TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2011, No. 4

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.omm.unam.mx

Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Impreso y hecho en México.
Octubre de 2011.

Todos los que hacemos Tzaloa queremos dedicar este número de manera muy especial a Mila, ya que gracias a ella el éxito de la OMM en los últimos años y Tzaloa misma se hicieron una realidad.

Contenido

Presentación

Tzaloa, Año 2011, Número 4

No cabe duda que este ha sido un gran año para la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Por primera vez toda la delgación mexicana que participó en la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO) obtuvo una medalla y se ganó el lugar 22 de entre los 102 países que participaron. Además de que esta fue la mejor actuación jamás lograda por nuestro país en la IMO, también hay que destacar que por primera vez en el examen de este concurso se incluyó un problema propuesto por México. Adicionalmente y por si lo anterior no fuera poco, este año las delegaciones mexicanas obtuvieron el primer lugar tanto en la Olimpiada Iberoamericana, como en la Olimpiada de Centroamérica y el Caribe, misma en la que México impuso un nuevo record histórico de puntaje para el evento.

Por todo lo anterior, para el último número del año 2011, en Tzaloa decidimos incluir un artículo especial con el que nos unimos al festejo de este XXV aniversario de la organización olímpica en México. Este artículo, que presenta una breve semblanza histórica de las olimpiadas en nuestro país, fue escrito por Radmila Bulajich quien desde 2004 es la presidenta del Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas y cuya dedicación ha sido fundamental para elevar el prestigio de México en el plano internacional y para alcanzar los éxitos que hoy nos enorgullecen.

Como cada fin de año, las secciones *Problemas de Práctica y Problemas Propuestos*, incluyen varios problemas considerados de nivel avanzado, pues con ellos se busca proporcionar material adecuado para las delegaciones estatales que se están preparando arduamente para participar en el concurso nacional, mismo que se celebrará en noviembre. Sin embargo, lo anterior no debe prejuiciar a los lectores que apenas se están iniciando, pues hay que considerar que una idea original y creativa puede hacer que un problema considerado difícil encuentre una solución sencilla y elegante.

El artículo de temas matemáticos que seleccionamos para esta ocasión tiene por título

Un lema de perpendicularidad y es una colaboración más de José Antonio Gómez Ortega. Nuevamente el compromiso de José Antonio con el movimiento olímpico se hace patente presentándonos este singular resultado. Estamos seguros de que, al igual que nosotros, el lector no dejará de sorprenderse ante el poder y utilidad que se esconde detrás de una formulación tan sencilla y de apariencia inocente. Las aplicaciones tomadas de concursos nacionales e internacionales, junto con la nutrida lista de ejercicios que presenta, hacen que este material sea especialmente atractivo para darle un extra a tu preparación para el próximo concurso.

Por último y como siempre, en las secciones de Olimpiadas Internacionales se incluyen los resultados y exámenes de los concursos en los que México ha participado últimamente. Es así que presentamos los exámenes de la 52^a Olimpiada Internacional de Matemáticas y de la XXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Además también incluimos los exámenes con soluciones de la XIII Olimpiada de Centroamérica y el Caribe y de la American Mathematics Competition (AMC10 y AMC12) de este año.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Hace más de 24 años que la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Desde sus inicios, este programa se ha visto fortalecido gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

25^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 25^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1992. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2011-2012 y, para el 1° de julio de 2012, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.omm.unam.mx`

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 25^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 13 al 19 de noviembre de 2011 en San Luis Potosí, San Luis Potosí. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2012: la XXIV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, que se llevará a cabo en el mes de marzo; la XIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, que se celebrará en el mes de junio; la 53^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se llevará a cabo en julio en Argentina, y la XXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en el mes de septiembre en Bolivia.

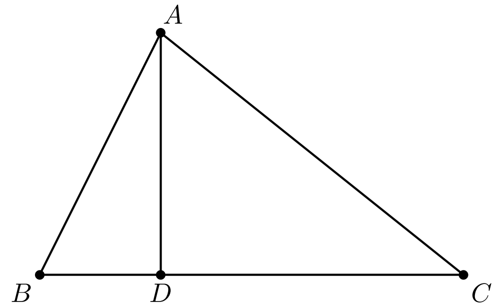
Un Lema de Perpendicularidad

Por José Antonio Gómez Ortega

Nivel Intermedio

En el estudio de la geometría del triángulo las alturas tienen un papel importante. La forma común de definir la altura por el vértice A de un triángulo ABC, es como la recta por A que es perpendicular al lado opuesto BC. A tal recta la llamaremos la *altura geométrica*. Sin embargo, existe una caracterización de la altura como lugar geométrico. Precisemos esto. Primero notemos que si D es el pie de la perpendicular de A sobre BC, se tiene por el teorema de Pitágoras que,

$$AB^2 - AC^2 = (AD^2 + BD^2) - (AD^2 + DC^2) = BD^2 - DC^2.$$



Ahora, si P es un punto sobre la altura geométrica, el pie de la perpendicular de P sobre BC es desde luego D, y de manera análoga se tiene también que,

$$PB^2 - PC^2 = BD^2 - DC^2.$$

Por lo que, $PB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2$, es decir un punto sobre la altura geométrica desde A sobre BC, se encuentra en el conjunto,

$$\{P \text{ tal que } PB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2\},$$

que llamaremos la *altura algebraica*.
Recíprocamente, un punto de este lugar geométrico deberá estar sobre la altura geométrica. En efecto, si P está sobre la altura algebraica, es decir, si cumple que $PB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2$ y si E es el pie de la perpendicular de P sobre BC, se tendrá que P está sobre la altura geométrica si $E = D$. Veamos que esto último sucede.
Por el Teorema de Pitágoras $PB^2 - PC^2 = BE^2 - EC^2$. Pero como $PB^2 - PC^2 = BD^2 - DC^2$, tenemos que (usando segmentos dirigidos),

$$\begin{aligned} BE^2 - EC^2 &= BD^2 - DC^2 \\ (BE + EC)(BE - EC) &= (BD + DC)(BD - DC) \\ BE - EC &= BD - DC \\ BD + DE - EC &= BD - (DE + EC) \\ DE &= -DE. \end{aligned}$$

De donde $D = E$. Todo lo anterior permite afirmar el siguiente,

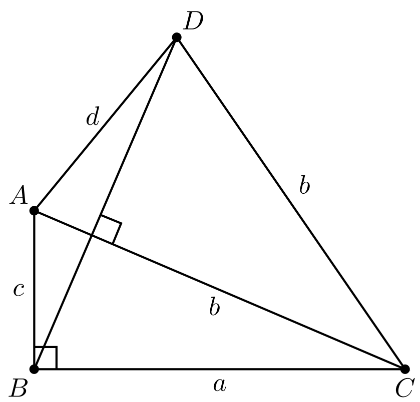
Lema de perpendicularidad. *Los segmentos BC y AD son perpendiculares si y sólo si,*

$$DB^2 - DC^2 = AB^2 - AC^2.$$

Notemos que cuando decimos que los segmentos BC y AD son perpendiculares, hay la posibilidad de que estos no se corten, nos referiremos en tal caso a las rectas que tales segmentos determinan. Veamos ahora varios ejemplos del uso de este singular Lema.

Ejemplos

Ejemplo 1 (Lista corta de la OMCC, 2009). Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en B. Sea D un punto tal que BD es perpendicular a AC y $DC = AC$. Encuentra $\frac{AD}{AB}$.

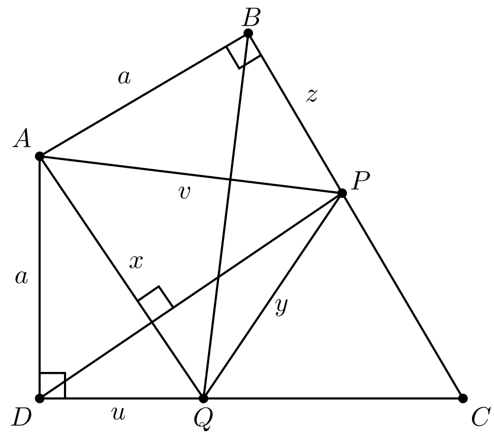


Como BD es perpendicular a AC, se tiene por el lema de perpendicularidad que, $d^2 - b^2 = c^2 - a^2$, por lo que, $d^2 = c^2 + b^2 - a^2$. Y por el teorema de Pitágoras $b^2 = a^2 + c^2$. Luego $d^2 = 2c^2$ y entonces $\frac{AD}{AB} = \frac{d}{c} = \sqrt{2}$.

Ejemplo 2 (Examen regional de la zona centro de la OMM, 2008/6, Rusia, 1995). En el cuadrilátero $ABCD$, se tiene que $AB = AD$ y $\angle B = \angle D = 90°$. Los puntos P y Q se encuentran sobre BC y CD, respectivamente, de manera que AQ es perpendicular a DP. Muestra que AP es perpendicular a BQ.

Solución. Sean $a = AB = AD$, $x = AQ$, $y = QP$, $z = BP$. Por el lema de perpendicularidad bastará ver que: $x^2 - y^2 = a^2 - z^2$.
Sean $u = DQ$ y $v = AP$, entonces tenemos que:

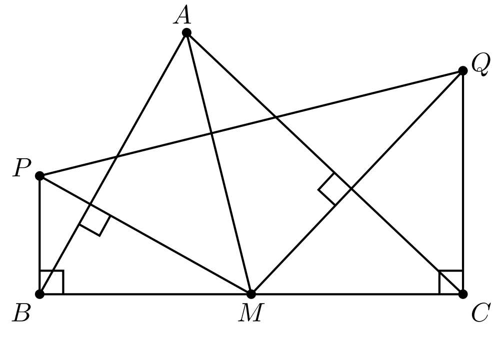
$$x^2 - y^2 = a^2 + u^2 - y^2 = a^2 + a^2 - v^2 = a^2 - z^2.$$



La primera igualdad es por el teorema de Pitágoras en el triángulo ADQ, la segunda por el lema de perpendicularidad con las perpendiculares AQ y DP y la última por el teorema de Pitágoras en el triángulo ABP.

Ejemplo 3 (OMM 2009/5). Sea ABC un triángulo, y sea M un punto en BC. Sea P la intersección de las perpendiculares a AB por M y a BC por B, y sea Q la intersección de las perpendiculares a AC por M y a BC por C. Muestra que PQ es perpendicular a AM si y sólo si M es el punto medio de BC.

Solución. Por el Lema de perpendicularidad, PQ es perpendicular a AM si y sólo si $PA^2 - PM^2 = QA^2 - QM^2$.



Por el lema de perpendicularidad,

$$\begin{array}{rcl} AB \perp PM & \Longleftrightarrow & PA^2 - PB^2 = MA^2 - MB^2 \\ AC \perp QM & \Longleftrightarrow & QA^2 - QC^2 = MA^2 - MC^2. \end{array}$$

Por el teorema de Pitágoras en los triángulos PBM y QCM se tiene que, $PM^2 = PB^2 + BM^2$ y $QM^2 = QC^2 + MC^2$, respectivamente.
Luego,

$$\begin{array}{rcl} PA^2 - PM^2 & = & PA^2 - (PB^2 + BM^2) = (PA^2 - PB^2) - BM^2 \\ & = & (MA^2 - MB^2) - BM^2 = MA^2 - 2BM^2, \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} QA^2 - QM^2 & = & QA^2 - (QC^2 + MC^2) = (QA^2 - QC^2) - MC^2 \\ & = & (MA^2 - MC^2) - MC^2 = MA^2 - 2MC^2. \end{array}$$

Por tanto,

$$\begin{array}{rcl} PA^2 - PM^2 = QA^2 - QM^2 & \Longleftrightarrow & MA^2 - 2BM^2 = MA^2 - 2MC^2 \\ & \Longleftrightarrow & BM = MC \\ & \Longleftrightarrow & M \text{ es el punto medio de } BC. \end{array}$$

Ejemplo 4 (OIM 1996/6). Se tienen n puntos distintos $A_1, \ldots, A_n$ en el plano y a cada punto A_i se ha asignado un número real λ_i distinto de cero, de manera que

$$A_iA_j^2 = \lambda_i + \lambda_j, \text{para todos los } i, j \text{ con } i \neq j.$$

Demuestre que $n \leq 4$.

Solución. Supongamos que $n \geq 4$ (si no, la afirmación es evidente) y consideremos cuatro de tales puntos A_i, A_j, A_k, A_l. Por hipótesis tenemos

$$A_iA_j^2 + A_kA_l^2 = (\lambda_i + \lambda_j) + (\lambda_k + \lambda_l) = (\lambda_i + \lambda_k) + (\lambda_j + \lambda_l) = A_iA_k^2 + A_jA_l^2$$

luego,

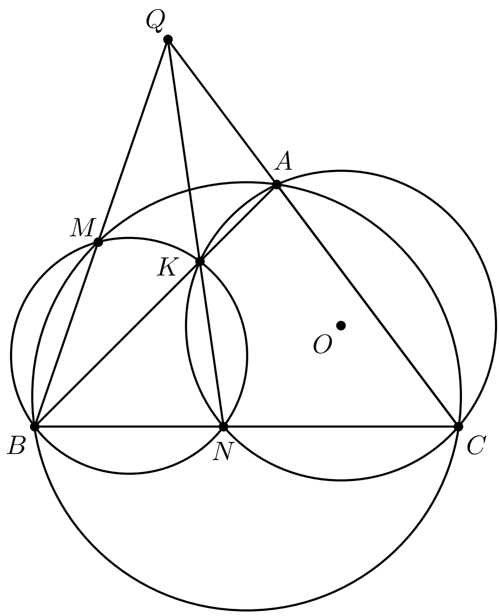
$$A_iA_j^2 - A_iA_k^2 = A_jA_l^2 - A_kA_l^2.$$

Por el lema, las rectas A_jA_k y A_iA_l son perpendiculares. Por simetría, se tiene que la recta que pasa por cualesquiera dos de los puntos $A_1, \ldots, A_n$ es perpendicular a la recta por cualesquiera otros dos.

Consideremos ahora el triángulo $A_1A_2A_3$. Cualquier otro punto A_i con $i \geq 4$ debe estar sobre la perpendicular a A_1A_2 trazada por A_3, esto es, sobre la altura correspondiente a A_3 en este triángulo, y también sobre las otras dos alturas de tal triángulo. El único punto que reúne estos requisitos es el ortocentro del triángulo $A_1A_2A_3$. En consecuencia si $n \geq 4$ deberá suceder forzosamente $n = 4$.

