6 = 192$	elimina	86	y	68;
$2^9 - 2 = 510$	elimina	19	y	91;
$2^9 - 2^3 = 504$	elimina	39	y	93;
$2^9 - 2^5 = 480$	elimina	59	y	95;
$2^9 - 2^7 = 384$	elimina	79	y	97.

Luego, los únicos valores posibles de n son 15, 28 y 48. Probemos ahora que para estos valores de n, $n \mid x^a - x^b$ para cualquier entero x.

1. Sea $n = 15$. Por el pequeño teorema de Fermat, tenemos que $x^3 \equiv x \pmod{3}$, de donde, $x^5 \equiv x^3 \equiv x \pmod{3}$. También $x^5 \equiv x \pmod{5}$. Por lo tanto, $x^5 \equiv x \pmod{15}$.

2. Sea $n = 28$. Probaremos que $x^2 \equiv x^8 \pmod{28}$. Por el pequeño teorema de Fermat, tenemos que, $x^7 \equiv x \pmod{7}$, luego $x^8 \equiv x^2 \pmod{7}$. Ahora bien, si x es par, es claro que $x^8 \equiv x^2 \pmod{4}$. Si x es impar, entonces $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$, de donde, $x^8 \equiv 1 \pmod{4}$, lo que implica que $x^8 \equiv x^2 \pmod{4}$. Por lo tanto, $x^8 \equiv x^2 \pmod{28}$.

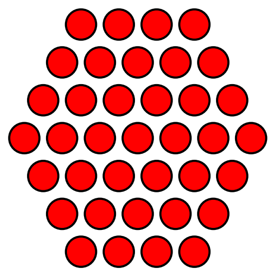
3. Sea $n = 48$. Observemos que $48 = 2^4 \times 3$, luego probaremos que $3 \mid x^8 - x^4$ y que $16 \mid x^8 - x^4$. Por el teorema pequeño de Fermat, tenemos que, $x^3 \equiv x \pmod{3}$, luego $x^4 \equiv x^2 \pmod{3}$, entonces $x^8 \equiv x^4 \pmod{3}$. Ahora bien, si x es par, entonces $16 \mid x^8 - x^4$. Si x es impar, sea $x = 2k+1$ para algún entero k, luego,

$$\begin{aligned} x^8 - x^4 &= x^4(x^2-1)(x^2+1) \\ &= (2k+1)^4(4k^2+4k)(4k^2+4k+2) \\ &= 8k(k+1)(2k^2+2k+1)(2k+1)^4, \end{aligned}$$

que es divisible por 16 dado que $k(k+1)$ es par.

Por lo tanto, $n = 10a + b$ satisface $n \mid x^a - x^b$ para todos los enteros x si y sólo si $n = 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 15, 28$ y 48.

Problema 5. Cierto número de tubos se agrupan en forma hexagonal. El número de tubos agrupados puede ser: 1, 7, 19, 37 (como se muestra en la figura), 61, $91, \ldots$. Si se continúa la sucesión, se observa que el número total de tubos es en varias ocasiones un número que termina en 69. ¿Cuál es el término número 69 de la sucesión que termina en 69?



Solución. Observemos que la sucesión $\{a_n\}$ está dada por la fórmula,

$$a_n = 1 + 6(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)) = 1 + 3n(n-1),$$

donde $n \geq 1$. Observemos que a_n termina en 69 si y sólo si $100 \mid a_n - 69$ y $a_n \geq 69$, es decir, $100 \mid 3n(n-1) - 68$ donde $n \geq 8$.
En particular, $5 \mid 3n(n-1)-68$, luego $3n(n-1) \equiv 68 \equiv 3 \pmod{5}$. Como $(3,5) = 1$, tenemos que $n(n-1) \equiv 1 \pmod{5}$, que se cumple si y sólo si $n \equiv 3 \pmod{5}$. Entonces, $n = 5k + 3$ para algún entero $k \geq 1$. Luego,

$$n(n-1) = (5k+3)(5k+2) = 25k^2 + 25k + 6,$$

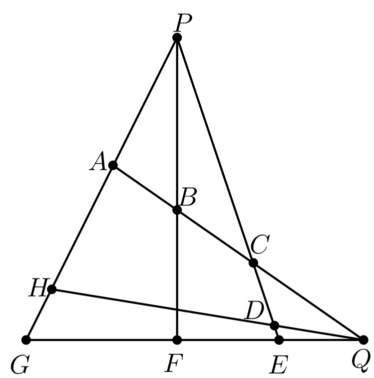
de donde tenemos que $100 \mid 75k^2 + 75k - 50$, o de manera equivalente $4 \mid 3k^2 + 3k - 2$. Luego, tenemos que, $3k(k+1) \equiv 2 \equiv 6 \pmod{4}$. Como $(3,4) = 1$, tenemos que $k(k+1) \equiv 2 \pmod{4}$, que se cumple si y sólo si $k \equiv 1, 2 \pmod{4}$. Por lo tanto, $k = 4t + 1$ o $4t + 2$, y $n = 20t + 8$ o $20t + 13$ para algún entero $t \geq 0$.
Por lo tanto, concluimos que a_n termina en 69 si y sólo si $n = 20t + 8$ o $20t + 13$ para cualquier entero $t \geq 0$. Para encontrar el término número 69, sea $t = 34$, entonces $n = 20t + 8$ y $n = 688$. Por lo tanto, $a_{688} = 1 + 3(688)(687) = 1,417,969$.

Problema 6. Encuentra todos los enteros positivos k tales que para todos los enteros positivos n los números $4n + 1$ y $kn + 1$ son primos relativos.

Solución. Por el algoritmo de Euclides, tenemos que $(4n+1, kn+1) = (4n+1, (k-4)n) = (4n+1, k-4)$, pues $(4n+1, n) = 1$. Supongamos que $k - 4 \geq 0$. Si $k - 4$ tiene algún divisor primo impar p, podemos encontrar un n tal que p divida a $4n + 1$ y el máximo común divisor sería múltiplo de p. Luego, $k - 4$ tiene que ser potencia de 2. Por otro lado, si $k - 4$ es potencia de 2, ciertamente se tiene que $(4n + 1, k - 4) = 1$ pues $4n + 1$ es impar. Luego, $k = 4 + 2^x$ para cierto entero no negativo x.
Si $k - 4 < 0$ el argumento es el mismo, tiene que ser el negativo de una potencia de 2

y obtenemos que $k = 3$ y $k = 2$. Luego, las soluciones son $k = 2, 3$ y $k = 4 + 2^x$ para cualquier entero no negativo x.

Problema 7. En la figura, F se encuentra en GE y Q en la extensión de GE. Además, A y H están en PG de manera que QA intersecta a PF en B, QA intersecta a PE en C, y QH intersecta a PE en D. Demuestra que $\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FG} \cdot \frac{GH}{HA} = 1$.



Solución. Desde el punto C, trazamos una paralela a EG que intersecte a GP en M. También del punto C trazamos CI paralela a GP con, I en GQ. Extendemos MC hasta el punto U de manera que UE es paralela a PG. Con esta construcción, $ICUE$ y $GMCI$ son paralelogramos. Denotemos por S al punto de intersección de PF y MC, por T al punto de intersección de QH y CI, y por N al punto de intersección de CQ y EU.

Como MC es paralela a GE, entonces los triángulos MPS y GPF son semejantes, de donde, $\frac{SM}{FG} = \frac{PS}{PF}$. Así mismo, como MC es paralela a GE, los triángulos SPC y FPE son semejantes, luego, $\frac{CS}{EF} = \frac{PS}{PF}$. Por lo tanto, $\frac{EF}{FG} = \frac{CS}{SM}$.

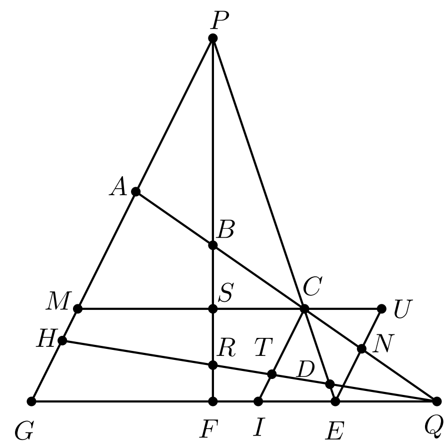
Análogamente, como CI es paralela a GA, tenemos que $\frac{HA}{GH} = \frac{TC}{IT}$.

Utilizando el teorema de Menelao en el triángulo MCA con los puntos colineales P, B y S tenemos que $\frac{CS}{SM} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{MP}{AP} = 1$, que es equivalente a $\frac{EF}{FG} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{MP}{AP} = 1$, de donde

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{EF}{FG} = \frac{AP}{MP}.$$

Ahora bien, utilizando el teorema de Menelao en el triágulo ICE con los puntos colineales Q, D y T obtenemos que $\frac{TC}{IT} \cdot \frac{DE}{CD} \cdot \frac{IQ}{EQ} = 1$, que es equivalente a $\frac{HA}{GH} \cdot \frac{DE}{CD} \cdot \frac{IQ}{EQ} = 1$, de donde

$$\frac{DE}{CD} \cdot \frac{HA}{GH} = \frac{EQ}{IQ}.$$



Como MP es paralela a UE, entonces los triángulos MPC y UEC son semejantes, de modo que con un argumento similar al anterior, tenemos que $\frac{AP}{MP} = \frac{EN}{EU} = \frac{EN}{IC}$, dado que $EU = IC$.
Finalmente, como CI es paralela a NE, entonces los triángulos ICQ y ENQ son semejantes, de donde $\frac{EQ}{IQ} = \frac{EN}{IC}$. Luego, $\frac{AP}{MP} = \frac{EQ}{IQ}$.
Considerando las igualdades anteriores, tenemos que $\frac{AB}{BC} \cdot \frac{EF}{FG} = \frac{DE}{CD} \cdot \frac{HA}{GH}$. Por lo tanto, $\frac{AB}{BC} \cdot \frac{EF}{FG} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{GH}{HA} = 1$, como se quería.

Problema 8. Sean a y b números reales positivos. Demuestra que

$$(a-b)^{2013}(a+b)^{2013}(b-a)^{2013} \geq (a^{2013} - b^{2013})(a^{2013} + b^{2013})(b^{2013} - a^{2013}).$$

Solución. Demostraremos primero que si $x \geq y > 0$, entonces $x^n - y^n \geq (x-y)^n$ para todo entero positivo n. En efecto, si $x \geq y > 0$, tenemos que $x = y + t$ con $t \geq 0$. Luego, $x^n = (y+t)^n = y^n + \cdots + t^n \geq y^n + t^n$ de donde

$$x^n - y^n \geq t^n = (x-y)^n.$$

Usaremos esta desigualdad para resolver el problema. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a \geq b$. Sea n un entero positivo impar. Por lo demostrado anteriormente, tenemos que $a^n - b^n \geq (a-b)^n$, lo cual implica que

$$(a^n - b^n)(a^n + b^n) = (a^2)^n - (b^2)^n \geq (a^2 - b^2)^n = (a-b)^n(a+b)^n.$$

Como $a \geq b > 0$, tenemos que $a^n - b^n \geq 0$ y por lo tanto

$$(a^n - b^n)(a^n + b^n)(a^n - b^n) \geq (a-b)^n(a+b)^n(a^n - b^n) \geq (a-b)^n(a+b)^n(a-b)^n.$$

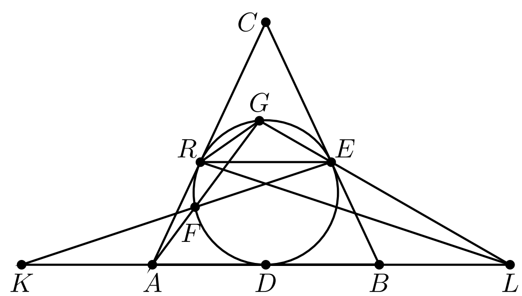
Por otra parte, tenemos que $a^n - b^n = -(b^n - a^n)$ y $(a-b)^n = -(b-a)^n$ (pues n es impar). Entonces

$$(a^n - b^n)(a^n + b^n)(-(b^n - a^n)) \geq (a-b)^n(a+b)^n(-(b-a)^n),$$

y por lo tanto $(a^n - b^n)(a^n + b^n)(b^n - a^n) \leq (a-b)^n(a+b)^n(b-a)^n$. Haciendo $n = 2013$, se tiene la desigualdad deseada.