Ejemplo 5 (IMO, 1985/5). Una circunferencia con centro O pasa por los vértices A y C del triángulo ABC, y corta a los lados AB y BC en los puntos K y N, respectivamente. Sea M el punto de intersección de los circuncírculos de los triángulos ABC y KBN (diferente de B). Muestra que $\angle OMB = 90°$.

Solución. Usaremos varios hechos que la geometría del problema sugiere. Primero necesitamos tener un buen dibujo, donde se resalten las circunferencias del problema, que son los circuncírculos de los triángulos ABC, KAC y BNK. Sea Q el cento radical de estas circunferencias, es decir, el punto donde concurren las rectas BM, KN y CA y sea r el radio de la circunferencia con centro O.



Como los cuadriláteros $AKNC$ y $BNKM$ son cíclicos se tiene que $AKMQ$ es también un cuadrilátero cíclico (se sigue de que los ángulos $\angle KAQ$, $\angle KMB$ y $\angle KNC$, son iguales).

La potencia de Q al circuncírculo (O, r) de $AKNC$ es, $QO^2 - r^2 = QK \cdot QN = QM \cdot QB$ y la potencia de B a (O, r) es, $BO^2 - r^2 = BK \cdot BA = BM \cdot BQ$, por lo que,

$$\begin{aligned} QO^2 - BO^2 &= QM \cdot QB - BM \cdot BQ \\ &= QM \cdot (QM + MB) - BM \cdot (BM + MQ) \\ &= QM^2 + QM \cdot MB - BM \cdot MQ - BM^2 \\ &= QM^2 - BM^2. \end{aligned}$$

Por el lema, lo anterior basta para garantizar que OM es perpendicular a BQ.

Ejercicios

1. Dos circunferencias, una con centro P y otra con centro Q, se intersectan en los puntos A y B. Muestra que AB es perpendicular a PQ. (Sugerencia: Expresa $AP^2 - AQ^2$ en términos de los radios de las circunferencias.)

2. Demuestra que las alturas de un triángulo concurren. (Sugerencia: Considera H la intersección de las alturas por A y B. Demuestra que H está en la altura algebraica por C.)

3. Sean ABC un triángulo, AD, BE, CF sus alturas y H su ortocentro. Si N es el punto medio de AH y M el punto medio de BC. Muestra que MN es perpendicular a EF. (Sugerencia: $AFHE$ y $BCEF$ son cuadriláteros cíclicos y los centros de las circunferencias donde se encuentran tales cuadriláteros son N y M.)

4. Sea ABC un triángulo isósceles, L el punto medio de la base BC y N sobre AC de manera que LN es perpendicular a AC. Si M es el punto medio de LN, muestra que AM es perpendicular a BN. (Sugerencia: Considera el punto N' sobre la recta LN de manera que $N'L = LN$, el triángulo rectángulo $BN'M$ es clave para encontrar BM^2.)

5. (Bielorrusia, 2000) Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con $AB = BD = AC$. Sea P el punto de intersección de las diagonales AC y BD, y sean O e I el circuncentro e incentro de ABP. Muestra que OI es perpendicular a CD. (Sugerencia: Sean E, F, G los puntos de contacto del incírculo de ABP con BP, PA, AB, respectivamente. Sean R y r el circunradio e inradio de ABP. Nota que $AF = AD = DE$, $GB = BE = CF$ y $FP = PE$. Para calcular CI^2, DI^2 usa Pitágoras y para calcular CO^2 y DO^2 usa la potencia al circuncírculo (O, R) de ABP.)

6. (Estados Unidos, 1997) Sea ABC un triángulo. Sobre los lados se construyen exteriormente triángulos equiláteros BCD, CAE, ABF. Muestra que las rectas perpendiculares a EF, FD, DE que pasan por A, B, C, respectivamente son concurrentes. (Sugerencia: Sea P el punto común de la perpendicular a FD por B con la perpendicular a DE por C. Ahora muestra que $AP \perp EF$.)

7. (Hong Kong, 2001) Sean ABC un triángulo, AD, BE, CF sus alturas, O su circuncentro y H su ortocentro. Si las rectas ED y AB se cortan en M y las

rectas FD y AC se cortan en N, muestra que OH y MN son perpendiculares. (Sugerencia: Primero demuestra que $OB \perp DN$ y $OC \perp DM$. Después usa también que $CH \perp MA$, $BH \perp NA$ y $DA \perp BC$.)

Bibliografía

1. Bulajich, R., Gómez, J.A. *Geometría.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. SMM-Imate de la UNAM, 2002.

2. Gómez Ortega, J.A. *Algunas maneras de usar la potencia.* Revista Tzaloa de la OMM, No. 4, 2009.

Problemas de Práctica

A continuación te presentamos los 20 problemas de nivel intermedio y avanzado que seleccionamos para que pongas a prueba tus conocimientos y habilidades. Aunque en la siguiente sección encontrarás las soluciones de todos, no te recomendamos consultarla sino hasta después de que le hayas dedicado bastante tiempo a cada problema. Ten en cuenta que al consultar la solución de un problema sin haber hecho un verdadero esfuerzo para resolverlo, desperdicias la oportunidad de incrementar tu capacidad para enfrentar situaciones difíciles.

Por último, te invitamos a contribuir para que esta sección de la revista se siga enriqueciendo con la participación de todos. Estamos seguros que concoces y tienes problemas interesantes que proponer, por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus sugerencias.

Problema 1. Determina todos los enteros positivos $n > 2011$ tales que para todo entero k con $1 \leq k \leq n - 2011$, los números $n + k$ y $2011 + k$ son primos relativos.

Problema 2. Encuentra todos los números de tres dígitos que se incrementan en un $75\,\%$ cuando sus dígitos se invierten.

Problema 3. Encuentra todas las soluciones en números reales x, y, z del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} &= 3, \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + z\sqrt{z} &= 3, \\ x^2\sqrt{x} + y^2\sqrt{y} + z^2\sqrt{z} &= 3. \end{aligned}$$

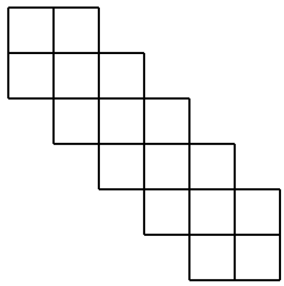
Problema 4. Sea ABC un triángulo. Sea D el punto que se obtiene al prolongar BC de manera que $BD = BA$ y B está entre C y D. Si M es el punto medio de AC y la bisectriz del ángulo $\angle ABC$ intersecta a DM en P, prueba que $\angle BAP = \angle ACB$.

Problema 5. Sean A y B enteros positivos de tres dígitos, y $A * B$ el entero de seis dígitos que se obtiene al colocarlos lado a lado. Encuentra todos los enteros A y B tales que los números A, B, $B - A$, $A * B$ y $\frac{A*B}{B}$ sean todos cuadrados perfectos.

Problema 6. Sean p, q y r tres números reales distintos de cero tales que $-p$, $2q$ y $3r$ son las soluciones de la ecuación $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. Determina los valores de p, q y r.

Problema 7. Sea ABC un triángulo, D, E y F puntos sobre el lado BA tales que CD es altura, CE es bisectriz del ángulo ACD y CF es bisectriz del ángulo DCB. Demuestra que, si el incentro del triángulo ABC coincide con el circuncentro del triángulo ECF, entonces $\angle BCA = 90°$.

Problema 8. Sea $n > 1$ un entero. Se han pegado n cuadrados de 2×2 como se muestra en la figura para $n = 5$.



- Determina la máxima cantidad de monedas que puedes poner de modo que no haya dos monedas ni en la misma casilla, ni en casillas que compartan un lado o un vértice.
- Para esta máxima cantidad de monedas, determina de cuántas formas se pueden poner las monedas.

Problema 9. Sean a, b, c, d números reales positivos tales que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Demuestra que $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 \geq a + b + c + d$.

Problema 10. Demuestra que no existen enteros positivos a y b tales que $a^2 + 2b^2$ y $b^2 + 2a^2$ sean cuadrados perfectos.

Problema 11. Sean ABC un triángulo y D, E y F los puntos de tangencia de su incírculo con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sean P y Q las intersecciones de DE y DF con la bisectriz interna del $\angle ABC$ y con la bisectriz interna del $\angle ACB$ respectivamente. Demuestra que E, F, Q y P están en una misma circunferencia y que $PQ = AF$.

Problema 12. Determina el menor valor posible de la suma,

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2,$$

si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números enteros distintos y $n \geq 2$.

Problema 13. Sean x, y, a números reales tales que:

$$x + y = x^3 + y^3 = x^5 + y^5 = a.$$

Determina todos los valores posibles de a.

Problema 14. Un cubo contiene n^3 cubitos unitarios. Una recta que pasa por el centro de n cubitos unitarios es llamada interesante. Determina si existe $n > 1$, tal que el número de rectas interesantes es una potencia de 2.

Problema 15. Determina todos los enteros positivos n para los cuales entre los números $n, n+1, n+2, \ldots, n^2$, existen cuatro números distintos a, b, c y d tales que $ab = cd$.

Problema 16. Desde un punto O parten cuatro rayos OA, OC, OB y OD en ese orden y tales que $\angle AOB = \angle COD$. Además supongamos que una circunferencia tangente a los rayos AO y OB intersecta a una circunferencia tangente a los rayos OC y OD en los puntos E y F. Demuestra que $\angle AOE = \angle DOF$.

Problema 17. Sea n un entero positivo tal que $\sqrt{1 + 12n^2}$ es un entero. Demuestra que,

$$2 + 2\sqrt{1 + 12n^2}$$

es el cuadrado de un entero.

Problema 18. Encuentra todas las ternas de números reales (x, y, z) tales que,

$$x(1 - y^2)(1 - z^2) + y(1 - z^2)(1 - x^2) + z(1 - x^2)(1 - y^2) = 4xyz = 4(x + y + z).$$

Problema 19. Demuestra que sin importar el valor de a, el polinomio,

$$x^3 - 2x^2 + ax - \frac{1}{3}$$

no puede tener todas sus raíces reales positivas.

Problema 20. En un pizarrón hay 4 números que sabemos corresponden, no necesariamente en orden, a los valores de $m + n$, $m - n$, mn y $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros positivos. Demuestra que m y n están determinados de manera única.

Soluciones a los Problemas de Práctica

A continuación encontrarás las soluciones de los 20 problemas de práctica de la sección anterior. Como siempre, las soluciones que presentamos no son necesariamente las únicas y probablemente tampoco son las mejores, por lo que es muy posible que tú hayas encontrado una solución distinta pero igualmente válida. Si este es el caso y no estás muy seguro de su validez o simplemente la quieres compartir con nosotros te invitamos para que nos escribas a `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Sea $m = n-2011$, entonces para todos los enteros positivos k, con $1 \leq k \leq m$, tenemos que $2011+k$ y $n+k$ tienen máximo común divisor igual a 1. Pero entonces, el máximo común divisor de $2011+k$ y $n+k-(2011+k) = m$ es 1. Luego, m es primo relativo con los m enteros consecutivos $2012, 2013, \ldots, 2011+m$. Pero entre m enteros consecutivos, siempre hay uno que es divisible entre m, lo cual es una contradicción si $m > 1$. Si $m = 1$, entonces $n = 2011 + 1 = 2012$ y este número satisface las condiciones del problema. Por lo tanto, la única solución es $n = 2012$.

Solución del problema 2. Sea abc un número de tres dígitos que cumple la propiedad, donde $0 < a < 10$ y $0 \leq b, c < 10$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{7}{4}(100a + 10b + c) &= 100c + 10b + a \\
700a + 70b + 7c &= 400c + 40b + 4a \\
696a + 30b - 393c &= 0 \\
232a + 10b &= 131c.
\end{aligned}$$

Luego, tenemos que $c \equiv 2a \pmod{10}$, es decir, $c = 2a + 10k$ para algún entero k. De aquí,

$$\begin{aligned}
232a + 10b &= 262a + 1310k, \\
b &= 3a + 131k.
\end{aligned}$$

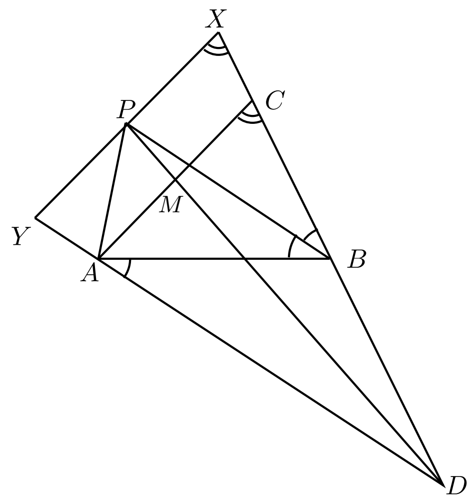
Como a y b son enteros tales que $0 < a < 10$ y $0 \leq b < 10$, debemos tener que $k = 0$. Luego, $b = 3a$ y $c = 2a$. Por lo tanto, todos los números abc, con $c = 2a$ y $b = 3a$ se incrementan un $75\,\%$ cuando sus dígitos se invierten y estos son: 132, 264 y 396.

Solución del problema 3. Sumando la primera ecuación a la tercera y restando dos veces la segunda, obtenemos,

$$\begin{aligned}(x^2+1-2x)\sqrt{x}+(y^2+1-2y)\sqrt{y}+(z^2+1-2z)\sqrt{z} &= 3+3-2(3)\\ (x-1)^2\sqrt{x}+(y-1)^2\sqrt{y}+(z-1)^2\sqrt{z} &= 0.\end{aligned}$$

Cada uno de los tres sumandos es no negativo, luego cada uno es igual a cero, es decir, $(x-1)^2\sqrt{x} = (y-1)^2\sqrt{y} = (z-1)^2\sqrt{z} = 0$. Entonces, x, y y z valen 0 o 1. Como $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} = 3$, debemos tener que $x = y = z = 1$. Finalmente es fácil ver que esta terna $(1, 1, 1)$ satisface las ecuaciones del sistema, por lo que es la única solución.

Solución del problema 4. Sea PX la paralela a AC de manera que X esté en BC y denotemos por Y al punto de intersección de PX con AD.



Tenemos que P es punto medio de XY porque M es punto medio de AC. Como, $2\angle DAB = \angle DAB + \angle BDA = \angle ABC = 2\angle PBA$, entonces PB es paralela a AD, luego B es punto medio de DX. Por lo tanto, $BX = BD = AB$. Como $AB = XB$ y $\angle ABP = \angle XBP$, entonces los triángulos BPX y BPA son congruentes. Entonces, $\angle BAP = \angle BXP = \angle BCA$.