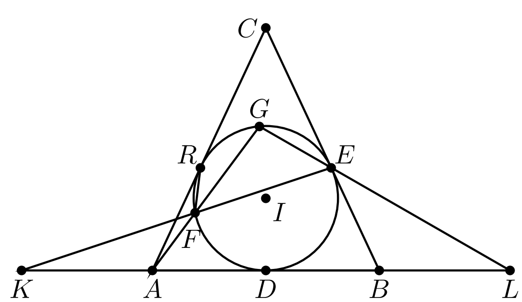
Problema 9. Sea ABC un triángulo isósceles con $AC = BC$. El incírculo de ABC intersecta a AB en D y a BC en E. Una recta por A que es distinta a la recta AE intersecta al incírculo en F y G. Sean K y L las intersecciones de AB con EF y EG. Demuestra que D es el punto medio de KL.

Solución de Gustavo Chinney Herrera. Sea R el punto de tangencia del incírculo con AC. Sean $\angle BEK = \alpha$ y $\angle REG = \beta$.



Si demostramos que LA=BK entonces habremos acabado, para ello mostraremos que los triángulos EKB y RLA son congruentes. Notemos que por ser EB tangente al incírculo, $\angle EGF$=α. Es claro que RE es paralela a AB, por ser ABC un triángulo isósceles, entonces $\angle KLE$=β. Además, $\angle CRG$=β por ser RC tangente al incírculo, luego el cuadrilátero $RALG$ es cíclico, entonces $\angle LRA$=α. Sabemos que los ángulos KBE y LAR son iguales y también lo son los ángulos BEK y ARL, entonces los triángulos EKB y RLA son semejantes, pero RA=EB, luego son congruentes,como se quería demostrar.

Solución alternativa. Como D es el punto medio de AB, basta demostrar que $KA = BL$. Sea R como en la solución anterior y sea I el incentro del triángulo ABC.



Como I es el centro del incírculo, tenemos que $\angle EFR = \frac{1}{2}\angle EIR = \angle CIR$ (pues por simetría se tiene que CI biseca al ángulo $\angle EIR$). Por otro lado, $\angle CIR = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACB) = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle CBA) = \angle BAC$, pues el triángulo es isósceles. Por lo tanto, $\angle EFR = \angle BAC$ y de aquí se sigue que $\angle RFK = \angle RAK$ (por ser ángulos suplementarios) y tenemos que el cuadrilátero $AFRK$ es cíclico.
Luego, $\angle KRA = \angle KFA = \angle EFG = \angle CEG = \angle BEL$ (pues BC es tangente al incírculo). Como además $\angle RAK = \angle LBE$ los triángulos LBE y KAR son semejantes y como $AR = BE$ concluimos que de hecho son congruentes y $KA = BL$, como queríamos demostrar.

Problema 10. Se tiene un tablero de ajedrez de $n \times n$. ¿De cuántas maneras podemos colocar $2n - 2$ piedras en algunos de los cuadrados de tal manera que no haya dos de ellas en la misma diagonal del tablero de ajedrez? (dos piedras están en la misma diagonal del tablero de ajedrez si el segmento que forman es paralelo a una de las dos diagonales del tablero).

Solución. Consideremos cada casilla del tablero como una pareja (x, y), donde $(1, 1)$ es la esquina inferior izquierda y (n, n) la esquina superior derecha. Consideremos las siguientes diagonales

$$\begin{gathered}
(1,1)(2,2)\cdots(n,n)\\
(2,1)(1,2)\\
(3,1)(2,2)(1,3)\\
\vdots\\
(n-1,1)(n-2,2)\cdots(2,n-2)(1,n-1)\\
(n,1)(n-1,2)\cdots(2,n-1)(1,n)\\
(n,2)(n-1,3)\cdots(3,n-1)(2,n)\\
\vdots\\
(n,n-2)(n-1,n-1)(n-2,n)\\
(n,n-1)(n-1,n)
\end{gathered}$$

Estas $2n - 2$ diagonales completan todo el tablero, por lo que cada una debe contener una piedra y no puede haber piedras en la intersección de dos de ellas.
En la diagonal $(1, 1)(2, 2)(3, 3)\cdots(n, n)$ hay dos posibilidades para la piedra. Lo mismo sucede en la diagonal $(2, 1)(1, 2)$ y al elegir la piedra, la piedra de la diagonal $(n, n - 1)(n - 1, n)$ queda determinada.
Luego, en la diagonal $(3, 1)(2, 2)(1, 3)$ la piedra tiene dos posibilidades y al elegir la piedra de la diagonal $(n, n-2)(n-1, n-1)(n-2, n)$ queda determinada. Continuando este proceso, obtenemos que en cada una de las primeras n diagonales numeradas, la piedra puede ir en una de dos posiciones, por lo que el número buscado es 2^n.

Concursos Estatales

Como comentamos en el número anterior de la revista, esta sección es un espacio que tiene como objetivo difundir el trabajo que realizan los estados en su proceso estatal.
En el número anterior, Eugenio Flores (delegado de San Luis Potosí) nos compartió los problemas del concurso estatal de la 28^a Olimpiada Potosina en la categoría "Canguro". En esta ocasión Rogelio Valdez (miembro del comité de la Olimpiada de Morelos) nos comparte los problemas de la tercera etapa de la 28^a Olimpiada de Matemáticas en Morelos.
Deseando que estos materiales sean de utilidad para nuestros lectores, aprovechamos para seguir invitando a todos los estados del país a que nos manden los exámenes que han utilizado en su proceso selectivo.

Olimpiada de Matemáticas en Morelos

La Olimpiada de Matemáticas en el estado de Morelos consta de 7 etapas. En la primera etapa participan alrededor de 1,200 estudiantes, quedando sólo 9 estudiantes en la última etapa. Durante todo el proceso hay entrenamientos y se aplican exámenes en cada etapa para elegir a los estudiantes que continuarán en los entrenamientos de la siguiente etapa.

A continuación presentamos los problemas de la tercera etapa de la 28^a Olimpiada de Matemáticas en Morelos. Cada examen consta de 4 problemas para resolver en un tiempo máximo de 4.5 horas.

Problema 1. Sean a, b, c números enteros distintos, mayores o iguales que 1 y menores o iguales que 10. ¿Cuál es el máximo valor que $a(b + c) - b(a + c)$ puede alcanzar?

Problema 2. ¿Para cuáles valores enteros de n, el número $n^5 - 5n^3 + 4n$ es divisible entre 120?

Problema 3. En cierto hotel hay 5 cuartos, cada cuarto con un decorado distinto. Un día 5 amigos llegan al hotel a pasar la noche. No hay otra gente en el hotel. Los amigos pueden ocupar cualquier combinación de cuartos que deseen, pero con no más de dos amigos por cuarto. ¿De cuántas maneras se les pueden asignar los cuartos a los cinco amigos?

Problema 4. Un saltamontes se mueve por saltos de 10 cm exactamente. El saltamontes se mueve con la siguiente secuencia: se mueve con un cierto número de saltos en una dirección, luego rota $120°$ a la izquierda y hace el doble de saltos en esa nueva dirección. Luego vuelve a rotar $120°$ a la izquierda y nuevamente hace el doble de saltos que la vez anterior. El saltamontes empieza haciendo un salto. ¿Qué tan lejos está el saltamontes del inicio si hace 17 saltos?

Problema 5. Encuentra todas las parejas de números primos (p, q) tales que $p^q + 1$ es también un número primo.

Problema 6. ¿Para cuántos enteros x, el número $x^4 - 51x^2 + 50$ es negativo?

Problema 7. Sea ABC un triángulo acutángulo y sea H el pie de la altura desde C sobre AB. La razón del área del triángulo AHC y el área del triángulo ABC es igual a la razón de AC y $2AB$. Encuentra el valor del $\angle CAB$.

Problema 8. Se tienen 6 manzanas y 6 peras. ¿De cuántas formas se pueden acomodar 6 frutas en una línea, de manera que no haya una pera entre dos manzanas?

Problemas y Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XXVI Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Desde 1991, los ganadores del Concurso Nacional de la OMM participan anualmente en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, APMO, por sus siglas en inglés. A diferencia de otros exámenes de olimpiada, éste consiste en un único examen con 5 problemas para resolver en un máximo de 4 horas.
En el mes de marzo, se aplicó el examen de la XXVI Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico a los alumnos que en ese momento formaban parte de la preselección nacional. Dicho examen se aplicó y calificó en México y los 10 mejores exámenes se enviaron a Kazajistán para ser evaluados por el comité organizador.
En esta ocasión, la delegación de México obtuvo una medalla de oro, dos medallas de plata, cuatro medallas de bronce y tres menciones honoríficas, lo máximo que un país puede obtener en medallas y reconocimientos individuales. Por países la delegación logró el décimo lugar de entre los 36 países participantes. Esta es la mejor participación de México en la historia de la APMO.
Los resultados de la delegación fueron los siguientes:

Kevin William Beuchot Castellanos, del Estado de Nuevo León, medalla de oro.

Diego Alonso Roque Montoya, del Estado de Nuevo León, medalla de plata.

Juan Carlos Ortiz Rhoton, del Estado de Jalisco, medalla de plata.

Luis Xavier Ramos Tormo, del Estado de Yucatán, medalla de bronce.

Olga Medrano Martín del Campo, del Estado de Jalisco, medalla de bronce.

Luis Enrique Chacón Ochoa, del Estado de Chihuahua, medalla de bronce.

Oscar Samuel Henney Arthur, del Estado de Michoacán, medalla de bronce.

Pablo Meré Hidalgo, del Estado de Querétaro, mención honorífica.

Jorge Pat de la Torre Sánchez, del Estado de Coahuila, mención honorífica.

María Cecilia Rojas Cuadra, del Estado de Puebla, mención honorífica.

A continuación presentamos los problemas con soluciones, de la XXVI Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico. Los alumnos tuvieron una sesión de 4 horas para resolverlos.

Problema 1. Para un entero positivo m, denote por $S(m)$ y $P(m)$ a la suma y al producto, respectivamente, de los dígitos de m. Muestre que para cada entero positivo n, existen enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ que satisfacen las siguientes condiciones:

$S(a_1) < S(a_2) < \cdots < S(a_n)$ y $S(a_i) = P(a_{i+1})$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, con $a_{n+1} = a_1$.