Solución del problema 5. Sean $A = x^2$, $B - A = y^2$ y $B = z^2$ para ciertos enteros positivos x, y, y z. Es claro que $x^2 + y^2 = z^2$. Además $A * B = 1000A + B$ de modo que $\frac{A*B}{B} = \frac{1000A+B}{B} = \frac{1000x^2+z^2}{z^2}$. Como $\frac{A*B}{B}$ es un entero (pues es un cuadrado) se sigue que z^2 debe dividir a $1000x^2 + z^2$ y por lo tanto z^2 divide a $1000x^2$. Sea q el máximo común divisor de x, y y z. Entonces, $x = qx_1$, $y = qy_1$ y $z = qz_1$ con x_1,

y_1 y z_1 enteros positivos primos relativos, luego $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$ y z_1^2 divide a $1000x_1^2$. Como $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$ y x_1, y_1, z_1 son primos relativos, se sigue que z_1 y x_1 también son primos relativos así como x_1 y y_1, de modo que z_1^2 divide a 1000. Luego, los posibles valores de z_1 son 1, 2, 5 o 10.

1. Si $z_1 = 1$, tenemos que $x_1^2 + y_1^2 = 1$ lo cual no puede ser porque x_1 y y_1 son enteros positivos.

2. Si $z_1 = 2$, tenemos que $x_1^2 + y_1^2 = 4$ lo que tampoco puede ser ya que no es posible escribir a 4 como suma de dos cuadrados.

3. Si $z_1 = 5$, entonces $x_1^2 + y_1^2 = 25$ de donde $x_1 = 3$ y $y_1 = 4$ o bien $x_1 = 4$ y $y_1 = 3$. En el primer caso, tenemos que $\frac{A*B}{B} = \frac{1000q^2x_1^2+q^2z_1^2}{q^2z_1^2} = \frac{1000x_1^2+z_1^2}{z_1^2} = 361 = 19^2$ y,

   $$A * B = 1000A + B = 9000q^2 + 25q^2 = 9025q^2 = (95q)^2.$$

   Observemos que para cualquier q, A y B satisfacen todas las condiciones del problema, sin embargo para que A y B sean números de tres dígitos, q debe ser 4, 5 o 6. Luego, los posibles valores para (A, B) son: $(144, 400), (225, 625)$ y $(324, 900)$. En el segundo caso tenemos que $\frac{A*B}{B} = 641$ que no es un cuadrado.

4. Si $z_1 = 10$, entonces $x_1^2 + y_1^2 = 100$. De aquí es claro que $1 \leq x_1 \leq 10$. Checando todas las posibilidades encontramos que sólo $x_1 = 6$, $y_1 = 8$ o $x_1 = 8$ y $y_1 = 6$ satisfacen la ecuación. Como x_1 y y_1 deben ser primos relativos, concluimos que no hay soluciones en este caso.

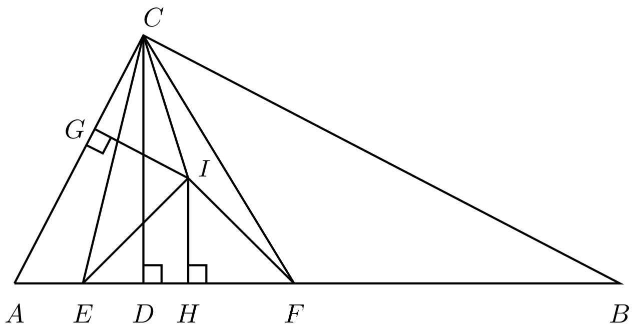
Por lo tanto, las parejas de enteros (A, B) que satisfacen las condiciones del problema son $(144, 400), (225, 625)$ y $(324, 900)$.

Solución del problema 6. Como $-p$, $2q$ y $3r$ son las soluciones de la ecuación $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, tenemos que,

$$\begin{aligned} x^3 + px^2 + qx + r &= (x+p)(x-2q)(x-3r) \\ &= x^3 + x^2(p - 3r - 2q) + x(6qr - 3pr - 2qp) + 6qpr. \end{aligned}$$

Luego, $p = p - 3r - 2q$, $q = 6qr - 3pr - 2qp$ y $r = 6pqr$. Considerando las primeras dos ecuaciones tenemos que, $2q + 3r = 0$ y $q = (-p)(2q + 3r) + 6qr$, luego, $q = 6qr$. Pero $q \neq 0$, entonces $r = \frac{1}{6}$ y por lo tanto, $q = -\frac{1}{4}$. Ahora bien como $6pqr = r$, tenemos que $p = -\frac{2}{3}$. Por lo tanto, la única solución es: $p = -\frac{2}{3}$, $q = -\frac{1}{4}$ y $r = \frac{1}{6}$.

Solución del problema 7. Sea I el incentro del triángulo ABC (que a su vez es circuncentro del triángulo CEF), sean G y H los pies de las perpendiculares desde I a AC y AB, respectivamente y sea $\gamma = \frac{1}{2}\angle BCA$.

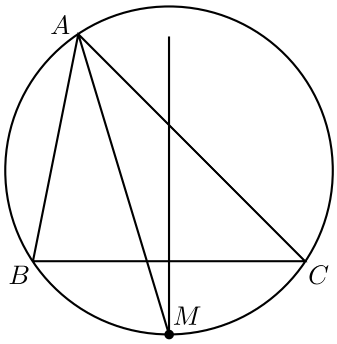


Como CI es la bisectriz del ángulo $\angle BCA$, $\angle ICG = \gamma$. Además CE y CF son bisectrices de los ángulos $\angle DCA$ y $\angle BCD$, respectivamente, tenemos que

$$\angle FCE = \angle FCD + \angle DCE = \frac{1}{2}\angle BCD + \frac{1}{2}\angle DCA = \frac{1}{2}\angle BCA = \gamma.$$

Luego, como I es el circuncentro del triángulo CEF, $\angle FIE = 2\angle FCE = 2\gamma$ y como los triángulos FIH y EIH son congruentes tenemos que $\angle FIH = \angle HIE = \gamma$.
Consideremos los triángulos rectángulos HIE y GIC. Tenemos que $IC = IE$, por ser I el circuncentro del triángulo CEF y $GI = HI$ por ser I el incentro del triángulo ABC. Por el teorema de Pitágoras tenemos que $CG = EH$ y los triángulos son congruentes, de donde $\angle GIC = \angle HIE = \gamma$. Entonces el triángulo GIC tiene ángulos γ, γ y $90°$ de donde $\gamma = 45°$ y $\angle BCA = 90°$.

Solución alternativa. Recordemos que en todo triángulo la bisectriz de un ángulo y la mediatriz del lado opuesto concurren en el circuncírculo del triángulo. De hecho concurren en el punto medio del arco correspondiente al lado opuesto, como muestra la figura.



Tenemos que $CI = IE$, por lo que I está en la mediatriz del segmento CE y además AI es bisectriz del ángulo CAE, por lo tanto I está en el circuncentro del triángulo CAE, es decir, el cuadrilátero $CAEI$ es cíclico, luego

$$\angle ICE = \angle IAE = \frac{1}{2}\angle CAB.$$

Análogamente $\angle FCI = \frac{1}{2}\angle ABC$. Sumando estas relaciones obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\angle CAB + \angle ABC) &= \angle ICE + \angle FCI = \angle FCE \\ &= \angle DCE + \angle FCD = \frac{1}{2}\angle DCA + \frac{1}{2}\angle BCD \\ &= \frac{1}{2}\angle BCA.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\angle CAB + \angle ABC = \angle BCA$ y $\angle BCA = 90°$.

Solución del problema 8. Para encontrar el máximo, veamos que si hay dos monedas en un mismo cuadrado de 2×2, entonces estas monedas están en casillas que comparten un lado o un vértice. Así, no puede haber más de n monedas. Por otro lado, siempre es posible acomodar n monedas, veamos de cuántas formas.
Si $n = 2$ es fácil ver que hay 7 formas de poner las dos monedas con las condiciones requeridas.
Si ponemos una moneda en alguna de las casillas sombreadas de la Figura 1, dicha moneda estará en dos cuadrados de 2×2 y entonces no podremos poner n monedas. El segundo cuadrado de 2×2 necesita una moneda para que se alcance el máximo, de modo que se necesita una moneda en alguna de las casillas marcadas con A en la Figura 1. Esto determina totalmente la ubicación de las monedas en los tableros de 2×2 de enmedio, y elimina una posibilidad en los tableros de 2×2 de las orillas.

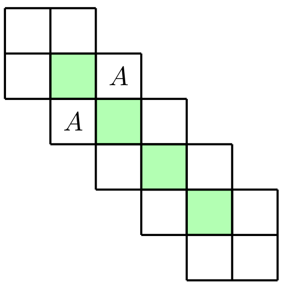


Figura 1

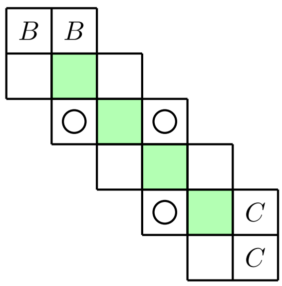


Figura 2

Digamos que en el segundo cuadrado elegimos la casilla inferior izquierda. Notamos que tendremos dos opciones para la moneda del primer cuadrado (en este caso las casillas marcadas con B) y dos opciones para la moneda del último cuadrado (en este caso las casillas marcadas con C). Eso nos da un total de $2 \times 2 = 4$ formas. Por simetría también habrá 4 formas si en el segundo cuadrado elegimos la casilla superior izquierda. Por lo tanto hay 8 maneras de colocar las monedas si $n \geq 3$.

Solución del problema 9. Por la desigualdad de las potencias (ver en el apéndice el teorema 7), tenemos que

$$\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{4}} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} = 1,$$

de donde $a^4+b^4+c^4+d^4 \geq 4$. Notemos que $(a^4-1)(a-1) \geq 0$ (pues ambos factores tienen el mismo signo), desarrollando obtenemos que $a^5+1 \geq a^4+a$. Sumando esta desigualdad con las tres análogas obtenemos que

$$a^5+b^5+c^5+d^5+4 \geq a^4+b^4+c^4+d^4+a+b+c+d \geq 4+a+b+c+d,$$

de donde $a^5+b^5+c^5+d^5 \geq a+b+c+d$.

Solución alternativa. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $a \geq b \geq c \geq d$. Como son positivos, tenemos que $a^3 \geq b^3 \geq c^3 \geq d^3$ y que $a^2 \geq b^2 \geq c^2 \geq d^2$. Usando la desigualdad de Tchebyshev (ver en el apéndice el teorema 8) dos veces y la hipótesis tenemos que,

$$\begin{aligned}
\frac{a^3\cdot a^2+b^3\cdot b^2+c^3\cdot c^2+d^3\cdot d^2}{4} &\geq \left(\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}\right)\\
&= \frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}\\
&= \frac{a^2\cdot a+b^2\cdot b+c^2\cdot c+d^2\cdot d}{4}\\
&\geq \left(\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}\right)\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)\\
&= \frac{a+b+c+d}{4}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $a^5+b^5+c^5+d^5 \geq a+b+c+d$.

Solución del problema 10. Supongamos que existen enteros positivos a, b con esas condiciones, es decir, $a^2+2b^2=x^2$ y $b^2+2a^2=y^2$ para ciertos enteros x e y. Si m es el máximo común divisor de a y b, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{m}\right)^2+2\left(\frac{b}{m}\right)^2 &= \left(\frac{x}{m}\right)^2,\\
\left(\frac{b}{m}\right)^2+2\left(\frac{a}{m}\right)^2 &= \left(\frac{y}{m}\right)^2.
\end{aligned}$$

Como $\frac{x}{m}$ y $\frac{y}{m}$ también son enteros, $\frac{a}{m}$ y $\frac{b}{m}$ también cumplen las condiciones, así que podemos suponer que a y b son primos relativos.

Sumando las dos ecuaciones originales obtenemos que

$$3(a^2+b^2)=x^2+y^2.$$

De donde 3 divide a x^2+y^2. Recordemos que si 3 no divide a un entero u, entonces $u^2 \equiv 1 \pmod 3$. Por lo tanto 3 divide a x y a y, pues de otro modo $x^2+y^2 \equiv 1$ o $2 \pmod 3$. Sean $x = 3x_1$ y $y = 3y_1$, para ciertos enteros x_1 e y_1. Sustituyendo obtenemos que

$$3(a^2+b^2) = 9(x_1^2+y_1^2),$$

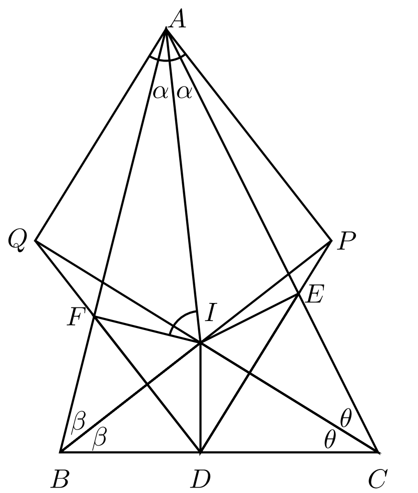
de donde 3 divide a a^2+b^2 y nuevamente concluimos que 3 divide a a y a b, lo cual contradice que sean primos relativos. Por lo tanto no existen dichos enteros.

Solución alternativa. Supongamos que existen enteros a y b con esas condiciones y tomemos una pareja (a,b) con el mínimo valor de $a+b$ (quizás haya más de una pareja). Recordemos que si u es par, $u^2 \equiv 0 \pmod 4$ y que si u es impar, $u^2 \equiv 1 \pmod 4$. En particular, si $v \equiv 2,3 \pmod 4$, v no puede ser un cuadrado perfecto.
Supongamos que a es impar, entonces $2a^2+b^2 \equiv 2+b^2 \equiv 2$ o $3 \pmod 4$ y $2a^2+b^2$ no podría ser cuadrado perfecto. Por lo tanto a es par. Análogamente b es par, luego

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+2b^2}{4} \quad \text{y} \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{b^2+2a^2}{4}.$$

Al ser $\frac{a^2+2b^2}{4}$ y $\frac{b^2+2a^2}{4}$ cuadrados perfectos, la pareja $(a',b') = (\frac{a}{2},\frac{b}{2})$ también cumple la condición y $a'+b' < a+b$, lo cual es una contradicción.

Solución del problema 11. Sean $\alpha = \frac{1}{2}\angle CAB$, $\beta = \angle ABC$ y $\theta = \frac{1}{2}\angle BCA$.



El cuadrilátero $DCEI$ es cíclico, por lo tanto $\angle IDE = \theta$ y por la suma de ángulos en el triángulo PBD tenemos que

$$\angle DPB = 180^\circ - \angle PBD - \angle BDP = 180^\circ - \beta - (90^\circ + \theta) = 90^\circ - \beta - \theta = \alpha.$$

De donde el cuadrilátero $AIEP$ es cíclico y $\angle IPA = \angle IEA = 90^\circ$. Análogamente el cuadrilátero $AQFI$ es cíclico y $\angle AQI = 90^\circ$. Entonces E, F, Q y P están en la

circunferencia con diámetro AI.
Por suma de ángulos en el triángulo AFI tenemos que $\angle FIA = \beta + \theta$. Como $\angle PIC$ es un ángulo externo del triángulo IBC se tiene que $\angle PIC = \beta + \theta$ y como $AQIP$ es cíclico concluimos que $\angle PAQ = \beta + \theta = \angle FIA$. Por lo tanto, en la circunferencia de diámetro AI, las cuerdas PQ y AF corresponden al mismo ángulo, por lo que $PQ = AF$, como queríamos demostrar.

Solución del problema 12. Mostraremos por inducción que,

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2 \geq 4n - 6,$$

si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números enteros distintos. La base de inducción es trivial:

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 \geq 2,$$

ya que x_1 y x_2 son enteros distintos.
Supongamos que el resultado es cierto para n, es decir,

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2 \geq 4n - 6.$$

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ números enteros distintos. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que x_{n+1} es el máximo de todos los números. Entonces se tiene que

$$(x_n - x_{n+1})^2 + (x_{n+1} - x_1)^2 - (x_n - x_1)^2 = 2(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_1) \geq 4.$$

Sumando las dos últimas desigualdades y usando la hipótesis de inducción obtenemos el resultado.
Ahora, mostremos un ejemplo donde se alcanza el mínimo.
Para $n = 2k - 1$ hagamos $x_j = 2j - 2$ si $j \leq k$ y $x_j = -2j + 4k - 1$ si $j \geq k + 1$.
Para $n = 2k$ hagamos $x_j = 2j - 2$ si $j \leq k$ y $x_j = -2j + 4k + 1$ si $j \geq k + 1$.
Por lo tanto, el valor mínimo buscado es $4n - 6$.

Solución del problema 13. Los valores posibles de a son 0, 1, -1, 2 y -2.
Observemos que $a = 0$ cuando $y = -x$; $a = 1$ cuando $x = 0$ y $y = 1$; $a = -1$ cuando $x = 0$ y $y = -1$; $a = 2$ cuando $x = y = 1$; y $a = -2$ cuando $x = y = -1$.
Demostraremos que estos son todos los valores posibles de a. Supongamos que $x + y = x^3 + y^3 = x^5 + y^5 = a \neq 0$ para algunos números reales x y y. Demostraremos que a debe ser igual a 1, -1, 2 o -2.
Haciendo $p = xy$, tenemos que $a = x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = a^3 - 3ap$, de donde $a^2 = 1 + 3p$. También tenemos que,

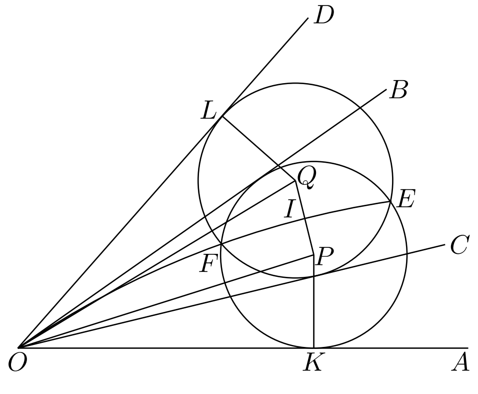
$$a = x^5 + y^5 = (x + y)^5 - 5xy(x^3 + y^3) - 10(xy)^2(x + y) = a^5 - 5pa - 10p^2a,$$

de donde $a^4 = 1 + 10p^2 + 5p$. Luego, $1 + 10p^2 + 5p = (1 + 3p)^2$, que después de resolver obtenemos las soluciones $p = 0$ o $p = 1$.
Si $p = 0$, de la ecuación $a^2 = 1 + 3p$ se sigue que $a = 1$ o $a = -1$. Si $p = 1$, entonces de la misma ecuación obtenemos que $a = 2$ o $a = -2$.

Solución del problema 14. Para un cubo de lado n, el número total de rectas interesantes es $3n^2+6n+4$, lo cual se puede calcular usando la siguiente observación. Cada recta interesante tiene una de las siguientes tres direcciones: paralela a una arista del cubo, paralela a alguna diagonal de una cara o paralela a alguna diagonal principal del cubo.
Ahora mostraremos que la ecuación $3n^2+6n+4=2^k$ no tiene soluciones enteras con $n>1$. Sea $m=n+1$, entonces la ecuación se puede escribir como $3m^2+1=2^k$. Consideremos esta ecuación módulo 8. Para $k\geq 3$ el lado derecho de la ecuación es divisible entre 8, pero el lado izquierdo sólo puede dar los residuos 1, 4, 5. Por lo tanto, sólo debemos considerar los casos $k=1$ y $k=2$. Es decir, debemos ver si las dos ecuaciones $3m^2+1=2$ y $3m^2+1=4$ tienen soluciones. En la primera tenemos que $3m^2=1$, la cual no tiene solución en los enteros. La segunda ecuación es $3m^2=3$ o $m^2=1$, de donde $m=1$ y $n=0$, lo cual no es posible. Por lo tanto, no existe tal $n>1$.

Solución del problema 15. Si $6n\leq n^2$ o lo que es lo mismo $n\geq 6$, haciendo $a=n$, $c=2n$, $d=3n$, $b=6n$, tenemos que $ab=6n^2=cd$, de donde cada $n\geq 6$ satisface la condición.
Si $n=5$, consideremos los números $5,6,7,\dots,25$. Haciendo $a=6$, $b=20$, $c=8$, $d=15$ se tiene el resultado.
Si $n=4$, consideremos los números $4,5,6,\dots,16$. Haciendo $a=4$, $b=15$, $c=6$, $d=10$ se tiene el resultado.
Si $n=3$, haciendo $a=3$, $b=8$, $c=4$, $d=6$ se tiene el resultado.
Si $n=1$ o 2, en la lista n, $n+1$, $\dots$, n^2 se tienen a lo más tres números, luego no es posible encontrar tres números distintos.
Por lo tanto, todos los enteros mayores o iguales que 3 satisfacen el problema.

Solución del problema 16. Sean P y Q los centros de las circunferencias inscritas a los ángulos $\angle AOB$ y $\angle COD$ respectivamente. Sean K y L los puntos de tangencia de estas circunferencias con los rayos OA y OD respectivamente.



Entonces tenemos que $\angle POK=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\angle COD=\angle QOL$ y $\angle PKO=90^\circ=\angle QLO$, de donde se sigue que los triángulos POK y QOL son semejantes (criterio AAA). Es así que $\frac{PO}{QO} = \frac{PK}{QL} = \frac{PE}{QE} = \frac{PF}{QF}$ y entonces la circunferencia circunscrita del triángulo OEF puede ser descrita como el lugar geométrico formado por todos los puntos M tales que $\frac{PM}{QM} = \frac{PK}{QL}$ (ver en el apéndice la definición 22). Ahora, notemos que la recta PQ intersecta a esta circunferencia en el punto medio I del arco $\widehat{EF}$ y entonces $\angle IOE = \angle IOF$. Más aún, dado que $\frac{PI}{QI} = \frac{PO}{QO}$, tenemos que $\angle POI = \angle QOI$. Por lo tanto, $\angle AOE = \angle AOP + \angle POI - \angle IOE = \angle DOQ + \angle QOI - \angle IOF = \angle DOF$.

Solución del problema 17. Sea a un entero positivo tal que $1+12n^2 = a^2$. Despejamos y factorizamos para escribir la ecuación anterior de la siguiente forma,

$$12n^2 = a^2 - 1 = (a+1)(a-1).$$

Dado que el lado izquierdo de esta ecuación es par, el lado derecho también lo es y por lo tanto a debe ser un número impar. Nótese que la factorización en primos del lado izquierdo de la ecuación tiene un número par de factores 2 y que, tanto $a+1$ como $a-1$, tienen ambos un número impar de factores 2, pues alguno de los dos debe tener exactamente un solo factor 2. Además, $(a+1, a-1) = 2$, de donde se sigue que para cualquier factor primo impar p del lado izquierdo, p sólo divide a uno de los dos $a+1$ o $a-1$. Entonces, si $p \geq 5$, el lado derecho tiene un número par de factores p y si $p = 3$, el lado derecho tiene un número impar de factores p. Es así que tenemos dos posibilidades: $a+1 = 6b^2$ y $a-1 = 2c^2$ para ciertos enteros b y c, tales que $bc = n$; o bien, $a+1 = 2b^2$ y $a-1 = 6c^2$, para ciertos enteros b y c, tales que $bc = n$. Consideremos el primer caso. Como $a+1 = 6b^2$, tenemos que $a+1 \equiv 0 \pmod 3$, de donde se seguiría que $a-1 \equiv 1 \pmod 3$ y que $c^2 \equiv 2 \pmod 3$, lo cual es contradictorio. De lo anterior deducimos que sólo es posible tener el segundo caso y por lo tanto,

$$2 + 2\sqrt{1+12n^2} = 2 + 2a = 2(1+a) = 4b^2 = (2b)^2,$$

que es justo lo que queríamos demostrar.

Solución del problema 18. Sean $a = x+y+z = xyz$ y $b = xy+yz+zx$. Desarrollando el lado izquierdo de la primera ecuación tenemos que,

$$x - xy^2 - xz^2 + xy^2z^2 + y - yz^2 - yx^2 + yz^2x^2 + z - zx^2 - zy^2 + zx^2y^2.$$

Reordenando los términos obtenemos,

$$\begin{aligned}&(x+y+z) - (xy^2 + zy^2 + xyz) - (yx^2 + zx^2 + xyz) - (yz^2 + xz^2 + xyz) + \\ &+ 3xyz + xyz(yz + zx + xy).\end{aligned}$$

Lo cual puede escribirse como,

$$4a - xb - yb - zb + ab = 4a - (x+y+z)b + ab = 4a.$$

Por lo que concluimos que la primera ecuación es innecesaria, toda vez que es consecuencia de la segunda. Ahora, suponiendo que $xy \neq 1$, de la segunda ecuación podemos despejar z obteniendo $z = \frac{x+y}{xy-1}$. Entonces las ternas buscadas son de la forma $(x, y, \frac{x+y}{xy-1})$, donde x y y pueden ser cualesquiera números reales tales que $xy \neq 1$.

Solución del problema 19. Supongamos que para algún valor de a el polinomio tiene tres raíces reales positivas r, s y t. Dado que,

$$(x-r)(x-s)(x-t) = x^3 - (r+s+t)x^2 + (rt+st+rs)x - rst,$$

tenemos que $r+s+t=2$ y $rst=\frac{1}{3}$. Ahora, considerando que la media geométrica de tres números positivos nunca supera a su media aritmética (ver en el apéndice el teorema 6), podemos ver que,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{rst} \le \frac{r+s+t}{3} = \frac{2}{3},$$

lo cual es equivalente a $\sqrt[3]{3} \ge \frac{3}{2}$. Elevando al cubo esta última desigualdad se obtiene que $3 \ge \frac{27}{8}$, lo cual es una contradicción y por lo tanto, sin importar el valor de a, el polinomio no puede tener tres raíces reales positivas.

Solución del problema 20. Tengamos en cuenta que $(m+n)+(m-n)=2m$, que $(mn)\left(\frac{m}{n}\right)=m^2$ y que sólo $m-n$ puede ser no positivo. Consideremos tres casos:

- **Caso 1.** Los cuatro números son positivos.
  Usemos a, b, c y d para denotar a $m+n$, $m-n$, mn y $\frac{m}{n}$ en algún orden. Escogemos una pareja y verificamos si el cuadrado de su suma es cuatro veces el producto de los otros dos números. La pareja puede ser escogida de seis formas distintas y hay tres subcasos.

  - **Subcaso 1A.** La verificación se satisface por 2 parejas disjuntas.
    Supongamos que $(a+b)^2=4cd$ y $(c+d)^2=4ab$. Sumando estas ecuaciones podemos deducir que $(a-b)^2+(c-d)^2=0$, por lo que $a=b$ y $c=d$. Sustituyendo de regreso en $(a+b)^2=4cd$, obtenemos que $a=\pm c$. Dado que los cuatro números son positivos, necesariamente tendríamos que $a=b=c=d$, lo cual es absurdo pues $m+n \neq m-n$.
  - **Subcaso 1B.** La verificación se satisface por 2 parejas con un número en común.
    Suponemos que $(a+b)^2=4cd$ y $(a+c)^2=4bd$, donde $b \neq c$. En este caso tenemos que $b(a+b)^2=4bcd=c(a+c)^2$, o equivalentemente, $(b-c)(a^2+2a(b+c)+(b^2+bc+c^2))=0$. Nuevamente hemos llegado a una contradicción pues $b-c\neq 0$ mientras que $a^2+2a(b+c)+(b^2+bc+c^2)>0$.
  - **Subcaso 1C.** La verificación se satisface sólo por una pareja.
    Supongamos que $(a+b)^2=4cd$. En este caso sabemos que el mayor de a y b corresponde a $m+n$, mientras que el menor tiene que ser $m-n$. A partir de esto m y n quedan determinados de manera única.

- **Caso 2.** Alguno de los números es menor o igual que 0.
  Sabemos entonces cuánto vale $m-n$, pues es el único número que no necesariamente es positivo. Para que $m-n\le 0$ debe tenerse que $n\ge m$, de donde $\frac{m}{n}\le 1$. Como necesariamente se tiene que $m+n$ y mn son mayores o iguales que 1, ya sabemos quién es mn. A partir de $m-n$ y mn es fácil despejar m y n de manera única.

Problemas Propuestos

Problemas Propuestos.
Año 2011 No. 4.

La comunidad de Tzaloa se distingue por la pasión de poder superar los retos y por su gran amor a la reina de las ciencias: *La Matemática*. Por eso, siempre nos sentiremos orgullosos de publicar tu trabajo y siempre reconoceremos el gran talento de todos nuestros lectores.

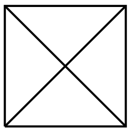
A continuación presentamos el reto de los 5 problemas propuestos para este trimestre. Recuerda que a partir de este momento puedes enviarnos tus trabajos y que tienes hasta antes de la publicación de Tzaloa 3, año 2012, para hacernos llegar las soluciones creativas y elegantes que sólo tú puedes construir.

Como siempre nuestro buzón electrónico `revistaomm@gmail.com` está a tu servicio y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, nos pondremos en contacto contigo para poder publicar tu trabajo.