Solución de Olga Medrano Martín del Campo. Queremos que para todo entero positivo n, existan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$S(a_1) < S(a_2) < S(a_3) < \cdots < S(a_n).$$

Como tenemos que $S(a_i) = P(a_{i+1})$, podemos cambiar nuestras desigualdades con las siguientes

$$P(a_2) < P(a_3) < P(a_4) < \cdots < P(a_n) < P(a_1).$$

Luego observamos que queremos que se cumpla $S(a_i) < S(a_{i+1})$ para a_i con $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Pero sabemos que $S(a_i) = P(a_{i+1})$, por lo que también queremos que $P(a_{i+1}) < S(a_{i+1})$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Si logramos que esto suceda y que $S(a_i) = P(a_{i+1})$, habremos terminado.
Tomemos un entero k suficientemente grande tal que $n - 1 < 2^{k-1} - k$. Definimos

$$a_1 = \underbrace{2222\ldots2}_{k+n-1}\underbrace{1111111\ldots1}_{2^k-2(k+n-1)}.$$

Se tiene que $S(a_1) = 2^k$ y $P(a_1) = 2^{k+n-1}$. Luego, definimos

$$a_2 = \underbrace{222\ldots2}_{k}\underbrace{111\ldots1}_{2^{k+1}-2k},$$

el cual cumple que $P(a_2) = 2^k = S(a_1)$, $S(a_2) = 2^{k+1}$ y $P(a_2) < S(a_2)$. Continuamos eligiendo

$$a_i = \underbrace{22222\ldots2}_{k+i-2}\underbrace{111111111\ldots1}_{2^{k+i-1}-2(k+i-2)}$$

para $i = 3, 4, \ldots, n$. Cada valor cumplirá que $P(a_i) = 2^{k+i-2} = S(a_{i-1})$ y $S(a_i) = 2^{k+i-1}$, con lo que $P(a_i) < S(a_i)$. Finalmente, como $S(a_n) = 2^{k+n-1} = P(a_1)$, estos números funcionan.

Problema 2. Sea $S = \{1, 2, \ldots, 2014\}$. Para cada subconjunto no vacío $T \subseteq S$, uno de sus elementos se elige como su *representante*. Encuentre el número de maneras de asignar representantes a todos los subconjuntos no vacíos de S, de manera que si $D \subseteq S$ es la unión ajena de tres subconjuntos no vacíos A, B, $C \subseteq S$, entonces el representante de D es también representante de alguno de A, B, C.

Solución de Kevin William Beuchot Castellanos. Sea a_1 el representante de S. Consideramos un subconjunto A de S con a lo más 2012 elementos y tal que $a_1 \in A$. Veamos que a_1 tiene que ser el representante de A. Para ver esto, consideramos la partición siguiente:

$$S = A \cup \{x\} \cup (S \backslash (A \cup \{x\}))$$

donde x es un elemento que no esté en A. Como a_1 es el representante de S, a_1 tiene que ser el representante de A.

Hacemos lo mismo definiendo a_2 como el representante de $S \backslash \{a_1\}$ y llegamos a que a_2 tiene que ser el representante de cualquier conjunto que cumpla $A \subset S \backslash \{a_1\}$ y con a lo más 2011 elementoes (la demostración es la misma). Continuamos definiendo a a_i como el representante de $A \backslash \{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\}$ hasta $i = 2012$. Sean b y c los elementos que no fueron a_i.

Demostraremos ahora que si a_i es el de menor índice en un conjunto con a lo más $2015 - i$ elementos, tiene que ser su representante. Para esto, consideremos un conjunto con $2014 - i$ elementos. Este tiene que ser de la forma $A_i \backslash \{x\}$ donde $A_i = \{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{2014}, b, c\}$ y $x \in A_i$. Si $x = a_j$ con $j \leq 2010$, tenemos que

$$\begin{aligned} A_i \backslash \{x\} &= \{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_{2012}\} \cup \{b\} \cup \{c\} \\ &= \{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_{2010}, b, c\} \cup \{a_{2011}\} \cup \{a_{2012}\} \end{aligned}$$

de donde vemos que a_i tiene que ser el representante de $A_i \backslash \{x\}$. Si $x = a_{2011}$, $x = a_{2012}$, $x = b$ o $x = c$, se pueden encontrar particiones análogas para llegar al mismo resultado. Esto se puede hacer para $i \leq 2009$, por lo que falta ver para a_{2010}, a_{2011}, a_{2012}, b y c. Considerando las particiones

$$\begin{aligned} \{a_{2010}, a_{2011}\} \cup \{a_{2012}\} \cup \{b\} &= \{a_{2010}, a_{2012}\} \cup \{a_{2011}\} \cup \{b\} \\ &= \{a_{2010}, b\} \cup \{a_{2011}\} \cup \{a_{2012}\} \end{aligned}$$

vemos que a_{2010} tiene que ser el representante de $\{a_{2010}, a_{2011}, a_{2012}, b\}$.

Ahora, notamos que a_{2011} es el representante de $\{a_{2011}, a_{2012}, b, c\}$; a_{2012} es el representante de $\{a_{2012}, b, c\}$, y que a_{2011} es el representante de $\{a_{2011}, a_{2012}\}$, $\{a_{2011}, b\}$ y $\{a_{2011}, c\}$. Pero, por otro lado, notamos que los representantes de $\{a_{2011}, a_{2012}, b\}$, $\{a_{2011}, a_{2012}, c\}$ y $\{a_{2011}, b, c\}$ no importan, de la misma manera que los representantes de $\{a_{2012}, b\}$, $\{a_{2012}, c\}$ y $\{b, c\}$ tampoco importan.

Luego, basta contar el número de maneras de elegir los valores $a_1, a_2, \ldots, a_{2012}$, lo cual se puede hacer de $\frac{2014!}{2}$ formas y de elegir los representantes de los seis conjuntos que no importan, lo cual se puede hacer de $3^3 2^3$ maneras. Luego, el número buscado es $2^2 \cdot 3^3 \cdot 2014!$.

Problema 3. Encuentre todos los enteros positivos n tales que para cualquier entero k, existe un entero a tal que, $a^3 + a - k$ es divisible entre n.

Solución de Juan Carlos Ortiz Rhoton. Sea $p \geq 5$ un número primo y sea e un entero positivo. Demostraremos por inducción sobre e que existen enteros a y b tales que p^e divide a $1 + a^2 + ab + b^2$ y no divide a $a - b$.
Para la base de inducción, supongamos lo contrario. Esto es, que siempre que p divida a $1 + a^2 + ab + b^2$ implica que p divide a $a - b$. Si $x = a - b \neq 0$ tenemos que $x^2 + 3a(a - x) + 1 \equiv 0 \pmod p$ no tiene solución. Es decir, $3a^2 - 3xa + x^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$ no tiene solución. Luego, su discriminante $-3(x^2 + 4)$ no puede ser residuo cuadrático. Considerando $a = 0$ notamos que p no divide a $b^2 + 1$, por lo que -1 no puede ser residuo cuadrático y $3(x^2 + 4)$ sí es residuo cuadrático. Consideremos ahora dos casos.

- 3 es residuo cuadrático. Tenemos que $x^2 + 4$ es residuo cuadrático para toda x. Luego, tomando $x = 1$ tenemos que 5 es residuo cuadrático. Considerando $x^2 \equiv 5$, concluimos que $5 + 4 = 9$ también es residuo cuadrático. Como $(4, p) = 1$, tenemos que con este proceso pasaremos por todos los residuos módulo p, lo cual es una contradicción.

- 3 no es un residuo cuadrático. Tenemos que $x^2 + 4$ tampoco es un residuo cuadrático para toda x. Consideramos la función $f(y) = y + 4$ y sean A y B los conjuntos de residos cuadráticos y no residuos cuadráticos (sin considerar a 0). Tenemos que $f : A \to B$. Como f es una función biyectiva, tenemos que $f : B \to A \cup \{0\}$. Luego, para todo $x \neq 0$ tenemos que $x^2 + 8$ es un residuo cuadrático.

  De aquí, $-8(1), -8(2), \ldots, -8(\frac{p+1}{2})$ son residuos cuadráticos, mientras que $8(1), 8(2), \ldots, 8(\frac{p-1}{2})$ son no residuos cuadráticos. Como $p \geq 5$, tenemos que $2 \leq \frac{p-1}{2}$, por lo que $8(2) = 16 = 4^2$ no es residuo cudrático, lo cual es una contradicción. Esto concluye la base de inducción.

Ahora, supongamos que existen enteros a, b tales que p^e divide a $1 + a^2 + ab + b^2$ y p^e no divide a $a - b$. A partir de esto, tenemos que demostrarlo para $e + 1$.
Eligiendo $a' = a + p^e x$, $b' = b + p^e y$, queremos que p^{e+1} divida a

$$1+(a+p^e x)^2+(a+p^e x)(b+p^e y)+(b+p^e y)^2 \equiv 1+a^2+ab+b^2+p^e(2ax+ay+bx+2by).$$

Luego, basta con que $2ax+ay+bx+2by$ tome todos los valores módulo p. Si $2a+b \not\equiv 0$, acabamos al variar x. Si $2b + a \not\equiv 0$, acabamos al variar y. Si $2a + b \equiv 2b + a \equiv 0$, como $p \geq 5$, concluimos que p divide a a y a b, por lo que para que p divida a $1 + a^2 + ab + b^2$, p tiene que dividir a 1, lo cual es una contradicción y acabamos la inducción.
Sea n un entero positivo. Si tiene un factor primo $p \geq 5$, consideramos a p^e como la máxima potencia de p que divide a n. Sabemos que existen enteros a y b tales que p^e divide a $1 + a^2 + ab + b^2$ y p^e no divide a $a - b$. Elegimos a_1 y b_1 tales que

$a_1 \equiv a \pmod{p^e}$, $b_1 \equiv b \pmod{p^e}$ y $a_1 \equiv b_1 \pmod{\frac{n}{p^e}}$ (existen por el teorema chino del residuo). Se tiene que n divide a $(a_1^3 + a_1) - (b_1^3 + b_1)$ pero n no divide a $a_1 - b_1$. Luego, $f(x) = x^3 + x$ no es inyectiva, por lo que debe existir un residuo k tal que no es de la forma $x^3 + x$. Por lo tanto n no cumple.
Resta revisar los casos $n = 2^x 3^y$ para ciertos $x, y \geq 0$.
Si $x \geq 3$, vamos a ver que n tampoco cumple. Veamos que existe un entero b tal que 2^x divide a $2 + b^2 + b$. Lo haremos por inducción sobre x.
Para $x = 2$ y $x = 3$ podemos tomar $b = 2$. Supongamos que 2^x divide a $2 + b^2 + b$ y tenemos que verlo para $x + 1$. Si 2^{x+1} divide a $2 + b^2 + b$, ya acabamos. Si no, $2 + b^2 + b \equiv 2^x \pmod{2^{x+1}}$. En este caso

$$(2^x - 1 - b)^2 + (2^x - 1 - b) + 2 \equiv b^2 + 1 + 2b + 2^x - 1 - b - 2 \equiv 2^x + 2 + b^2 + b \equiv 0 \pmod{2^{x+1}},$$

lo cual concluye la inducción.
Ahora, eligiendo $a = 1$ y este valor de b, tenemos que 2^x divide a $2 + b^2 + b$, por lo que 2^x divide a $(a - b)(1 + b^2 + ab + b^2)$ y 2^x no divide $a - b$ (si 2^x divide a $a - b$ tenemos que $b \equiv 1 \pmod{2^x}$, de donde 2^x divide a $2 + b^2 + b \equiv 4$, por lo que $x \leq 2$). Con estos valores, podemos hacer lo mismo con el teorema chino del residuo y llegar a una contradicción. Luego, quedan los valores 3^x, $2 \cdot 3^x$ o $4 \cdot 3^x$.
Si $n = 4 \cdot 3^x$, elijo $a = 1$ y $b = 1 + 2 \cdot 3^x$. Como $b - a = 2 \cdot 3^x$, n no lo divide. Por otro lado, como $1 + a^2 + ab + b^2$ es par, n sí divide a $(a - b)(1 + a^2 + ab + b^2)$.
Si $n = 2 \cdot 3^x$, elijo $a = 1$ y $b = 3^x + 1$. Como $b - a = 3^x$, n no lo divide. Por otro lado, $2 \cdot 3^x$ divide a $(a - b)(1 + a^2 + ab + b^2)$, por lo tanto n no cumple.
Ahora veremos que $n = 3^x$ sí cumple.
Supongamos que para cierto entero positivo x, se tiene que $f(y) = y^3 + y$ no es inyectiva en $\mathbb{Z}_{3^x}$. Luego, existen a y b tales que $a \not\equiv b \pmod{3^x}$ y que 3^x divide a $(a - b)(1 + a^2 + ab + b^2)$. Si 3 divide a $a - b$, tenemos que $1 + a^2 + ab + b^2 \equiv 1 + 3a^2 \equiv 1 \pmod 3$, por lo que $x = 1$ y 3^x divide a $a - b$, contradicción.
Luego, 3 no divide a $a - b$ y 3^x tiene que dividir a $1 + a^2 + ab + b^2$. Si $a \equiv 0 \pmod 3$ tenemos que 3 divide a $b^2 + 1$, lo cual es imposible. Si $a \equiv 1 \pmod 3$, 3 tiene que dividir a $2 + b^2 + b$, lo cual es imposible, pues si $b \equiv 0$, $2 + b^2 + b \equiv 2$, si $b \equiv 1$, $2 + b^2 + b \equiv 1$ y si $b \equiv 2$, $2 + b^2 + b \equiv 2$. Finalmente, si $a \equiv 2 \pmod 3$, tenemos que 3 divide a $2 + b^2 - b$ y se llega a una contradicción similar.

Problema 4. Sean n y b enteros positivos. Diremos que n es b-*perspicaz* si existe un conjunto de n enteros positivos diferentes, menores que b, de manera que no tenga dos subconjuntos diferentes U y V tales que la suma de todos los elementos de U sea igual a la suma de todos los elementos de V.
(a) Muestre que 8 es un entero $100-$ *perspicaz*.
(b) Muestre que 9 no es un entero $100-$ *perspicaz*.

Solución de Kevin William Beuchot Castellanos. Para demostrar que 8 es 100-perspicaz, usaremos el conjunto $\{3, 6, 12, 24, 28, 96, 97, 98\}$. Veamos que cumple con las condiciones. Si elijo números entre $3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^5$, no habrá dos sumas iguales, pues ignorando el factor 3 de cada número, estaríamos obteniendo dos expresiones en binario para un mismo número. Si elijo el 97 o el 98, como son los únicos que no son múltiplos de 3, tendría que elegir ambos y como $97 \not\equiv 98 \pmod 3$, ambos tienen que estar en el mismo conjunto. Pero como

$$97 + 98 > 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96,$$

no se podrán tener dos conjuntos con la misma suma.

Para la segunda parte, supongamos que 9 sí es 100-perspicaz. Entonces existe un conjunto $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_9\}$ con $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_9 < 100$ que no contiene dos subconjuntos ajenos cuya suma de elementos sea la misma.

Sea X el conjunto de subconjuntos de S con al menos 3 y a lo más 6 elementos y sea Y el conjunto de todos los subconjuntos de S con exactamente 2, 3 o 4 elemenos mayores que s_3. El conjunto X consiste de

$$\binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5} + \binom{9}{6} = 84 + 126 + 126 + 84 = 420$$

subconjuntos de S. El conjunto en X con mayor suma de elementos es $\{s_4, s_5, \ldots, s_9\}$ y el conjunto con suma mínima es $\{s_1, s_2, s_3\}$. Luego, la suma de elementos de cada conjunto en X es al menos $s_1 + s_2 + s_3$ y a lo más $s_4 + s_5 + \cdots + s_9$, por lo que puede tomar $(s_4 + s_5 + \cdots + s_9) - (s_1 + s_2 + s_3) + 1$ valores. Por el principio de las casillas tenemos que $(s_4 + s_5 + \cdots + s_9) - (s_1 + s_2 + s_3) + 1 \geq 420$, o sea,

$$(s_4 + s_5 + \cdots + s_9) - (s_1 + s_2 + s_3) \geq 419. \tag{3}$$

Ahora, veamos cuántos elementos tiene Y. Notamos que $\{s_4, s_5, \ldots, s_9\}$ tiene $\binom{6}{2}$ subconjuntos con dos elementos, $\binom{6}{3}$ subconjuntos con tres elementos y $\binom{6}{4}$ subconjuntos con cuatro elementos, mientras que $\{s_1, s_2, s_3\}$ tiene exactamente 8 subconjuntos. Luego, el número de elementos en Y es igual a

$$8\left(\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4}\right) = 8(15 + 20 + 15) = 400.$$

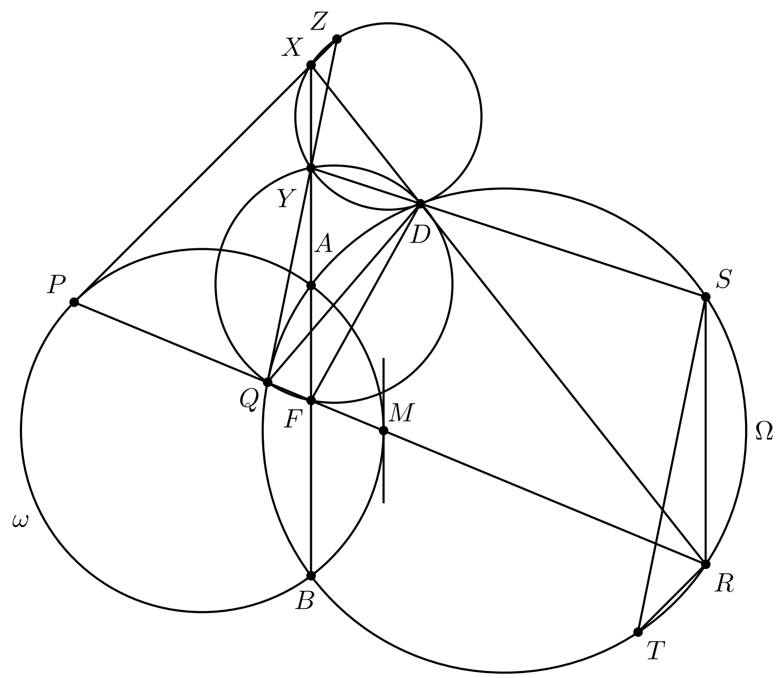
El conjunto en Y con la mayor suma de elementos es $\{s_1, s_2, s_3, s_6, s_7, s_8, s_9\}$ y el de menor suma es $\{s_4, s_5\}$. Nuevamente, por el principio de las casillas tenemos que $(s_1 + s_2 + s_3 + s_6 + s_7 + s_8 + s_9) - (s_4 + s_5) + 1 \geq 400$, o sea,

$$(s_1 + s_2 + s_3 + s_6 + s_7 + s_8 + s_9) - (s_4 + s_5) \geq 399. \tag{4}$$

Sumando (3) y (4) obtenemos que $2(s_6 + s_7 + s_8 + s_9) \geq 818$, por lo que $s_9 + 98 + 97 + 96 \geq s_9 + s_8 + s_7 + s_6 \geq 409$, de donde $s_9 \geq 118$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto 9 no es 100-perspicaz.

Problema 5. Las circunferencias ω y Ω se cortan en los puntos A y B. Sea M el punto medio del arco AB de la circunferencia ω (con M dentro de Ω). Una cuerda MP de la circunferencia ω corta a Ω en Q (con Q dentro de ω). Sea l_P la recta tangente a ω en P, y sea l_Q la recta tangente a Ω en Q. Muestre que el circuncírculo del triángulo formado por las rectas l_P, l_Q y AB, es tangente a Ω.

Solución. Sea X la intersección de AB con l_p, Y la intersección de AB y l_Q y Z la intersección de l_p y l_Q. Sin pérdida de generalidad, tenemos que $AX < BX$. Sea F la intersección de MP y AB. Sean R el segundo punto de intersección de PQ y Ω; S el punto sobre Ω tal que SR es paralela a AB; y T el punto sobre Ω tal que RT es paralela a l_p.



Como M es el punto medio del arco AB, la recta l_M tangente a ω en M es paralela a AB, por lo que $\angle(AB, PM) = \angle(PM, l_p)$. Luego, tenemos que $\angle PRT = \angle MPX = \angle PFX = \angle PRS$. Luego, Q es el punto medio del arco TQS de Ω, por lo que ST es paralela a l_Q. Luego, los lados correspondientes de los triángulos RST y XYZ son paralelos y existe una homotecia h que llega RST a XYZ.

Sea D el segundo punto de intersección de XR y Ω. Demostraremos que D es el centro de la homotecia h. Como D está en Ω, esto implicaría que los circuncírculos de los triángulos RST y XYZ son tangentes, como necesitábamos. Luego, basta demostrar esto. Y para ello, basta demostrar que D está en SY.

Como $\angle PFX = \angle XPF$ tenemos que $FX^2 = XP^2 = XA \cdot XB = XD \cdot XR$. Luego, $\frac{XF}{XD} = \frac{XR}{XF}$, por lo que los triángulos XDF y XFR son semejantes, de donde $\angle DFX = \angle XRF = \angle DRQ = \angle DQY$, por lo que los puntos D, Y, Q y F están sobre una circunferencia. De aquí se sigue que $\angle YDQ = \angle YFQ = \angle SRQ = 180° - \angle SDQ$, lo que implica que los puntos Y, D y S son colineales, con D entre S y Y.

III Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas

Del 9 al 16 de abril pasado se celebró en Antalya, Turquía, la 3^a EGMO con la participación de 110 alumnas provenientes de 28 países: 22 países europeos y 6 países invitados. Hubo dos equipos de Turquía. Los países invitados fueron: Indonesia, República Islámica de Irán, Japón, Arabia Saudita, Estados Unidos y México.
La delegación que presentó a México estuvo integrada por las alumnas: Nayeli Reyes Moreno (Baja California), María Cecilia Rojas Cuadra (Puebla), Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco) y Sandra Berenice Mendoza Peñuñuri (Sonora). Las profesoras que acompañaron a la delegación fueron Ana Rechtman (líder) y Radmila Bulajich (colíder). Nayeli, Cecilia y Olga obtuvieron medalla de bronce y México ocupó el lugar número 17.

A continuación presentamos los problemas con soluciones, de la III Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas. Las alumnas tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Determina todos los números reales t tales que si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo no degenerado, entonces $a^2 + bct$, $b^2 + cat$, $c^2 + abt$ son también las longitudes de los lados de un triángulo no degenerado.