Problema 1. (Intermedio) A un tablero de 11×11 se le quita el cuadrito unitario de 1×1 del centro, ¿cuántas fichas de 3×4 se pueden colocar en el resto del tablero sin salirse ni traslaparse?

Problema 2. (Intermedio) Demuestra que hay una infinidad de triángulos Pitagóricos (triángulos rectángulos con lados enteros) cuya hipotenusa es un entero de la forma $3333\ldots 3$.

Problema 3. (Intermedio) Una empresa quiere vender baldosas decorativas, diseñadas en forma de cuadrado partido por las diagonales, como se muestra en la figura:



Si se dispone de 10 colores para pintar cada una de las secciones en que se divide la baldosa, determina cuántos diseños de baldosa diferentes se pueden hacer si se permite repetir colores dentro de una misma baldosa. (Dos diseños se consideran iguales si se puede pasar de uno a otro por medio de una rotación de la baldosa).

Problema 4. (Avanzado) Sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$. Encuentra el menor entero positivo n tal que entre cualesquiera n enteros del conjunto A, existen dos tales que su producto es un cuadrado perfecto.

Problema 5. (Avanzado) Sea a un número real tal que todas las diferencias entre a^{1929}, a^{1970} y a^{2011} son números enteros. Demuestra que a también es un número entero.

Soluciones a los Problemas Propuestos. Año 2011 No. 1.

A continuación te presentamos las soluciones de los problemas propuestos en Tzaloa 1, año 2011. En esta ocasión nos da mucho gusto felicitar y agradecer a Marco Antonio Flores Martínez, del estado de Jalisco, quien nos envió la solución del problema 4.

Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas propuestos en Tzaloa 2, año 2011, por lo que todavía estás a tiempo para enviarnos la tuya y así podamos publicarla dándote todo el crédito y reconocimiento público que sólo tú mereces.

Problema 1. (Principiante) Determina el promedio de todos los enteros n tales que $0 \leq n \leq 10000$ y que no tienen el dígito 1.

Solución. Llamemos *entero bueno* a un entero no negativo menor o igual que 10000 que no tiene el dígito 1. Ya que 10000 no es un entero bueno, todo entero bueno tiene a lo más 4 dígitos. Escribamos a un entero bueno en la forma $10^3a_4 + 10^2a_3 + 10a_2 + a_1$ donde a_1, a_2, a_3 y a_4 son dígitos del conjunto $A = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Ya que para a_1 cada uno de los valores de A puede ser elegido el mismo número de veces, el promedio para a_1 sobre el conjunto de todos los enteros buenos es $\frac{1}{9}(0 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = \frac{44}{9}$. De manera análoga, el promedio de a_2, a_3, a_4 sobre el conjunto de todos los enteros buenos es $\frac{44}{9}$ para cada uno. Por lo tanto, el promedio de todos los enteros buenos es $\frac{44}{9}(1 + 10 + 10^2 + 10^3) = \frac{48884}{9}$.

Problema 2. (Principiante) Sea n un entero positivo de tres dígitos distintos entre sí y distintos de cero. Sea g el máximo común divisor de los 6 números que se obtienen permutando los dígitos de n. Determina el mayor valor posible de g.

Solución. Primero demostraremos que g no puede ser mayor que 18 para cualquier n. Denotemos por a, b y c a los tres dígitos de n, donde supondremos que $a < b < c$. Los números $100c + 10b + a$ y $100c + 10a + b$ son obtenidos ambos permutando los dígitos de n. Luego, g es un divisor de $(100c + 10b + a) - (100c + 10a + b) = 9(b - a)$. De manera análoga, tenemos que g es un divisor de $9(c - b)$ y de $9(c - a)$. Si hacemos $x = b - a$, $y = c - b$ y $z = c - a$, entonces x, y, z son enteros positivos menores o iguales que 8, y satisfacen que $x + y = z$. Si denotamos por g' al máximo común divisor de x, y, z, entonces g es un divisor de $9g'$.
Si $g' \geq 5$, entonces hay a lo más un número menor o igual que 8 divisible entre g', lo que es una contradicción pues $x + y = z$. Luego, $g' \leq 4$.
Si $g' = 4$, entonces 4 y 8 son los únicos son los únicos enteros positivos menores o iguales que 8 divisibles entre 4, y por lo tanto debemos tener $(x, y, z) = (4, 4, 8)$. Tenemos entonces que $(a, b, c) = (1, 5, 9)$ y $g = 3$.
Si $g' = 3$, entonces 3 y 6 son los únicos enteros positivos menores o iguales que 8 y divisibles entre 3, luego debemos tener $(x, y, z) = (3, 3, 6)$. Entonces (a, b, c) debe ser $(1, 4, 7)$ o $(2, 5, 8)$ o $(3, 6, 9)$, y el valor de g es 3, 3, 9, respectivamente.
Si $g' \leq 2$, entonces ya que g divide a $9g'$ tenemos que $g \leq 9g' \leq 18$.
De todo lo anterior concluimos que $g \leq 18$. Finalmente, si $n = 468$, entonces $g = 18$ y por lo tanto, 18 es el máximo valor posible para g.

Problema 3. (Intermedio) Determina el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{(2^4 + 2^2 + 1)(4^4 + 4^2 + 1)(6^4 + 6^2 + 1) \cdots (32^4 + 32^2 + 1)}{(1^4 + 1^2 + 1)(3^4 + 3^2 + 1)(5^4 + 5^2 + 1) \cdots (31^4 + 31^2 + 1)}.$$

Solución. En primer lugar observemos que cada término del producto es de la forma

$$\frac{(k + 1)^4 + (k + 1)^2 + 1}{k^4 + k^2 + 1}.$$

Por otro lado, también tenemos que:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

para todo número real x.
Luego, cada término del producto se puede escribir como:

$$\frac{(k + 1)^4 + (k + 1)^2 + 1}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{[(k + 1)^2 - (k + 1) + 1][(k + 1)^2 + (k + 1) + 1]}{(k^2 - k + 1)(k^2 + k + 1)}.$$

Ahora, observemos que $(k + 1)^2 - (k + 1) + 1 = k^2 + k + 1$ y $k^2 - k + 1 = (k - 1)^2 + (k - 1) + 1$. Luego, cada término del producto se puede simplificar como sigue:

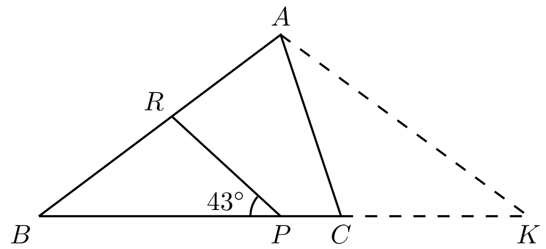
$$\frac{(k + 1)^4 + (k + 1)^2 + 1}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{(k + 1)^2 + (k + 1) + 1}{(k - 1)^2 + (k - 1) + 1}.$$

Por lo tanto, el producto pedido es igual a:

$$\frac{2^2+2+1}{0^2+0+1}\cdot\frac{4^2+4+1}{2^2+2+1}\cdot\frac{6^2+6+1}{4^2+4+1}\cdots\frac{32^2+32+1}{30^2+30+1}=32^2+32+1=1057.$$

Problema 4. (Intermedio) En el lado BC de un triángulo ABC se ubica el punto P de manera que $AC+CP=PB$. Sea R el punto medio de AB. Si la medida del ángulo $\angle RPB$ es 43°, encuentra la medida del ángulo $\angle ACB$.

Solución de Marco Antonio Flores Martínez (Jalisco). Sea K un punto sobre la recta BC, con C entre B y K, tal que $AC=CK$.



Como $AC+CP=PB$, tenemos $PK=PC+CK=PC+AC=PB$, por lo que P es el punto medio de BK. Como R es el punto medio de AB, por el teorema de Thales RP es paralela a AK, por lo que $\angle AKC=\angle RPB=43^\circ$. Luego, ya que ACK es isósceles, $\angle KAC=43^\circ$. Finalmente, como $\angle ACB$ es un ángulo exterior del triángulo ACK, tenemos $\angle ACB=43^\circ+43^\circ=86^\circ$.

Problema 5. (Intermedio) Jacobo piensa en un número cualquiera de dos dígitos y Ana tratará de averiguarlo. Jacobo dirá *caliente* cuando el número que dice Ana es correcto o cuando uno de los dígitos del número es correcto y el otro difiere a lo más en una unidad con respecto al correcto. En cualquier otro caso Jacobo dirá *frío*.

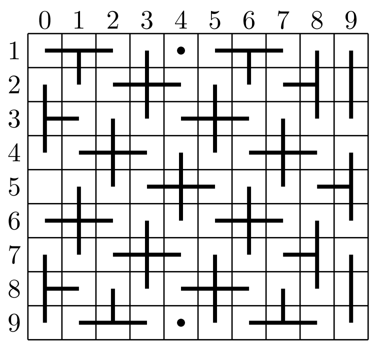
1. Demuestra que no existe una estrategia que garantice que Ana pueda adivinar el número en a lo más 18 intentos.

2. Encuentra una estrategia ganadora que permita a Ana adivinar el número en a lo mucho 24 intentos.

3. ¿Existe alguna estrategia que permita a Ana adivinar el número en a lo más 22 intentos?

Solución. 1. Supongamos que Ana tiene una estrategia que le permite adivinar el número de Jacobo en no más de 18 intentos. Si Ana dice ab y Jacobo dice frío, entonces los números de dos dígitos $a(b-1)$, $a(b+1)$, $(a-1)b$, $(a+1)b$ y ab no pueden ser el número de Jacobo. Sin importar la estrategia que siga Ana, en cada intento sólo puede descartar 5 números, por lo que en 17 intentos sólo puede descartar $17\times 5=85$ números. Es así que existe una situación en la que las primeras 17 respuestas de Jacobo son

frío y Ana todavía tiene $90 - 5 = 5$ opciones posibles. En este caso, aún si la respuesta de Jacobo en el intento 18 es caliente, Ana no puede decidir cuál de estos 5 números es el correcto. Por lo tanto, no existe una estrategia que garantice que Ana pueda adivinar el número en un máximo de 18 intentos.
2 y 3. A continuación presentamos una estrategia que, sin importar la elección de Jacobo, permite a Ana encontrar el número en un máximo de 22 intentos. Construyamos un tablero de 9×10 en el que los renglones representan el primer dígito del número y las columnas representan al segundo. Cubrimos el tablero con 22 figuras que orientarán las jugadas de Ana. Las figuras son, como se muestra abajo, 9 cruces, 9 T's, 2 líneas y 2 puntos. Nótese que en el tablero el número 50 no está cubierto.



La estrategia de Ana es la siguiente. Primero irá diciendo los números que están en el centro de las cruces, si la respuesta es frío, después dirá los números que están en el centro de las T's, si la respuesta es frío, entonces dirá los números de los centros de las líneas, si la respuesta sigue siendo frío, entonces intentará los números de los puntos y si la respuesta es de nuevo frío, entonces Ana sabe que el número de Jacobo es 50.
Ahora, si Jacobo responde caliente cuando Ana está en alguna cruz, entonces Ana puede adivinar el número en 3 intentos más. Supongamos que la repuesta caliente se da cuando Ana está en el 35, entoces Ana prueba con 34 y 36. Si para los dos la respuesta es caliente, entonces el número es 35. Si para 34 es frío y para 36 es caliente, entonces el número es 36. Análogamente, si 34 es caliente y 36 es frío, entonces el número es 34. Si ambos son fríos y 25 también es frío, entonces el número es 45; si por el contraio 25 es caliente, entonces el número es 25.
Ahora supongamos que Jacobo dice caliente cuando Ana está en una T o en una línea, en estos casos, usando argumentos similares, Ana puede adivinar el número de Jacobo en no más de dos intentos. Si la respuesta caliente se da cuando Ana está en los puntos, entonces Ana sabe que ha encontrado el número de Jacobo.

Olimpiadas Internacionales

Queremos extender una cálida y sentida felicitación por un excepcional año para la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.
Un excelente año de trabajo y actitud por hacer una labor ejemplar y memorable. Sin duda sus logros merecen una gran celebración. Felicitamos el esfuerzo de todas las personas involucradas en este proyecto tan importante para la comunidad matemática mexicana: al Comité, a los Delegados, a los Profesores, a los Padres de familia y de manera especial a la Dra. Radmila Bulajich por su liderazgo, entrega y dedicación así como a todos los estudiantes que este año han tenido individualmente y como equipos tan destacada participación en las diversas competencias.
Un saludo y fuerte abrazo festivos.
Dr. Isidoro Gitler.
Presidente de la Sociedad Matemática Mexicana.

52^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas

Del 12 al 24 de julio de 2011 se llevó a cabo la 52^a Olimpiada Internacional de Matemáticas en Amsterdam, Holanda, con la participación de 564 competidores provenientes de 101 países.
El desempeño de México en esta competencia internacional fue destacado ya que logró colocarse en el vigésimo segundo lugar de la lista de países participantes. México conquistó 120 puntos, detrás de Brasil y Bulgaria con 121 puntos cada uno. Brasil y México obtuvieron las puntuaciones más altas de Latinoamérica, seguidos por Perú con 113 puntos y Argentina con 77 puntos. Por primera ocasión, los seis alumnos integrantes de la delegación mexicana obtuvieron una medalla. México ha participado desde 1987 en la Olimpiada Internacional y hasta ahora, es el mejor lugar que ha ocupado.
La delegación que representó a México estuvo integrada por los alumnos: Daniel Perales Anaya y Georges Belanger Albarrán, del Estado de Morelos, Flavio Hernández González, de Aguascalientes, Manuel Alejandro Espinosa García, de Michoacán, Diego Alonso Roque Montoya, de Nuevo León, y Jorge Garza Vargas, del Distrito Federal,

todos ellos alumnos menores de 19 años, y Diego con tan solo 15 años de edad. Flavio y Diego se vieron galardonados con una medalla de plata, Daniel, Jorge, Georges y Manuel obtuvieron cada uno una medalla de bronce.
Este año la organización olímpica de nuestro país festeja su 25 aniversario y nos sentimos orgullosos no sólo por los logros alcanzados en este 2011 sino también por la madurez que se ha logrado. Por primera vez uno de los problemas que México propuso para la 52^a Olimpiada Internacional, fue seleccionado para formar parte del examen de la competencia. El valor de este reconocimiento se puede apreciar al tomar en cuenta el proceso que culmina en esta selección: a lo largo del año el país organizador recibe problemas de todo el mundo y un comité de expertos selecciona, de un conjunto de 140 problemas aproximadamente, un subconjunto de problemas de donde los representantes de cada país eligirán aquellos que integrarán el examen. El problema fue elaborado por Fernando Campos García, exolímpico y actualmente estudiante de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

A continuación presentamos los problemas de la 52^a Olimpiada Internacional de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Para cualquier conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de cuatro enteros positivos distintos se denota la suma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ por s_A. Sea n_A el número de parejas (i, j) con $1 \leq i < j \leq 4$ para las cuales $a_i + a_j$ divide a s_A. Encontrar todos los conjuntos A de cuatro enteros positivos distintos para los cuales se alcanza el mayor valor posible de n_A.