Solución. La respuesta es el intervalo $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$. Tenemos que verificar si los valores $b^2 + cat$, $c^2 + abt$ y $a^2 + bct$ cumplen la desigualdad del triángulo.
Si $t < \frac{2}{3}$, tomamos un triángulo con lados $c = b = 1$ y $a = 2 - \varepsilon$. Con esto

$$(b^2 + cat) + (c^2 + abt) - (a^2 + bct) = 3t - 2 + \varepsilon(4 - 2t - \varepsilon),$$

lo cual es menor que 0 para ε suficientemente pequeño, por ejemplo, para $0 < \varepsilon < \frac{2-3t}{4-2t}$.
Por otro lado, si $t > 2$, tomamos un triángulo con lados $b = c = 1$ y $a = \varepsilon$. Con esto

$$(b^2 + cat) + (c^2 + abt) - (a^2 + bct) = 2 - t + \varepsilon(2t - \varepsilon),$$

lo cual es menor que 0 para ε suficientemente pequeño, por ejemplo para $0 < \varepsilon < \frac{t-2}{2t}$.
Ahora, supongamos que $\frac{2}{3} \leq t \leq 2$ y que $b + c > a$. Usando que $(b + c)^2 \geq 4bc$ tenemos que

$$\begin{aligned}(b^2 + cat) + (c^2 + abt) - (a^2 + bct) &= (b + c)^2 + at(b + c) - (2 + t)bc - a^2 \\ &\geq (b + c)^2 + at(b + c) - \frac{1}{4}(2 + t)(b + c)^2 - a^2 \\ &= \frac{1}{4}(2 - t)(b + c)^2 + at(b + c) - a^2.\end{aligned}$$

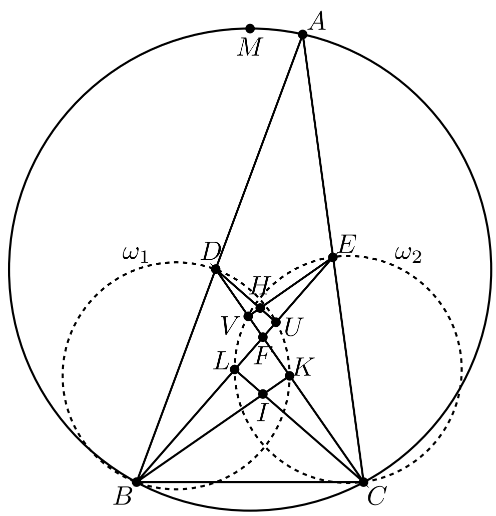
Como $2 - t \geq 0$ y $t > 0$, esta última expresión es una función creciente de $b + c$ y como $b + c > a$ tenemos que

$$(b^2 + cat) + (c^2 + abt) - (a^2 + bct) > \frac{1}{4}(2 - t)a^2 + a^2t - a^2 = \frac{3}{4}\left(t - \frac{2}{3}\right)a^2 \geq 0,$$

pues $t \geq \frac{2}{3}$. Las otras dos desigualdades se obtienen de manera similar.

Problema 2. Sean D y E puntos en los lados AB y AC de un triángulo ABC, respectivamente, y tales que $DB = BC = CE$. Sean F el punto de intersección de las rectas CD y BE, I el incentro del triángulo ABC, H el ortocentro del triángulo DEF y M el punto medio del arco BAC del circuncírculo del triángulo ABC. Demuestra que I, H y M son colineales.

Solución. Como $DB = BC = CE$ tenemos que $BI \perp CD$ y $CI \perp BE$, de donde I es el ortocentro del triángulo BFC. Sea K el punto de intersección de las líneas BI y CD, y sea L el punto de intersección de las líneas CI y BE. Por potencia de un punto tenemos que $IB \cdot IK = IC \cdot IL$. Sean U y V los pies de las perpendiculares de D sobre EF y de E sobre DF, respectivamente. Por potencia de un punto tenemos que $DH \cdot HU = EH \cdot HV$.



Sean ω_1 y ω_2 los círculos con diámetros BD y CE, respectivamente. Por las relaciones de potencia de un punto podemos concluir que IH es el eje radical de los círculos ω_1 y ω_2.
Sean O_1 y O_2 los centros de ω_1 y ω_2, respectivamente. Tenemos que $MB = MC$, $BO_1 = CO_2$ y $\angle MBO_1 = \angle MCO_2$, de donde los triángulos MBO_1 y MCO_2 son congruentes. Luego, $MO_1 = MO_2$. Como los radios de ω_1 y ω_2 son iguales, esto implica que M está en el eje radical de ω_1 y ω_2. Por lo tanto, M, H e I son colineales.

Problema 3. Denotamos por $d(m)$ el número de divisores positivos de un entero positivo m, y por $\omega(m)$ el número de primos distintos que dividen a m. Sea k un entero positivo. Demuestra que hay una infinidad de enteros positivos n tales que $\omega(n) = k$ y $d(n)$ no divide a $d(a^2 + b^2)$ para todos a y b enteros positivos tales que $a + b = n$.

Solución. Demostraremos que cualquier número de la forma $n = 2^{p-1}m$ donde m es

un entero positivo que tiene exactamente $k-1$ factores primos todos ellos mayores que 3 y p es un primo tal que $(\frac{5}{4})^{(p-1)/2} > m$, satisface la condición.
Supongamos que a y b son enteros positivos tales que $a + b = n$ y $d(n) \mid d(a^2 + b^2)$. Como $n = 2^{p-1}m$ y $2 \nmid m$, tenemos que $d(n) = pd(m)$ y así $p \mid d(a^2 + b^2)$. Luego, $a^2 + b^2 = q^{cp-1}r$ donde q es un primo, c es un entero positivo y r es un entero positivo no divisible entre q. Si $q \geq 5$, tenemos que

$$2^{2p-2}m^2 = n^2 = (a + b)^2 > a^2 + b^2 = q^{cp-1}r \geq q^{p-1} \geq 5^{p-1},$$

lo cual nos da una contradicción. Luego, $q = 2$ o 3.
Si $q = 3$, tenemos que $a^2 + b^2$ es divisible entre 3, lo cual implica que tanto a como b son divisibles entre 3. Luego, $n = a+b$ es divisible entre 3, lo cual es una contradicción y q tiene que ser 2.
Tenemos que $a + b = 2^{p-1}m$ y $a^2 + b^2 = 2^{cp-1}r$. Si las máximas potencias de 2 que dividen a a y a b son diferentes, $a + b = 2^{p-1}m$ implicaría que la mínima de esas dos potencias sea 2^{p-1} lo cual hace a 2^{2p-2} la máxima potencia de 2 que divide a $a^2 + b^2 = 2^{cp-1}r$, o equivalentemente, $cp - 1 = 2p - 2$, de donde $p \mid 1$ lo cual es imposible. Entonces, $a = 2^t a_0$ y $b = 2^t b_0$ para algún entero $t < p-1$ y enteros impares a_0 y b_0. Luego, $a_0^2 + b_0^2 = 2^{cp-1-2t}r$, El lado izquierdo de esta igualdad es congruente a 2 módulo 4, por lo que $cp - 1 - 2t$ debe ser 1. Pero como $0 \leq t < (\frac{c}{2})p = t + 1 < p$ tenemos que $(\frac{c}{2})p$ es un múltiplo no cero de p menor que p, lo cual no es posible.

Problema 4. Encuentra todos los enteros $n \geq 2$ para los cuales existen enteros $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ que satisfacen la siguiente condición: si $0 < i < n$, $0 < j < n$ con $i \neq j$ y $2i + j$ es divisible entre n, entonces $x_i < x_j$.

Solución. La respuesta es $n = 2^k$ con $k \geq 1$ o $n = 3 \cdot 2^k$ donde $k \geq 0$.
Supongamos que n toma una de estas dos formas. Para un entero i, sea x_i el mayor entero tal que 2^{x_i} divide a i. Ahora, supnongamos que $0 < i < n$, $0 < j < n$, $i \neq j$, n divide a $2i + j$ y $x_i \geq x_j$. Entonces, la mayor potencia de 2 que divide a $2i + j$ es 2^{x_j} y de aquí que $j \leq x_j$ y $2^k \leq j$. Como $0 < j < n$, esto es posible solo si $n = 3 \cdot 2^k$ y $j = 2^k$ o 2^{k+1}. En el primer caso $i \neq j$ y $x_i \geq x_j$ lo cual implica $i = 2^{k+1}$ llegando a la contradicción $3 \cdot 2^k = n \,|\, 2i + j = 5 \cdot 2^k$. El segundo caso no es posible pues $i \neq j$ y $x_i \geq x_j$ ahora implican que $i \geq 2^{k+2} > n$.
Ahora supongamos que n no toma ninguna de las formas y $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ existen y satisfacen las condiciones. Para cada entero positivo m, sea a_m el residuo de la división de $(-2)^m$ entre n. Entonces ninguno de los a_m es 0, pues n no es una potencia de 2. Además, $a_m \neq a_{m+1}$ para cualquier $m \geq 1$, pues $a_m = a_{m+1}$ implicaría que n divide a $3 \cdot 2^m$. También n divide a $2a_m + a_{m+1}$. Por lo que debemos tener $x_{a_1} < x_{a_2} < x_{a_3} < \cdots$ lo cual no es posible, pues los a_m solo pueden tomar una cantidad finita de valores.

Problema 5. Sea n un entero positivo. Se tienen n cajas y cada caja contiene un número no negativo de fichas. Un movimiento consiste en tomar dos fichas de una de las cajas, dejar una fuera de las cajas y poner la otra en otra caja. Decimos que una configuración de las fichas es *resoluble* si es posible aplicar un número finito de movimientos (que puede ser igual a cero) para obtener una configuración en la que no haya cajas vacías. Determinar todas las configuraciones iniciales de fichas que no son resolubles y se vuelven resolubles al agregar una ficha en cualquiera de las cajas (sin importar en cual caja se pone la ficha).

Solución de Nayeli Reyes Moreno. Para una caja en particular, definiremos la cantidad de donaciones que puede hacer como la cantidad de fichas que esta caja puede dar sin quedarse vacía. Este número está dado por $\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor$ donde x es el número de fichas de la caja. También definimos la cantidad total de donaciones como la suma de las cantidades de donaciones de las cajas.
Primero notamos que al pasar fichas a una caja que ya tenía fichas, como solo aumentamos en 1 el número de fichas en esa caja, el número total de donaciones se quedó igual o disminuyó en 1, pues la caja de donde vienen las fichas puede donar una ficha menos y la caja que recibió la ficha o puede donar la misma cantidad o puede donar una ficha más. Luego, el donar fichas a una caja no vacía no aumenta la cantidad total de donaciones.
Así, para que una configuración sea soluble, debe cumplir que la cantidad total de donaciones sea mayor que el número de cajas vacías.
Notemos ahora que entre las configuraciones que estamos buscando, no puede haber alguna caja con un número impar de fichas, ya que la nueva ficha podría ir a esa caja y no aumentaría la cantidad total de donaciones, por lo que la configuración, que originalmente era no soluble, continuaría siendo no soluble. Así, todas las cajas deben tener una cantidad par de fichas.
Además, en una configuración como las que buscamos, se debe cumplir que la cantidad total de donaciones es 1 menos que la cantidad de cajas vacías. Esto es claro, pues esta configuración sería no soluble y al agregar una moneda, la cantidad total de donaciones aumentaría en 1 y la configuración se volvería soluble.
Digamos que $f_1, f_2, \ldots, f_{n-k}$ son las cantidades de fichas en las primeras $n-k$ cajas, las cuales son no vacías y las otras k están vacías. Como todos los f_i son pares, sabemos que la cantidad total de donaciones es $\frac{f_1-1+f_2-1+\cdots+f_{n-k}-1}{2}$. Al haber k cajas vacías (con k un entero positivo), este número debe ser igual a $k-1$. Despejando obtenemos que

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-k} = 2n - 2,$$

por lo que podemos concluir que las configuraciones buscadas son aquellas que tienen exactamente $2n-2$ fichas y cada caja tiene una cantidad par de fichas.

Problema 6. Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la siguiente condición

$$f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = (y + f(x))(x + f(y))$$

para todos x, y números reales.

Solución. La respuesta es las funciones $f(x) = x$, $f(x) = -x$ y $f(x) = \frac{1}{2} - x$.
Podemos fácilmente verificar que las funciones $f(x) = x$, $f(x) = -x$ y $f(x) = \frac{1}{2} - x$ cumplen la condición. Demostraremos que son las únicas. Poniendo $y = -f(x)$ en la

condición original para obtener

$$f(2f(x)^2 + 2xf(-f(x))) = 0$$

para toda x. En particular, 0 es un valor de f. Supongamos que u y v son tales que $f(u) = f(v) = 0$. Poniendo $x = u$ o v y $y = u$ o v en la condición, obtenemos que $f(u^2) = u^2$, $f(u^2) = uv$ y $f(v^2) = v^2$, de donde concluimos que $u^2 = uv = v^2$, de donde $u = v$ y solo hay un valor a tal que $f(a) = 0$. Además,

$$f(x)^2 + xf(-f(x)) = \frac{a}{2} \tag{5}$$

para toda x.
Supongamos que $f(x_1) = f(x_2) \neq 0$ para ciertos valores x_1, x_2. Usando la ecuación (5) obtenemos que $x_1 f(-f(x_1)) = x_2 f(-f(x_2)) = x_2 f(-f(x_1))$ por lo que $x_1 = x_2$ o $f(x_1) = f(x_2) = -a$. En este segundo caso, ponemos $x = a$, $y = x_1$ en la condición original y obtenemos que $f(x_1^2 - 2a^2) = 0$, de donde $x_1^2 - 2a^2 = a$. Análogamente obtenemos que $x_2^2 - 2a^2 = a$, por lo que $x_1 = x_2$ o $x_1 = -x_2$.
Usando la simetría de la ecuació original tenemos que

$$f(f(x)^2 + y^2 + 2xf(y)) = (x + f(y))(y + f(x)) = f(f(y)^2 + x^2 + 2yf(x)) \tag{6}$$

para todos x e y. Supongamos que $f(x)^2 + y^2 + 2xf(y) \neq f(y)^2 + x^2 + 2yf(x)$ para algunos x e y. Por las anteriores observaciones, tenemos que $(x + f(y))(y + f(x)) \neq 0$ y $f(x)^2 + y^2 + 2xf(y) = -(f(y)^2 + x^2 + 2yf(x))$. Pero esto es una contradicción pues se puede escribir como $(f(x) + y)^2 + (f(y) + x)^2 = 0$.
Luego, por la ecuación (6) tenemos que

$$f(x)^2 + y^2 + 2xf(y) = f(y)^2 + x^2 + 2yf(x) \tag{7}$$

para todos x e y. En particular, cuando $y = 0$ obtenemos que $f(x)^2 = (f(0) - x)^2$ para toda x. Sea $f(x) = s(x)(f(0) - x)$, donde $s : \mathbb{R} \to \{1, -1\}$. Poniendo esto en la ecuación (7) obtenemos que

$$x(ys(y) + f(0)(1 - s(y))) = y(xs(x) + f(0)(1 - s(x)))$$

para todos x e y. Por lo tanto, $s(x) + \frac{f(0)(1-s(x))}{x}$ debe ser constante para $x \neq 0$.
Si $f(0) = 0$ se sigue que $s(x)$ es constante para $x \neq 0$, por lo que $f(x) = x$ para toda x o $f(x) = -x$ para toda x. Supongamos que $f(0) \neq 0$. Si $s(x) = -1$ para todos los $x \neq 0$, tenemos que $-1 + \frac{2f(0)}{x}$ debe ser constante para toda $x \neq 0$, lo cual no es posible. Por otro lado, si existen números x e y diferentes de 0 tales que $s(x) = -1$ y $s(y) = 1$, luego $-1 + \frac{2f(0)}{x} = 1$. Esto implica que sólo existe un número x que debe ser igual a $f(0)$, y entonces $f(x) = f(0) - x$ para toda x. Poniendo esto en la ecuación original tenemos que $2f(0)^2 = f(0)$, de donde $f(0) = \frac{1}{2}$. Con esto terminamos.

XVI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

Del 6 al 3 de junio se celebró en San José de Costa Rica la XVI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe con la participación de 12 países: Colombia, Costa Rica, El Salvador, Guatemala, Honduras, Jamaica, México, Nicaragua, Panamá, Puerto Rico, República Dominicana y Venezuela. El número de participantes fue 36 y se premió a la mitad de ellos con 3 medallas de oro, 6 de plata y 9 de bronce.

La delegación que representó a México estuvo integrada por los alumnos Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco), Karol José Gutiérrez Suárez (Colima) y Antonio López Guzmán (Chihuahua). Los tres alumnos obtuvieron medalla de oro. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Julio Rodríguez Hernández y María Eugenia Guzmán Flores.

A continuación presentamos los problemas y soluciones de la XVI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Un entero positivo se denomina *tico* si es el producto de tres números primos diferentes que suman 74. Verifique que 2014 es tico. ¿Cuál es el próximo año tico? ¿cuál será el último año tico de la historia?

Solución de Olga Medrano Martín del Campo. Primero notamos que la factorización en primos de 2014 es $2 \cdot 19 \cdot 53$. Como $53 + 19 + 2 = 74$, el 2014 sí es tico.
Tenemos que los números ticos son de la forma pqr con p, q, r primos distintos que suman 74. Si los tres primos fueran impares, su suma sería también impar y no podría ser 74. Por lo tanto, alguno de ellos, digamos p, tiene que ser par, por lo que tiene que ser 2. Los otros dos primos q y r tienen que sumar 72.
Como los primos son diferentes podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $q < r$. Como suman 72, tenemos que $q < 36$. Al ser q un primo impar sus posibles valores son $3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ o 31. Como $r = 72-q$, los respectivos valores de r son 69, 67, 65, 61, 59, 55, 53, 49, 43 y 41. De estos valores hay algunos que no son primos: 69, 65, 55 y 49. Nos quedan seis posibles valores para q y r. Veamos cada caso:

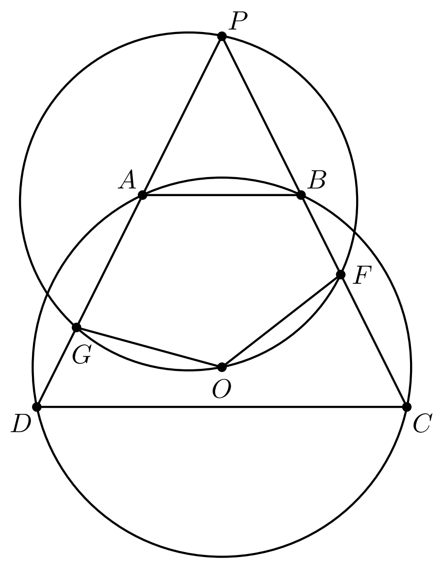
- $q = 5$, $r = 67$. Tenemos que $pqr = 2 \cdot 5 \cdot 67 = 670$.
- $q = 11$, $r = 61$. Tenemos que $pqr = 2 \cdot 11 \cdot 61 = 1342$.
- $q = 13$, $r = 59$. Tenemos que $pqr = 2 \cdot 13 \cdot 59 = 1534$.
- $q = 19$, $r = 53$. Tenemos que $pqr = 2 \cdot 19 \cdot 53 = 2014$.
- $q = 29$, $r = 43$. Tenemos que $pqr = 2 \cdot 29 \cdot 43 = 2494$.
- $q = 31$, $r = 41$. Tenemos que $pqr = 2 \cdot 31 \cdot 41 = 2542$.

De esta lista vemos que el primer tico mayor a 2014 es 2494 y el último año tico de toda la historia será el 2542.

Problema 2. Sea $ABCD$ un trapecio de bases AB y CD inscrito en una circunferencia de centro O. Sea P la intersección de las rectas BC y AD. Una circunferencia por O

y P corta a los segmentos BC y AD en los puntos F y G, respectivamente. Muestre que $BF = DG$.

Solución de Olga Medrano Martín del Campo. Como AB y CD son paralelas, tenemos que por ángulos alternos internos $\angle ABD = \angle BDC$ y como los cuatro vértices están sobre la misma circunferencia, concluimos que los arcos $\widehat{AD}$ y $\widehat{BC}$ son iguales (con $\angle AOD = \angle COB$), de donde los segmentos AD y BC son iguales.



Por ser radios, tenemos que $OA = OB = OC = OD$. Por el criterio LLL, tenemos que los triángulos AOD y COB son congruentes. Si $2x = \angle AOD = \angle COB$, como la suma de los ángulos internos del triángulo isósceles AOD, tenemos que $\angle OAD = \angle ODA = 90° - x$. De la misma manera, podemos concluir que $\angle OBC = \angle OCB = 90° - x$. Luego, $\angle ODG = \angle OBF$.
Ahora, sea y la medida del ángulo $\angle OGD$. Al ser $\angle OGP$ complementario a éste, tenemos que $\angle OGP = 180° - y$. Como $OGPF$ es cíclico,

$$\angle OFP = 180° - \angle OGP = 180° - (180° - y) = y$$

de donde los ángulos $\angle OGD$ y $\angle OFP$ tienen la misma medida y. Ahora, los triángulos OGD y OFB tienen dos pares de ángulos iguales, por lo que son semejantes por el criterio AA. Pero más aún, son congruentes, pues tienen un par de lados correspondientes iguales: $OD = OB$. Por lo tanto $DG = BF$, como queríamos demostrar.

Problema 3. Sean a, b, c y d números reales todos distintos entre sí, tales que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4 \quad \text{y} \quad ac = bd.$$

Determine el máximo valor posible de $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}$.