(Problema sugerido por México)

Problema 2. Sea $\mathcal{S}$ un conjunto finito de dos o más puntos del plano. En $\mathcal{S}$ no hay tres puntos colineales. Un *remolino* es un proceso que empieza con una recta l que pasa por un único punto P de $\mathcal{S}$. Se rota l en el sentido de las manecillas del reloj con centro en P hasta que la recta encuentre por primera vez otro punto de $\mathcal{S}$ al cual llamaremos Q. Con Q como nuevo centro se sigue rotando la recta en el sentido de las manecillas del reloj hasta que la recta encuentre otro punto de $\mathcal{S}$. Este proceso continúa indefinidamente.
Demostrar que se puede elegir un punto P de $\mathcal{S}$ y una recta l que pasa por P tales que el remolino que resulta usa cada punto de $\mathcal{S}$ como centro de rotación un número infinito de veces.

(Problema sugerido por Reino Unido)

Problema 3. Sea f una función del conjunto de los números reales en si mismo que satisface

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

para todo par de números reales x, y. Demostrar que $f(x) = 0$ para todo $x \leq 0$.

(Problema sugerido por Bielorrusia)

Problema 4. Sea $n > 0$ un entero. Se dispone de una balanza de dos platillos y de n pesas cuyos pesos son $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Debemos colocar cada una de las n pesas en la balanza, una tras otra, de manera tal que el platillo de la derecha nunca sea más pesado que el platillo de la izquierda. En cada paso, elegimos una de las pesas que no ha sido colocada en la balanza, y la colocamos ya sea en el platillo de la izquierda o en el platillo de la derecha, hasta que todas las pesas hayan sido colocadas. Determinar el número de formas en las que esto se puede hacer.

(Problema sugerido por Irán)

Problema 5. Sea f una función del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros positivos. Se supone que para cualesquiera dos enteros m y n, la diferencia $f(m) - f(n)$ es divisible por $f(m-n)$.
Demostrar que para todos los enteros m y n con $f(m) \leq f(n)$, el número $f(n)$ es divisible por $f(m)$.

(Problema sugerido por Irán)

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo cuya circunferencia circunscrita es Γ. Sea l una recta tangente a Γ, y sean l_a, l_b y l_c las rectas que se obtienen al reflejar l con respecto a las rectas BC, CA y AB, respectivamente. Demostrar que la circunferencia circunscrita del triángulo determinado por las rectas l_a, l_b y l_c es tangente a la circunferencia Γ.

(Problema sugerido por Japón)

XXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Del 25 de septiembre al 1° de octubre de 2011, en la ciudad de San José, Costa Rica, se realizó la XXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, en la que participaron 21 países con un total de 78 estudiantes. México obtuvo el Primer Lugar general por países, quedando por encima de Argentina, Brasil, Cuba, España, Perú y Portugal entre otros. La destacada delegación mexicana estuvo integrada por: Flavio Hernández González, de Aguascalientes y Diego Alonso Roque Montoya, de Nuevo León, quienes obtuvieron medalla de Oro; Jorge Garza Vargas, del Distrito Federal, quien obtuvo medalla de Plata y José Ramón Guardiola Espinoza, de San Luis Potosí con medalla de Bronce.
Cabe señalar que con esta destacada participación, México cierra con broche el año 2011. En cada una de las Olimpiadas Internacionales a las que asistió, obtuvo resultados sorprendentes. Por primera vez los tres alumnos que fueron a la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, obtuvieron medalla de Oro. En la Olimpiada Internacional de Matemáticas los seis participantes fueron premiados, dos de ellos con medalla de Plata y los otros cuatro con medalla de Bronce, siendo también la primera ocasión en que todos los alumnos de la delegación obtienen una presea.

A continuación presentamos los problemas de la XXVI Olimpiada Iberoamericana. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. En la pizarra está escrito el número 2. Ana y Bruno juegan alternadamente, comenzando por Ana. Cada uno en su turno sustituye el número escrito por el que se obtiene de aplicar exactamente una de las siguientes operaciones: multiplicarlo por 2, o multiplicarlo por 3, o sumarle 1. El primero que obtenga un resultado mayor o igual a 2011 gana. Hallar cuál de los dos tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

Problema 2. Encontrar todos los enteros positivos n para los cuales existen tres enteros no nulos x, y, z tales que:

$$x + y + z = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{n}.$$

Problema 3. Sea ABC un triángulo y sean X, Y, Z los puntos de tangencia de su circunferencia inscrita con los lados BC, CA, ABC respectivamente. Suponga que C_1, C_2, C_3 son circunferencias con cuerdas XY, ZX, YZ, respectivamente tales que C_1 y C_2 se corten sobre la recta CZ y que C_1 y C_3 se corten sobre la recta BY. Suponga que C_1 corta a las cuerdas XY y ZX en J y M respectivamente; que C_2 corta a las cuerdas YZ y XY en L e I; y que C_3 corta a las cuerdas YZ y ZX en K y N, respectivamente. Demostrar que I, J, K, L, M, N están sobre una misma circunferencia.

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo, con $AC \neq BC$, y sea O su circuncentro. Sean P y Q puntos tales que $BOAP$ y $COPQ$ son paralelogramos. Demostrar que Q es el ortocentro de ABC.

Problema 5. Sean $x_1, \ldots, x_n$ números reales positivos. Demostrar que existen a_1, $\ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ tales que,

$$a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2 \geq (a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)^2.$$

Problema 6. Sean k y n enteros positivos, con $k \geq 2$. En una línea recta se tienen kn piedras de k colores diferentes de tal forma que hay n piedras de cada color. Un *paso* consiste en intercambiar de posición dos piedras adyacentes. Encontrar el menor entero positivo m tal que siempre es posible lograr, con a lo sumo m pasos, que las n piedras de cada color queden seguidas si:

a) n es par.

b) n es impar y $k = 3$.

Problemas y Soluciones de Olimpiadas Internacionales

American Mathematics Competition (AMC)

En el mes de marzo se pidió al comité de la olimpiada de Estados Unidos, el examen de la primera fase que aplican a nivel nacional. Dicho examen consta de dos niveles: AMC 10 y AMC 12. El nivel 10 es para los estudiantes que están cursando a lo más primero de preparatoria, y el nivel 12 para aquellos que están en segundo o tercero. En cada nivel los concursantes tienen 75 minutos para resolver el examen y el puntaje máximo posible es de 150 puntos. Los estudiantes mexicanos que en ese momento eran parte de la preselección para la Olimpiada Centroamericana y del Caribe, presentaron el examen AMC 10. Los tres primeros lugares fueron: Juan Carlos Ortiz Rhoton (Jalisco), con 121.5 puntos, Adán Medrano Martín del Campo (Jalisco), con 99 puntos, y Gustavo Humberto Vargas de los Santos (Campeche), con 99 puntos. Por otra parte, los estudiantes que en ese momento eran parte de la preselección para las Olimpiadas Iberoamericana e Internacional, presentaron el examen AMC 12. Los tres primeros lugares del equipo mexicano fueron: Flavio Hernández González (Aguascalientes), con 117 puntos, Jorge Ignacio González Cázares (Jalisco), con 113 puntos, y Daniel Perales Anaya (Morelos), con 108 puntos.
A continuación presentamos los problemas con sus soluciones de los concursos AMC 10 y 12 (American Mathematics Competition) de este año.

AMC 10A

Problema 1. Un plan de teléfono celular cuesta $\$20$ cada mes, más 5 centavos por mensaje de texto enviado, más 10 centavos por cada minuto utilizado después de 30 horas. En enero Michelle envío 100 mensajes de texto y habló durante 30.5 horas. ¿Cuánto es lo que debe pagar?

(a) $\$24$ (b) $\$24.50$ (c) $\$25.50$ (d) $\$28$ (e) $\$30$

Solución. La respuesta es (d).
Los mensajes de texto costaron $\$0.05 \times 100 = \$5.00$ y las 30 horas de exceso de conversación costaron $\$0.10 \times 30 = \$3.00$. Por lo tanto, el recibo llegó por $\$5 + \$3 + \$20 = \$28$.

Problema 2. Una botella pequeña de shampoo puede contener 35 mililitros de shampoo, mientras que una botella grande puede contener 500 mililitros. Jasmine quiere comprar el mínimo número necesario de botellas pequeñas para llenar totalmente una botella grande. ¿Cuántas botellas debe comprar?
(a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 14 (e) 15

Solución. La respuesta es (e).
Como $14 \times 35 = 490 < 500$ y $15 \times 35 = 525 \geq 500$, el número mínimo de botellas que Jasmine necesita comprar es 15.

Problema 3. Suponga que $[a\,b]$ denota el promedio de a y b, y $\{a\,b\,c\}$ denota el promedio de a, b y c. ¿Cuánto vale $\{\{1\,1\,0\}[0\,1]\,0\}$?
(a) $\frac{2}{9}$ (b) $\frac{5}{18}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{7}{18}$ (e) $\frac{2}{3}$

Solución. La respuesta es (d).
Primero nótese que $\{1\,1\,0\} = \frac{2}{3}$ y $[0\,1] = \frac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$\{\{1\,1\,0\}[0\,1]\,0\} = \left\{\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\,0\right\} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 0}{3} = \frac{7}{18}.$$

Problema 4. Sean $X = 10 + 12 + 14 + \cdots + 100$, $Y = 12 + 14 + 16 + \cdots + 102$. ¿Cuál es el valor de $Y - X$?
(a) 92 (b) 98 (c) 100 (d) 102 (e) 112

Solución. La respuesta es (a).
Cada sumando en X excepto el 10 aparece en Y. Cada sumando en Y excepto el 102 aparece en X. Por lo tanto, $Y - X = 102 - 10 = 92$.
Segunda solución. La suma X tiene 46 sumandos ya que incluye a los 50 enteros positivos pares menores o iguales a 100 con excepción de 2, 4, 6 y 8. La suma Y tiene el mismo número de sumandos, y cada sumando en Y excede al término correspondiente en X por 2. Por lo tanto, $Y - X = 46 \times 2 = 92$.

Problema 5. En una escuela primaria, los estudiantes de tercer, cuarto y quinto grado corren en promedio 12, 15 y 10 minutos por día, respectivamente. Hay el doble de estudiantes de tercer grado que de cuarto grado y el doble de estudiantes de cuarto que de quinto grado. ¿Cuál es el número promedio de minutos corridos por los estudiantes al día?
(a) 12 (b) $\frac{37}{3}$ (c) $\frac{88}{7}$ (d) 13 (e) 14

Solución. La respuesta es (c).
Sea N el número de estudiantes de quinto grado. Entonces hay $2N$ estudiantes de

cuarto grado y $4N$ estudiantes de tercer grado. El número total de minutos corridos cada día por los estudiantes es $(4N \times 12) + (2N \times 15) + (N \times 10) = 88N$. Hay un total de $4N + 2N + N = 7N$ estudiantes, por lo tanto el número promedio de minutos corridos por los estudiantes al día es $\frac{88N}{7N} = \frac{88}{7}$.

Problema 6. El conjunto A tiene 20 elementos y el conjunto B tiene 15 elementos. ¿Cuál es el menor número de elementos de $A \cup B$, la unión de A y B?
(a) 5 (b) 15 (c) 20 (d) 35 (e) 300

Solución. La respuesta es (c).
La unión debe contener todos los elementos de A, entonces tiene al menos 20 elementos. Es posible que B sea un subconjunto de A, en ese caso no hay elementos adicionales.

Problema 7. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones no tiene soluciones?
(a) $(x+7)^2 = 0$ (b) $|-3x| + 5 = 0$ (c) $\sqrt{-x} - 2 = 0$ (d) $\sqrt{x} - 8 = 0$
(e) $|-3x| - 4 = 0$

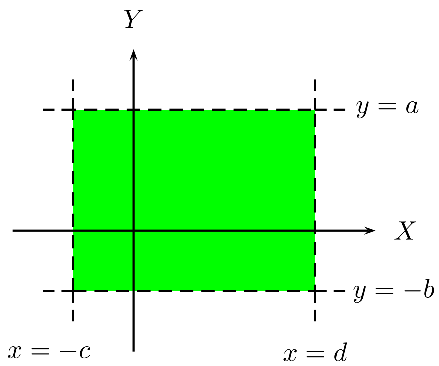
Solución. La respuesta es (b).
Como $|-3x| + 5$ es estrictamente positivo, la ecuación $|-3x| + 5 = 0$ no tiene solución. Las soluciones de las ecuaciones (a), (c), (d) y (e) son: -7, -4, 64 y $\pm\frac{4}{3}$, respectivamente.

Problema 8. El verano pasado el $30\,\%$ de las aves que vivían en Ciudad Lago eran gansos, $25\,\%$ eran cisnes, $10\,\%$ eran garzas y $35\,\%$ eran patos. ¿Qué porcentaje de las aves que no eran cisnes eran gansos?
(a) 20 (b) 30 (c) 40 (d) 50 (e) 60

Solución. La respuesta es (c).
Como el $75\,\%$ de las aves no eran cisnes y el $30\,\%$ de las aves eran gansos, tenemos que el $\frac{30}{75} \times 100\,\% = 40\,\%$ de las aves que no eran cisnes eran gansos.

Problema 9. Una región rectangular está limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = a$, $y = -b$, $x = -c$ y $x = d$, donde a, b, c y d son números positivos. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el área de la región?
(a) $ac + ad + bc + bd$ (b) $ac - ad + bc - bd$ (c) $ac + ad - bc - bd$
(d) $-ac - ad + bc + bd$ (e) $ac - ad - bc + bd$

Solución. La respuesta es (a).
Como a, b, c y d son números positivos, $a > -b$ y $d > -c$. Por lo tanto, la altura del rectángulo es $a + b$ y la base es $c + d$. Luego, el área de la región es $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

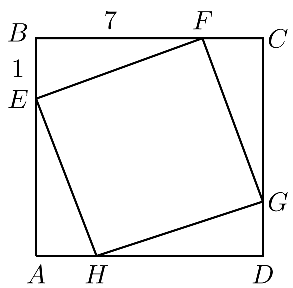


Problema 10. Una mayoría de los 30 estudiantes de la clase del Sr. Gómez compraron lápices en la librería de la escuela. Cada uno de estos estudiantes compró el mismo número de lápices y este número es mayor que 1. El precio en centavos de cada lápiz es mayor que el número de lápices que cada estudiante compró y el costo total de todos los lápices fue de 17.71 dólares. ¿Cuál es el precio en centavos de cada lápiz?
(a) 7 (b) 11 (c) 17 (d) 23 (e) 77

Solución. La respuesta es (b).
Sean C el costo de un lápiz en centavos, N el número de lápices que compró cada uno de los estudiantes que compraron lápices y S el número de estudiantes que compraron lápices. Entonces, $C \times N \times S = 1771 = 7 \times 11 \times 23$, y $C > N > 1$. Como una mayoría de los estudiantes compraron lápices, tenemos que $30 \geq S > \frac{30}{2} = 15$. Por lo tanto, $S = 23$, $N = 7$ y $C = 11$.

Problema 11. El cuadrado $EFGH$ tiene un vértice en cada lado del cuadrado $ABCD$. El punto E está en AB de manera que $AE = 7EB$. ¿Cuál es la razón entre el área de $EFGH$ y el área de $ABCD$?
(a) $\frac{49}{64}$ (b) $\frac{25}{32}$ (c) $\frac{7}{8}$ (d) $\frac{5\sqrt{2}}{8}$ (e) $\frac{\sqrt{14}}{4}$

Solución. La respuesta es (b).
Sin pérdida de generalidad, asumamos que F está sobre BC y que $EB = 1$.



Entonces, $AE = 7$ y $AB = 8$. Como $EFGH$ es un cuadrado, $BF = AE = 7$, entonces la hipotenusa EF del triángulo EBF tiene longitud $\sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50}$. Por lo tanto, la razón entre el área de $EFGH$ y el área de $ABCD$ es,

$$\frac{EF^2}{AB^2} = \frac{50}{64} = \frac{25}{32}.$$

Problema 12. Los jugadores de un equipo de basquetbol hicieron tiros que valen 3 puntos, otros que valen 2 puntos y algunos tiros libres que valen 1 punto. Anotaron la misma cantidad de puntos con los tiros de 2 puntos que con los tiros de 3 puntos. El número de tiros libres exitosos es mayor en 1 que el número de tiros exitosos de 2 puntos. Si el puntaje final del equipo fue de 61 puntos, ¿cuántos tiros libres exitosos hicieron?
(a) 13 (b) 14 (c) 15 (d) 16 (e) 17

Solución. La respuesta es (a).
Sean x, y y z el número de tiros de tres puntos, tiros de dos puntos y tiros libres exitosos, respectivamente. Entonces las condiciones dadas implican,

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 61, \\ 2y &= 3x, \\ y + 1 &= z. \end{aligned}$$

Sustituyendo la segunda y la tercera ecuación en la primera, obtenemos que $2y + 2y + y + 1 = 61$, es decir $5y = 60$. Entonces, $y = 12$, $z = y + 1 = 13$ y $x = \frac{2y}{3} = \frac{24}{3} = 8$. Por lo tanto, el equipo hizo 13 tiros libres exitosos.

Problema 13. ¿Cuántos enteros pares, entre 200 y 700, existen tales que todos sus dígitos son diferentes y pertenecen al conjunto $\{1, 2, 5, 7, 8, 9\}$?
(a) 12 (b) 20 (c) 72 (d) 120 (e) 200

Solución. La respuesta es (a).
Como los números son pares, deben terminar en 2 o en 8. Si el último dígito es 2, el primer dígito debe ser 5 y entonces hay cuatro posibilidades para el dígito central. Si el último dígito es 8, entonces hay dos posibilidades para el primer dígito: 2 ó 5, y para cada una de estas posibilidades hay cuatro posibilidades para el dígito central. Por lo tanto, el número total de posibilidades es $4 + (2 \times 4) = 12$.

Problema 14. Un par de dados de 6 caras son lanzados. La suma de los números que se obtiene es el diámetro de un círculo. ¿Cuál es la probabilidad de que el área del círculo sea menor que el perímetro?
(a) $\frac{1}{36}$ (b) $\frac{1}{12}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{4}$ (e) $\frac{5}{18}$

Solución. La respuesta es (b).
Sea d la suma de los números lanzados. Se satisfacen las condiciones si y sólo si $\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 < \pi d$, es decir, $d < 4$. De los 36 resultados igualmente posibles cuando se lanzan dos dados, uno tiene suma igual a 2 y dos tienen suma igual a 3. Por lo tanto, la probabilidad buscada es $\frac{1+2}{36} = \frac{1}{12}$.

Problema 15. Roy compró un coche híbrido, eléctrico-gasolina. En un viaje, las primeras 40 millas el coche utilizó únicamente la bateria eléctrica y el resto del viaje utilizó exclusivamente gasolina, gastando 0.02 galones por milla. Si en todo el viaje tuvo un promedio de 55 millas por galón, ¿cuántas millas recorrió en el viaje?

(a) 140 (b) 240 (c) 440 (d) 640 (e) 840

Solución. La respuesta es (c).
Sea x el número de millas recorridas exclusivamente con gasolina. Entonces el número total de millas recorridas es $x+40$, y la cantidad de gasolina usada es de $0.02x$ galones. Por lo tanto, el promedio de millas por galón es $\frac{x+40}{0.02x} = 55$. Resolviendo esta ecuación tenemos que $x = 400$. Por lo tanto, el total de millas recorridas es 440.

Problema 16. La expresión $\sqrt{9-6\sqrt{2}} + \sqrt{9+6\sqrt{2}}$ es igual a:

(a) $3\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{6}$ (c) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ (d) $3\sqrt{3}$ (e) 6

Solución. La respuesta es (b).
Sea $k = \sqrt{9-6\sqrt{2}} + \sqrt{9+6\sqrt{2}}$. Elevando al cuadrado ambos lados y simplificando tenemos que,

$$\begin{aligned} k^2 &= 9-6\sqrt{2}+2\sqrt{(9-6\sqrt{2})(9+6\sqrt{2})}+9+6\sqrt{2} \\ &= 18+2\sqrt{81-72} \\ &= 18+2\sqrt{9} \\ &= 24, \end{aligned}$$

de donde $k = \pm 2\sqrt{6}$. Como $k > 0$, concluimos que $k = 2\sqrt{6}$.

Problema 17. En la secuencia de 8 términos A, B, C, D, E, F, G, H el valor de C es 5 y la suma de cualesquiera tres términos consecutivos es 30. ¿Cuánto vale $A + H$?

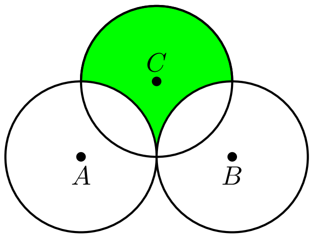
(a) 17 (b) 18 (c) 25 (d) 26 (e) 43

Solución. La respuesta es (c).
Observemos que para cualesquiera cuatro términos consecutivos, el primer y el último término deben ser iguales. Por ejemplo, consideremos B, C, D y E. Como $B+C+D = 30 = C+D+E$, se debe tener $B = E$. Por lo tanto, $A = D = G$, y $C = F = 5$. La suma requerida es $A + H = G + (30 - G - F) = 30 - 5 = 25$.
Segunda solución. Observemos que,

$$\begin{aligned} A+C+H &= (A+B+C)-(B+C+D)+(C+D+E) \\ &\quad -(E+F+G)+(F+G+H) \\ &= (3\times 30)-(2\times 30) = 30. \end{aligned}$$

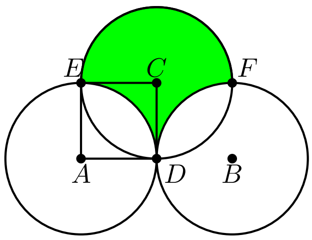
Por lo tanto, $A + H = 30 - C = 25$.

Problema 18. Cada uno de los círculos tiene radio 1. Los círculos con centros A y B son tangentes. Si el círculo con centro C es tangente con el punto medio del segmento AB, ¿cuánto vale el área sombreada?

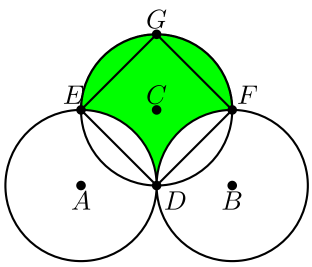


(a) $3-\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) 2 (d) $\frac{3\pi}{4}$ (e) $1+\frac{\pi}{2}$

Solución. La respuesta es (c).
Sea D el punto medio de AB. Supongamos que el círculo con centro C intersecta a los círculos con centros A y B en los puntos E y F, respectivamente, distintos de D.



El área de la región sombreada del cuadrado unitario $ADCE$ es $1-\frac{\pi}{4}$, así como la de la porción sombreada del cuadrado $BDCF$. La porción de la región sombreada que está fuera de estos cuadrados es un semicírculo de radio 1 cuya área es $\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, el área total de la región sombreada es, $2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{2}=2$.
Segunda solución. Sea D el punto medio de AB y sea C un círculo que intersecta a los círculos A y B en E y en F, respectivamente, distintos de D. Sea G el punto diametralmente opuesto a D en el círculo con centro C.



El área de la región sombreada es igual al área del cuadrado $DFGE$, cuya diagonal tiene longitud 2. La longitud de su lado es $\sqrt{2}$ y su área es $(\sqrt{2})^2=2$.

Problema 19. En 1991 la población de cierta ciudad era un cuadrado perfecto. Diez años después, el número de habitantes se incrementó en 150 personas y la población era un cuadrado perfecto más 9. Hoy, en 2011, con el incremento de 150 personas más, la población es de nuevo un cuadrado perfecto. ¿Cuál de los siguientes números está más cerca del porcentaje de crecimiento de la población de la ciudad durante este período de veinte años?

(a) 42 (b) 47 (c) 52 (d) 57 (e) 62

Solución. La respuesta es (e).

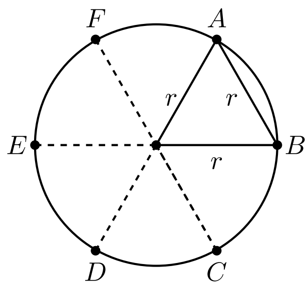
Sean p^2, q^2+9 y $r^2 = p^2+300$ las poblaciones de la ciudad en 1991, 2001 y 2011, respectivamente. Entonces, $q^2+9 = p^2+150$, de donde $q^2-p^2 = 141$. Por lo tanto, $(q-p)(q+p) = 141$ de modo que $q-p=3$ y $q+p=47$, o $q-p=1$ y $q+p=141$. De ahí se tiene $p=22$ o $p=70$. Observemos que si $p=70$, entonces $70^2+300 = 5200 = 52\times 10^2$, que no es un cuadrado perfecto. Por lo tanto, $p=22$, $p^2=484$, $p^2+150 = 634 = 25^2+9$ y $p^2+300 = 784 = 28^2$. El porcentaje del crecimiento de 1991 a 2011 fue de $\frac{784-484}{484}\times 100 \approx 62\,\%$.

Problema 20. Dos puntos en una circunferencia de radio r son seleccionados de forma independiente y al azar. Para cada punto, se dibuja en la dirección de las manecillas del reloj una cuerda de longitud r. ¿Cuál es la probabilidad de que dos cuerdas se intersecten?

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{1}{2}$

Solución. La respuesta es (d).

Sean A el primer punto elegido y B el punto extremo opuesto de la cuerda correspondiente. Al dibujar un radio a cada punto extremo de esta cuerda de longitud r resulta un triángulo equilátero. Entonces una cuerda de longitud r subtiende un arco de $\frac{1}{6}$ de la circunferencia del círculo. Sea FC el diámetro paralelo a AB y dividamos al círculo en seis porciones iguales como se muestra. El segundo punto elegido dará una cuerda que intersecta AB si y sólo si el punto es elegido del arco menor $\widehat{FB}$. Por lo tanto, la probabilidad es $\frac{1}{3}$.



Problema 21. Dos monedas falsas de igual peso se mezclan con 8 monedas idénticas y auténticas. El peso de cada una de las monedas falsas es diferente al peso de cada una de las monedas auténticas. De las 10 monedas, se seleccionan 2 al azar y sin reemplazamiento. De las 8 monedas restantes, se eligen otras 2 al azar y sin reemplazamiento. Si el peso total del primer par de monedas seleccionadas es igual al peso total del segundo par, ¿cuál es la probabilidad de que las 4 monedas sean auténticas?

(a) $\frac{7}{11}$ (b) $\frac{9}{13}$ (c) $\frac{11}{15}$ (d) $\frac{15}{19}$ (e) $\frac{15}{16}$

Solución. La respuesta es (d).
Los pesos de los dos pares de monedas son iguales si cada par contiene el mismo número de monedas falsas. Entonces, el primer par y el segundo par contienen ambos solamente monedas auténticas, o tanto el primer par como el segundo tienen una moneda falsa. El número de maneras de elegir las monedas en el primer caso es, $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} = 420$. El número de maneras de seleccionar las monedas en el segundo caso es, $8 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 1 = 112$. Por lo tanto, la probabilidad requerida es $\frac{420}{112+420} = \frac{15}{19}$.

Problema 22. Cada vértice de un pentágono $ABCDE$ se colorea. Hay 6 colores para elegir y cada diagonal debe tener los extremos de distinto color. ¿Cuántas maneras diferentes hay de colorear?
(a) 2520 (b) 2880 (c) 3120 (d) 3250 (e) 3750

Solución. La respuesta es (c).
Si se usan 5 colores distintos, hay $\binom{6}{5} = 6$ maneras posibles de elegir los colores y pueden ser organizados de $5! = 120$ formas en el pentágono, luego hay $120 \cdot 6 = 720$ coloraciones.
Si se utilizan 4 colores distintos, entonces hay un color duplicado, luego hay $\binom{6}{4}\binom{4}{1} = 60$ maneras distintas de elegir colores. El color repetido debe aparecer en vértices vecinos, hay 5 maneras de elegir a los vértices vecinos y $3! = 6$ maneras de colorear los tres vértices restantes, entonces hay en total $60 \cdot 5 \cdot 6 = 1800$ coloraciones.
Si se usan 3 colores distintos, entonces debe haber dos colores duplicados (pues no es posible que un color aparezca tres veces), luego hay $\binom{6}{3}\binom{3}{2} = 60$ maneras distintas de elegir colores. El color no repetido puede aparecer en 5 posiciones. Como un color duplicado debe aparecer en vértices vecinos, entonces hay 2 maneras de colorear los vértices restantes. Por lo tanto, en este caso hay $60 \cdot 5 \cdot 2 = 600$ coloraciones posibles.
No hay coloraciones con dos o menos colores. Por lo tanto, el número total de coloraciones diferentes es, $720 + 1800 + 600 = 3,120$.