Solución de Antonio López Guzmán. Multiplicando la condición por $ac = bd$ obtenemos que

$$4ac = 4bd = ac\left(\frac{b}{c}+\frac{d}{a}\right) + bd\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right) = ab + dc + ad + cb = (a+c)(b+d).$$

Y el valor que queremos maximizar se puede ver como:

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{d}+\frac{d}{b} = \frac{a^2+c^2}{ac}+\frac{b^2+d^2}{bd} = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{x},$$

donde $x = ac = bd$.
Veamos qué pasa si todos los números son positivos. Por la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica tenemos que

$$ac = \left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{b+d}{2}\right) \geq \sqrt{ac}\sqrt{bd} = ac,$$

y de aquí concluimos que se tienen que dar las igualdades: $a = c$ y $b = d$, pero esto sería una contradicción, pues los números deben ser diferentes entre sí.
Si los cuatro números son negativos, llamemos $p = -a$, $q = -b$, $r = -c$ y $s = -d$. Los números p, q, r y s cumplen las condiciones del problema y son positivos, por lo que llegaríamos nuevamente a que $p = r$ y $q = s$, de donde $a = c$ y $b = d$, lo cual vuelve a ser una contradicción.
Así que tiene que haber positivos y negativos. Si hay tres positivos y uno negativo tendríamos que la condición $ac = bd$ no podría darse, pues un lado sería positivo y el otro negativo. De la misma manera, podemos ver que tampoco es posible que uno sea positivo y tres sean negativos. Por lo tanto, entre a, b, c y d tiene que haber dos positivos y dos negativos.
Si tanto a como c fueran negativos, tendríamos que b y d serían positvos y la expresión $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$ sería negativa, lo cual es imposible. De la misma manera descartamos la opción de que los negativos sean b y d. Luego, la única opción que queda es que entre a y c haya uno positivo y uno negativo y lo mismo suceda con b y d. Tenemos que $x = ac = bd < 0$.
Veamos con esto que la expresión buscada no puede ser mayor que -12. Queremos que

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{x} \leq -12,$$

multiplicando por el número negativo x, vemos que esta desigualdad es equivalente a

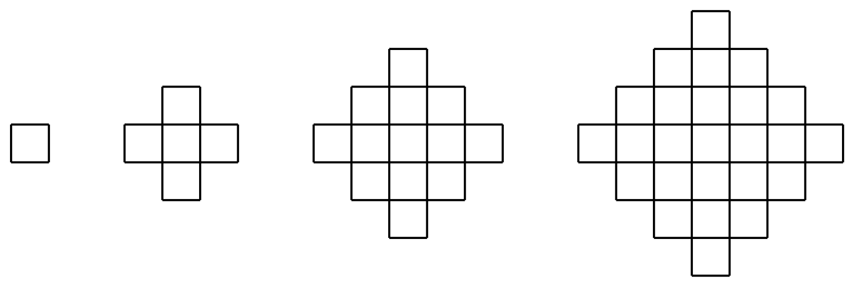
$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geq -12x,$$

la cual a su vez es equivalente a $a^2+b^2+c^2+d^2+12x \geq 0$. Como $x = ac = bd = \frac{(a+c)(b+d)}{4}$ vemos que

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+d^2+12x &= a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2+8x \\ &= (a+c)^2+(b+d)^2+2(a+c)(b+d) \\ &= (a+b+c+d)^2, \end{aligned}$$

lo cual es efectivamente mayor o igual que 0, por lo que $\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{x} \leq -12$. Para demostrar que este es el máximo valor, tenemos que dar un ejemplo donde se alcance y para eso, basta encontrar valores de a, b, c y d que cumplan las condiciones del problema y tales que $a+b+c+d=0$. No es difícil ver que un ejemplo de estos valores son $a = 2-2\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}-2$, $c = 2+2\sqrt{2}$ y $d = -2-2\sqrt{2}$. Para estos valores se tiene que $\frac{a}{b} = -1$, $\frac{b}{c} = 3-2\sqrt{2}$, $\frac{c}{d} = -1$ y $\frac{d}{a} = 3+2\sqrt{2}$, de donde $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} = 4$ y como $a+b+c+d=0$ tenemos que $\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{x} = -12$, como se buscaba.

Problema 4. Con cuadrados de lado 1 se forma en cada etapa una figura en forma de escalera, siguiendo el patrón del dibujo.



Por ejemplo, la primera etapa utiliza 1 cuadrado, la segunda utiliza 5, etc. Determine la última etapa para la cual la figura correspondiente utiliza menos de 2014 cuadrados.

Solución de Karol José Gutiérrez Suárez. Siguiendo el patrón vemos que el renglón central de cada figura tiene un número impar de cuadraditos. La primera figura tiene un cuadradito (que es el primer impar), la segunda tiente tres cuadraditos (que es el segundo impar) y así, de modo que la figura n tiene $2n-1$ cuadraditos en el renglón central ($2n-1$ es el n-ésimo impar).

Y vemos que hacia arriba cada renglón superior tiene dos menos que el anterior, pues se le quita un cuadradito a la izquierda y uno a la derecha. Como la figura es simétrica con respecto al renglón central, tenemos que el número de cuadraditos hacia arriba es el mismo que el número de cuadraditos hacia abajo.

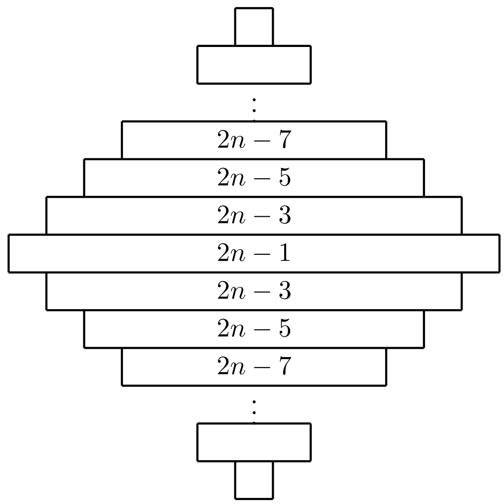
La suma de todos los cuadraditos arriba del renglón central es igual a

$$1+3+5+\cdots+(2n-3) = (n-1)^2,$$

por lo que el número de cuadraditos de la figura completa es igual a

$$2(n-1)^2 + (2n-1).$$

También podemos observar que cada etapa está contenida en la siguiente, por lo que el número de cuadraditos es creciente.



Queremos encontrar el mayor entero positivo n tal que

$$2(n-1)^2 + 2n - 1 < 2014,$$

lo cual es equivalente a $2(n-1)^2 + 2n < 2015$. Sustituyendo $n = 32$ tenemos que

$$2(n-1)^2 + 2n = 2(32-1)^2 + 2(32) = 2 \cdot 31^2 + 64 = 1922 + 64 = 1986 < 2015.$$

Mientras que sustituyendo $n = 33$ tenemos que

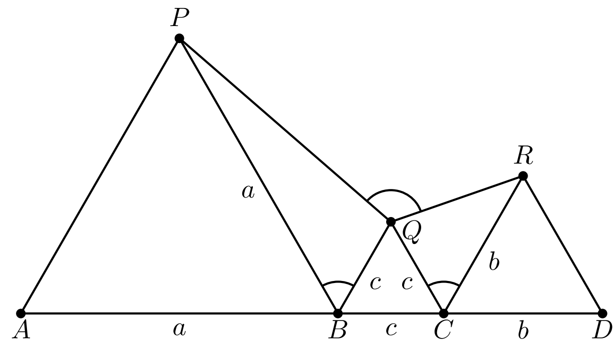
$$2(n-1)^2 + 2n = 2(33-1)^2 + 2(33) = 2 \cdot 32^2 + 66 = 2(1048) + 66 > 2015,$$

por lo que la última etapa para la cual la figura correspondiente utiliza menos de 2014 cuadraditos es la etapa 32, la cual tiene 1985 cuadraditos.

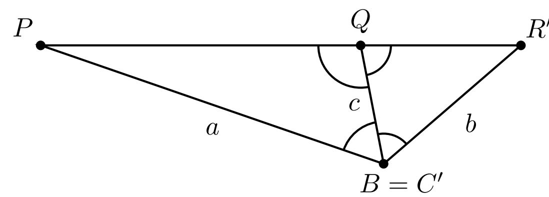
Problema 5. Se marcan los puntos A, B, C y D sobre una recta, en ese orden, con AB y CD mayores a BC. Se construyen los triángulos equiláteros APB, BCQ y CDR, con P, Q y R en el mismo lado respecto a AD. Si $\angle PQR = 120°$, pruebe que

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{BC}.$$

Solución de Karol José Gutiérrez Suárez. Sean $a = AB$, $b = CD$ y $c = BC$. Como los triángulos ABP y CDR son equiláteros tenemos que $BP = a$ y $CR = b$. Además, como $\angle PBA = \angle CBQ = 60°$ tenemos que $\angle QBP = 60°$. Análogamente $\angle RCQ = 60°$.

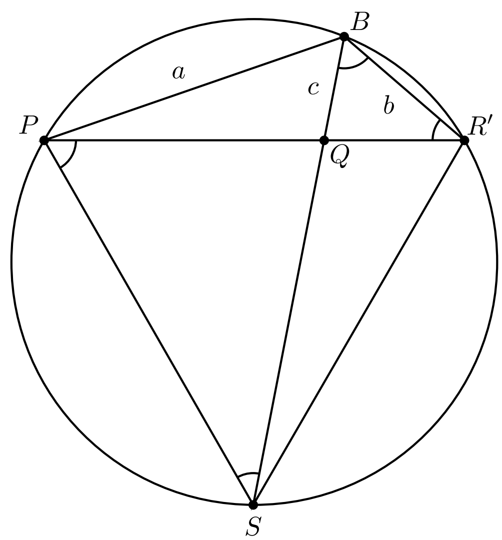


Como $\angle RQP = 120°$ y $\angle BQC = 60°$ tenemos que $\angle CQR + \angle PQB = 180°$. Además, $QC = QB = BC = c$. Entonces, si rotamos el triángulo QRC sobre el vértice Q hasta que coincidan los puntos C y B tendremos la siguiente figura. En la figura se tiene que el vértice R fue rotado hasta el punto R' y el vértice C hasta el punto $C' = B$.



Como $\angle BQR' + \angle PQB = 180°$ tenemos que los puntos P, Q y R' son colineales. En esta figura queremos demostrar que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Sea $l = PR'$. Como $\angle PBQ = \angle QBR' = 60°$, por el teorema de la bisectriz, tenemos que $\frac{b}{a} = \frac{QR'}{PQ}$. Sumando 1 a esta igualdad, tenemos que $\frac{a+b}{a} = \frac{l}{PQ}$, de donde $PQ = \frac{al}{a+b}$.

Consideremos ahora el circuncírculo del triángulo PBR' y sea S la otra interseción de BQ con ese circuncírculo. Tenemos que el cuadrilátero $PBR'S$ es cíclico y $\angle R'SP = 180° - \angle PBR' = 180° - 120° = 60°$. Como $\angle PBS = \angle SBR'$ tenemos que los arcos $\widehat{SR'}$ y $\widehat{SP}$ son iguales y $SR' = SP$. Como $\angle R'SP = 60°$, podemos concluir que el triángulo $R'PS$ es equilátero.



También tenemos que $\angle BR'P = \angle BSP$, por lo que los triángulos $BR'Q$ y PSQ son semejantes y $\frac{BR'}{PS} = \frac{BQ}{PQ}$. Sustituyendo los valores conocidos, tenemos que

$$\frac{b}{l} = \frac{c}{l\left(\frac{a}{a+b}\right)},$$

de donde $b = \frac{c(a+b)}{a}$ o $ab = c(a+b)$. Luego, $\frac{1}{ab} = \frac{1}{c(a+b)}$ y $\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{c}$. Por lo tanto $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, como queríamos demostrar.

Problema 6. Un entero positivo es *divertido* si para todo d divisor positivo de n, $d+2$ es un número primo. Encuentre todos los números divertidos que tengan la mayor cantidad posible de divisores.

Solución de Antonio López Guzmán. Primero encontraremos cuál es el máximo número de divisores y luego veremos qué enteros cumplen.
Como n es un divisor de n, tenemos que $n+2$ tiene que ser primo. Como todo primo mayor que 3 es congruente con 1 o 5 módulo 6, tenemos que n tiene que ser congruente con 3 o 5 módulo 6. De la misma manera podemos concluir que todo divisor mayor que 1 de n tiene que ser congruente con 3 o 5 módulo 6.
Consideremos el caso en el que n es producto de dos divisores mayores que 1 (el otro caso implica que n es primo, el cual solo tiene dos divisores y quedará descartado al encontrar enteros que cumplen con más de dos divisores). Tenemos que $n = ab$ con a y b congruentes con 3 o 5 módulo 6. Por lo que n es congruente a $3 \cdot 3 \equiv 3$, $3 \cdot 5 \equiv 3$ o $5 \cdot 5 \equiv 1$ módulo 6. Como n tiene que ser a su vez congruente con 3 o 5 módulo 6, solo nos queda la opción de que $n \equiv 3 \pmod 6$, por lo que 3 divide a n.
Sean $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ los divisores primos de n. Sabemos que cada uno tiene que ser 3 o 5 $\pmod 6$, pero por ser primos impares, solo pueden ser congruentes a 1 o a

$5 \pmod 6$ (salvo el primo 3). Luego, salvo el primo 3, los divisores primos de n tienen que ser congruentes con $5 \pmod 6$.
Por otro lado, notamos que 3^4 es la máxima potencia de 3 que puede dividir a n, pues $3^5 = 243$ no lo puede dividir al no ser 245 un número primo. Además, notamos que si el único primo que divide a n es 3, tendremos a lo más 5 divisores.
Consideremos la descomposición canónica de n:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}.$$

Sabemos que $p_1 = 3$. Si para algún i con $2 \leq i \leq r$ se tiene que $\alpha_i \geq 2$, tendremos que p_i^2 sería divisor de n. Pero como $p_i^2 + 2 \equiv 5^2 + 2 \equiv 3 \pmod 6$ no puede ser primo, esto es imposible. Luego, $\alpha_i = 1$ para $i = 2, 3, \ldots, r$. De aquí, n es de la forma:

$$n = 3^{\alpha_1} p_2 p_3 \cdots p_r.$$

Ahora, si n tiene al menos tres divisores primos, tendremos que $p_2 p_3$ será un divisor de n, pero esto es imposible, pues $p_2 p_3 + 2 \equiv 5^2 + 2 \equiv 3 \pmod 6$ no puede ser primo. Luego, $r \leq 2$.
Si $r = 2$ tendremos que $n = 3^{\alpha_1} p$ el cual tendrá $2(\alpha_1 + 1)$ divisores. Como ya habíamos visto que $\alpha_1 \leq 4$, tenemos que n tendrá a lo más $2(4 + 1) = 10$ divisores. Veamos que no es posible que n tenga 10 divisores.
Para que tenga 10 divisores, n tiene que ser de la forma $3^4 p$ con p primo. Veamos los casos dependiendo el residuo de p módulo 10.

- Si $p \equiv 1 \pmod{10}$. Tenemos que $3p$ divide a n y que $3p + 2 \equiv 3 \cdot 1 + 2 \equiv 5 \pmod{10}$. Como $3p+2 > 5$, no puede ser primo y tenemos una contradicción.
- Si $p \equiv 3 \pmod{10}$. Tenemos que p es divisor de n y que $p + 2 \equiv 5 \pmod{10}$, llegando a la misma contradicción.
- Si $p \equiv 7 \pmod{10}$. Tenemos que $9p$ divide a n y $9p+2 \equiv 9 \cdot 7 + 2 \equiv 5 \pmod{10}$, lo cual no puede ser primo.
- Si $p \equiv 9 \pmod{10}$. Tenemos que $27p$ divide a n y $27p + 2 \equiv 7 \cdot 9 + 2 \equiv 5 \pmod{10}$, lo cual tampoco puede ser primo.
- Si $p \equiv 5 \pmod{10}$. Tenemos que $p = 5$ y $n = 405$. Como $407 = 11 \cdot 37$, también llegamos a una contradicción.

Luego, no es posible que n tenga 10 divisores y en el caso en el que $r = 2$, se tiene que $\alpha_1 \leq 3$. Considerando el mismo análisis, para no llegar a una contradicción, necesitamos que $p \equiv 5 \pmod{10}$ (o sea, $p = 5$) obteniendo el número $n = 3^3 5 = 135$. Los divisores de este número son: 1, 3, 5, 9, 15, 27, 45 y 135. Al sumarles 2 a cada uno obtengo los números 3, 5, 7, 11, 17, 29, 47 y 137, los cuales son todos primos. Luego, $n = 135$ cumple y es el único con la mayor cantidad posible de divisores, que resultó igual a 8.

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas de agosto a octubre de 2014.

21 al 31 de agosto, Morelia, Michoacán

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes selectivos para determinar a la delegacón para la XXIX Olimpiada Iberoamericana (4 alumnos).

1 de septiembre

Envío a los estados el examen final propuesto por el Comité Organizador de la OMM.

20 al 28 de septiembre, Tegucigalpa, Honduras

XXIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

Octubre

Publicación del vigésimo cuarto número de la revista “Tzaloa”.

Apéndice

Criterios 1 (Criterios de divisibilidad)**.** *Un número entero es divisible,*

- *entre* 2*, si el dígito de las unidades es un número par.*
- *entre* 3*, si la suma de sus dígitos es divisible entre* 3*.*
- *entre* 4*, si el número formado por los dos últimos dígitos (el de las unidades y el de las decenas) es divisible entre* 4*.*
- *entre* 5*, si el dígito de las unidades es* 5 *o* 0*.*
- *entre* 6*, si es divisible entre* 2 *y* 3*.*
- *entre* 8*, si el número formado por sus últimos tres dígitos es divisible entre* 8*.*
- *entre* 9*, si la suma de sus dígitos es divisible entre* 9*.*

Definición 2 (Divisibilidad)**.** *Si* a *y* b *son enteros, se dice que* b *divide* a *o que* a *es múltiplo de* b*, si* $a = bq$ *para algún entero* q*, y se denota por* $b \mid a$*.*

Definición 3 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros* a*,* b *y un entero positivo* m*, decimos que* a *es congruente con* b *módulo* m *si* $a - b$ *es múltiplo de* m*. En este caso escribimos* $a \equiv b \ (mod\ m)$*.*

Teorema 4 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean* a, b, c, d, m *enteros con* $m \geq 1$*.*

1. *Si* $a \equiv c \ (mod\ m)$ *y* $c \equiv d \ (mod\ m)$*, entonces* $a \equiv d \ (mod\ m)$*.*
2. *Si* $a \equiv c \ (mod\ m)$ *y* $b \equiv d \ (mod\ m)$*, entonces* $ab \equiv cd \ (mod\ m)$*.*
3. *Si* $a \equiv c \ (mod\ m)$*, entonces* $a^n \equiv c^n \ (mod\ m)$ *para todo entero positivo* n*.*
4. *Si* $ab \equiv bc \ (mod\ m)$*, entonces* $a \equiv c \ (mod\ \frac{m}{(b,m)})$ *donde* (b, m) *denota el máximo común divisor de* b *y* m*.*

Teorema 5 (Pequeño teorema de Fermat)**.** *Si* p *es un número primo y* a *es un entero primo relativo con* p*, entonces* $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$*.*

Teorema 6 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 7 (Principio de las casillas)**.** *Si $kn+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k+1$ objetos. En particular, si $n+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene dos o más objetos.*

Teorema 8 (Desigualdad media aritmética - media geométrica)**.** *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 9 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Para cualesquiera números reales x_1, $\ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ se cumple que,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

La igualdad se verifica si y sólo si existe un número real λ tal que $x_i = \lambda y_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 10 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)**.** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 11 (Teorema de Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 12 (Puntos y rectas notables de un triángulo)**.**

1. *Mediana. Recta que une un vértice y el punto medio del lado opuesto.*
2. *Centroide. Punto donde concurren las medianas. También se le llama gravicentro o baricentro.*
3. *Mediatriz. Recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.*
4. *Circuncentro. Punto donde concurren las mediatrices. Es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.*

5. *Bisectriz interna. Recta que divide a un ángulo interior de un triángulo en dos ángulos de la misma medida.*

6. *Incentro. Punto donde concurren las bisectrices internas. Es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.*

7. *Altura. Recta trazada desde un vértice que es perpendicular al lado opuesto de dicho vértice.*

8. *Ortocentro. Punto donde concurren las alturas.*

Definición 13 (Congruencia de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 14 (Criterio de congruencia LLL)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 15 (Criterio de congruencia ALA)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 16 (Semejanza de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir,*

$$\begin{aligned}\angle ABC &= \angle A'B'C'\\ \angle ACB &= \angle A'C'B'\\ \angle BAC &= \angle B'A'C'\end{aligned}$$

y sus lados homólogos son proporcionales, esto es

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Criterio 17 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Criterio 18 (Criterio de semejanza LAL)**.** *Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo entre dichos lados igual, entonces los triángulos son semejantes. A este criterio de semejanza se le conoce como lado-ángulo-lado y lo denotamos por LAL.*

Teorema 19 (Teorema de Thales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y sólo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 20 (Desigualdad del triángulo)**.** *Los números positivos a, b y c son las medidas de los lados de un triángulo si y sólo si se cumplen las siguientes relaciones,*

$$\begin{aligned} a+b &> c, \\ a+c &> b, \\ b+c &> a. \end{aligned}$$

Teorema 21 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco.*

Teorema 22 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 23 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 24 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, es decir,*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Teorema 25 (Teorema de Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 26 (Teorema de Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 27 (Excírculo)**.** *Decimos que una circunferencia $\mathcal{C}$ está exinscrita en el triángulo ABC respecto al ángulo $\angle BCA$, si $\mathcal{C}$ es tangente a los lados del ángulo $\angle BCA$ y al lado AB por fuera del triángulo dado. También se dice que $\mathcal{C}$ es el excírculo del triángulo ABC respecto al ángulo $\angle BCA$.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[7] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[8] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[10] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[11] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[14] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Directorio del Comité Organizador de la OMM

José Antonio Gómez Ortega (presidente)
Facultad de Ciencias, UNAM
jago@ciencias.unam.mx

Irving Daniel Calderón Camacho
Facultad de Ciencias, UNAM
irvingdanelc@ciencias.unam.mx

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
cobian@ciencias.unam.mx

Luis Cruz Romo
NA-AT Technologies
lcruzromo@gmail.com

Luis Eduardo García Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
microtarxcaty@ciencias.unam.mx

María Eugenia Guzmán Flores
CUCEI, Universidad de Guadalajara
marugeniag@gmail.com

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Facultad de Ciencias, UNAM
ssbmplayer@gmail.com

Ignacio Barradas Bibriesca
Universidad de Guanajuato
barradas@quijote.ugto.mx

Fernando Campos García
Facultad de Ciencias, UNAM
fermexico89@hotmail.com

David Cossío Ruiz
Depto. de Física y Matemáticas
Universidad Autónoma de Cd. Juárez
sirio11@gmail.com

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Metamorfosis del CIMAT
fuerunt@gmail.com

Luis Miguel García Velázquez
Instituto de Matemáticas, UNAM
lmgarcia@im.unam.mx

Jesús Jerónimo Castro
Facultad de Ingeniería
Universidad Autónoma de Querétaro
jesusjero@hotmail.com

Daniel Perales Anaya
Facultad de Ciencias, UNAM
dperanaya@hotmail.com

María Luisa Pérez Seguí
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo
psegui19@gmail.com

Miguel Raggi Pérez
Escuela Nacional de Estudios Superiores
Universidad Nacional Autónoma de México
mraggi@gmail.com

Olga Rivera Bobadilla
Facultad de Ciencias,
Universidad Autónoma del
Estado de México
olgarb@yahoo.com

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
carlos.rubio@uady.mx

David Guadalupe Torres Flores
Departamento de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
ddtorresf@gmail.com

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
valdez@uaem.mx

Rita Vázquez Padilla
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
ritavz14@gmail.com

Eduardo Velasco Barreras
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
lalovelascobar@gmail.com

Hugo Villanueva Méndez
Centro de Estudios en Física y Matemáticas
Básicas y Aplicadas
Universidad Autónoma de Chiapas
hugo.villanueva@unach.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@ciencias.unam.mx`

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

`http://www.ommenlinea.org`

¡Síguenos en facebook y en twitter!