Problema 23. Siete estudiantes cuentan del 1 al 1000 de la siguiente manera:

- Alicia dice todos los números excepto el número del medio de cada grupo consecutivo de tres números. Esto es, Alicia dice,

$$1, 3, 4, 6, 7, 9, \ldots, 997, 999, 1000.$$

- Bárbara dice todos los números que Alicia no dijo, excepto que también omite el número del medio de cada grupo consecutivo de tres números.

- Cándida dice todos los números que no dijeron Alicia y Bárbara, pero también omite el número del medio de cada grupo consecutivo de tres números.

- Diana, Elena y Fátima, dicen todos los números que no han dicho las estudiantes anteriores en orden alfabético, pero también omiten el número del medio de cada grupo consecutivo de tres números.

- Finalmente, Jorge dice el único número que nadie dijo.

¿Qué número dice Jorge?
(a) 37 (b) 242 (c) 365 (d) 728 (e) 998

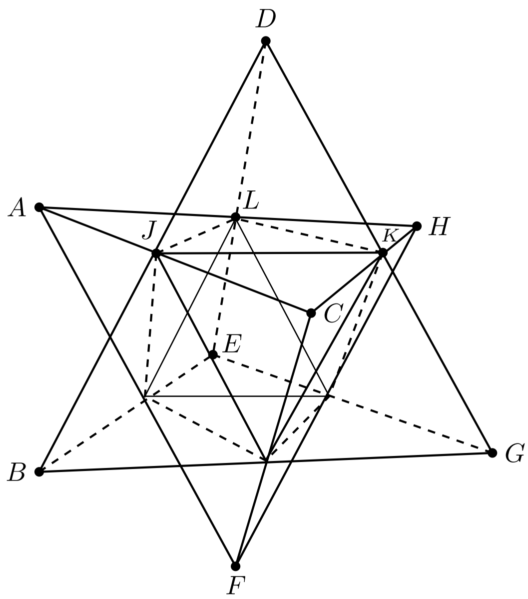
Solución. La respuesta es (c).
Observemos que después que cada persona cuenta, los números dejados para la siguiente persona forman una progresión aritmética. Por ejemplo, Alicia deja todos los números; $2, 5, 8, 11, 14, \ldots, 2 + 3 \times 332$ para Bárbara. Si un estudiante deja la progresión: $a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, \ldots$, entonces el siguiente estudiante deja la progresión $a + d, (a + d) + 3d, (a + d) + 6d, \ldots,$. Esto implica que en la siguiente tabla, cada número en la tercera columna es tres veces la entrada previa en la tercera columna, y cada entrada en la segunda columna es la suma de las dos entradas de la fila de arriba:

Dejado por	Primer término	Diferencia común
Alicia	2	3
Bárbara	5	9
Cándida	14	27
Diana	41	81
Elena	122	243
Fátima	365	729

Por lo tanto, Jorge dice 365.
Segunda solución. Los números no mencionados por Alicia son los números del medio en cada grupo consecutivo de tres, esto es, $2, 5, 8,$ y así sucesivamente. Los números no mencionados por Bárbara son los números del medio en cada grupo de 9, esto es, $5, 14, 23$, y así sucesivamente. En general, los números no mencionados por todos los primeros n estudiantes son los números del medio de cada grupo de 3^n. Como $3^6 = 729$, el único número que no excede a 1000 que no es mencionado por los primeros seis estudiantes es $\frac{729+1}{2} = 365$. Por lo tanto, Jorge dice 365.

Problema 24. Dos tetraedros regulares distintos tienen todos sus vértices en los vértices del mismo cubo unitario. ¿Cuál es el volumen de la región formada por la intersección de los tetraedros?
(a) $\frac{1}{12}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{12}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (d) $\frac{1}{6}$ (e) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

Solución. La respuesta es (d).
Sean T_1 y T_2 los tetraedros y sea R su intersección. Sean $ABCD$ y $EFGH$ los cuadrados, respectivamente, que son las caras superior e inferior del cubo unitario, con E directamente abajo de A y F directamente abajo de B. Sin pérdida de generalidad T_1 tiene vértices A, C, F y H, y T_2 tiene vértices B, D, E y G. Una cara de T_1 es el triángulo ACH, el cual intersecta a los lados de T_2 en los puntos medios J, K y L de AC, CH y HA, respectivamente. Sea S el tetraedro con vértices J, K, L y D.



Entonces S es semejante a T_2 y está contenido en T_2, pero no en R. Las otras tres caras de T_1 recortan de T_2 un tetraedro congruente a S. Por lo tanto el volumen de R es igual al volumen de T_2 menos cuatro veces el volumen de S.
Un tetraedro regular con lado de longitud s tiene área de la base $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$ y altura $\frac{\sqrt{6}}{3}s$, de modo que su volumen es $\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}s^2\right)\left(\frac{\sqrt{6}}{3}s\right) = \frac{\sqrt{2}}{12}s^3$. Debido a que las aristas del tetraedro T_2 son diagonales de las caras del cubo, las aristas de T_2 tienen longitud $\sqrt{2}$. Como J y K son centros de caras adyacentes del cubo, el tetraedro S tiene aristas de longitud $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Por lo tanto el volumen de R es,

$$\frac{\sqrt{2}}{12}\left((\sqrt{2})^3 - 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right) = \frac{1}{6}.$$

Segunda solución. Sean T_1 y T_2 denominados como en la solución anterior. El cubo está partido por T_1 y T_2 en 8 tetraedros congruentes a $DJKL$ (uno por cada vértice del cubo), 12 tetraedros congruentes a $AJLD$ (uno por cada arista del cubo) y el sólido $T_1 \cap T_2$. Como las bases AJL y JLK son triángulos equiláteros con la misma área, y las alturas al vértice D de los tetraedros $AJLD$ y $DJKL$ son iguales, tenemos que los volúmenes de $AJLD$ y $DJKL$ son iguales. Además,

$$\text{Volumen}(AJLD) = \frac{1}{3}\text{Área}(ALD) \cdot h_j,$$

donde $h_j = \frac{1}{2}$ es la distancia de J a la cara ALD, y $\text{Área}(ALD) = \frac{1}{4}$. Por lo tanto, Volumen$(AJLD) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{24}$, y el volumen de $T_1 \cap T_2$ es igual a $1-(8+12)\cdot\frac{1}{24} = \frac{1}{6}$.

Problema 25. Sea R una región cuadrada y $n \geq 4$ un entero. Un punto X en el interior de R se llama “particional n-rayos”, si existen n rayos saliendo de X que dividen a R en n triángulos de la misma área. ¿Cuántos puntos son “particional 100-rayos” pero no son “particional 60-rayos”?
(a) 1500 (b) 1560 (c) 2320 (d) 2480 (e) 2500

Solución. La respuesta es (c).
Asumamos sin pérdida de generalidad que R está limitado por el cuadrado con vértices $A=(0,0)$, $B=(1,0)$, $C=(1,1)$ y $D=(0,1)$, y sea $X=(x,y)$ particional n-rayos. Como los n rayos particionan a R en triángulos, ellos deben incluir los rayos desde X a A, B, C y D. Sean n_1, n_2, n_3 y n_4 el número de rayos que intersectan los interiores de AB, BC, CD y DA, respectivamente. Como los triángulos ABX y CDX juntos tienen la misma área que los triángulos BCX y DAX juntos, tenemos que $n_1+n_3 = n_2+n_4 = \frac{n}{2}-2$, de donde n es par. Además los n_1+1 triángulos con un lado sobre AB tienen igual área, de modo que cada uno tiene área $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n_1+1}\cdot y$. De manera análoga, los triángulos con lados sobre BC, CD y DA tienen áreas $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n_2+1}\cdot(1-x)$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n_3+1}\cdot(1-y)$ y $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n_4+1}\cdot(x)$, respectivamente.
Igualando, se tiene que,

$$x = \frac{n_4+1}{n_2+n_4+2} = \frac{2(n_4+1)}{n} \quad \text{y} \quad y = \frac{n_1+1}{n_1+n_3+2} = \frac{2(n_1+1)}{n}.$$

Entonces un punto particional n-rayos debe ser de la forma $X = \left(\frac{2a}{n}, \frac{2b}{n}\right)$ con $1 \leq a < \frac{n}{2}$ y $1 \leq b < \frac{n}{2}$. De manera recíproca, si X tiene esta forma, R se particiona en n triángulos de igual área por los rayos trazados desde X que parten a AB, BC, CD y DA en b, $\frac{n}{2}-a$, $\frac{n}{2}-b$ y a segmentos congruentes, respectivamente.
Asumamos que X es particional 100-rayos. Si X es también particional 60-rayos, entonces $X = \left(\frac{a}{50}, \frac{b}{50}\right) = \left(\frac{c}{30}, \frac{d}{30}\right)$, para algunos enteros $1 \leq a, b \leq 49$ y $1 \leq c, d \leq 29$. Por lo tanto, $3a = 5c$ y $3b = 5d$; esto es, ambos a y b son múltiplos de 5. Recíprocamente, si a y b son múltiplos de 5, entonces,

$$X = \left(\frac{a}{50}, \frac{b}{50}\right) = \left(\frac{\frac{3a}{5}}{30}, \frac{\frac{3b}{5}}{30}\right)$$

es particional 60-rayos, ya que $c = \frac{3}{5}a < \frac{3}{5}\cdot 50 = 30$ y $d = \frac{3}{5}b < \frac{3}{5}\cdot 50 = 30$. Como hay exactamente 9 múltiplos de 5 entre 1 y 49, el número requerido de puntos X es igual a $49^2 - 9^2 = 40 \cdot 58 = 2320$.

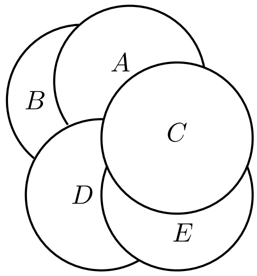
AMC 12A

Problema 1. Un plan de teléfono celular cuesta \$20 cada mes, más 5 centavos por mensaje de texto enviado, más 10 centavos por cada minuto utilizado después de 30 horas. En enero Michelle envío 100 mensajes de texto y habló durante 30.5 horas. ¿Cuánto es

lo que debe pagar?
(a) $\$24$ (b) $\$24.50$ (c) $\$25.50$ (d) $\$28$ (e) $\$30$

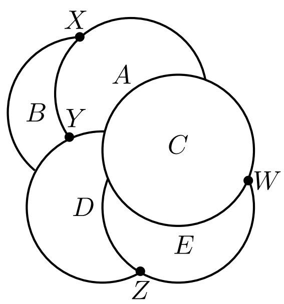
Solución. La respuesta es (d).
Véase la solución del problema 1 del AMC 10.

Problema 2. Hay 5 monedas colocadas sobre una mesa como se muestra en la figura.



¿Cuál es el orden de las monedas de arriba hacia abajo?
(a) (C, A, E, D, B) (b) (C, A, D, E, B) (c) (C, D, E, A, B)
(d) (C, E, A, D, B) (e) (C, E, D, A, B)

Solución. La respuesta es (e).
La circunferencia de la moneda B no continúa más allá del punto X donde intersecta la circunferencia de la moneda A. La moneda A está encima de la moneda B. De manera análoga, los puntos Y, Z y W en la figura muestran que la moneda D está encima de la moneda A, la moneda E está encima de la moneda D y la moneda C está encima de la moneda E, respectivamente. Por lo tanto, el orden de las monedas de arriba hacia abajo es (C, E, D, A, B).



Problema 3. Una botella pequeña de shampoo puede contener 35 mililitros de shampoo, mientras que una botella grande puede contener 500 mililitros. Jasmine quiere comprar el mínimo número necesario de botellas pequeñas para llenar totalmente una

botella grande. ¿Cuántas botellas debe comprar?
(a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 14 (e) 15

Solución. La respuesta es (e).
Véase la solución del problema 2 del AMC 10.

Problema 4. En una escuela primaria, los estudiantes de tercer, cuarto y quinto grado corren en promedio 12, 15 y 10 minutos por día, respectivamente. Hay el doble de estudiantes de tercer grado que de cuarto grado y el doble de estudiantes de cuarto que de quinto grado. ¿Cuál es el número promedio de minutos corridos por los estudiantes al día?
(a) 12 (b) $\frac{37}{3}$ (c) $\frac{88}{7}$ (d) 13 (e) 14

Solución. La respuesta es (c).
Véase la solución del problema 5 del AMC 10.

Problema 5. El verano pasado el $30\,\%$ de las aves que vivían en Ciudad Lago eran gansos, $25\,\%$ eran cisnes, $10\,\%$ eran garzas y $35\,\%$ eran patos. ¿Qué porcentaje de las aves que no eran cisnes eran gansos?
(a) 20 (b) 30 (c) 40 (d) 50 (e) 60

Solución. La respuesta es (c).
Véase la solución del problema 8 del AMC 10.

Problema 6. Los jugadores de un equipo de basquetbol hicieron tiros que valen 3 puntos, otros que valen 2 puntos y algunos tiros libres que valen 1 punto. Anotaron la misma cantidad de puntos con los tiros de 2 puntos que con los tiros de 3 puntos. El número de tiros libres exitosos es mayor en 1 que el número de tiros exitosos de 2 puntos. Si el puntaje final del equipo fue de 61 puntos, ¿cuántos tiros libres exitosos hicieron?
(a) 13 (b) 14 (c) 15 (d) 16 (e) 17

Solución. La respuesta es (a).
Véase la solución del problema 12 del AMC 10.

Problema 7. Una mayoría de los 30 estudiantes de la clase del Sr. Gómez compraron lápices en la librería de la escuela. Cada uno de estos estudiantes compró el mismo número de lápices y este número es mayor que 1. El precio en centavos de cada lápiz es mayor que el número de lápices que cada estudiante compró y el costo total de todos los lápices fue de 17.71 dólares. ¿Cuál es el precio en centavos de cada lápiz?
(a) 7 (b) 11 (c) 17 (d) 23 (e) 77

Solución. La respuesta es (b).
Véase la solución del problema 10 del AMC 10.

Problema 8. En la secuencia de 8 términos A, B, C, D, E, F, G, H el valor de C es 5 y la suma de cualesquiera tres términos consecutivos es 30. ¿Cuánto vale $A + H$?
(a) 17 (b) 18 (c) 25 (d) 26 (e) 43

Solución. La respuesta es (c).
Véase la solución del problema 17 del AMC 10.

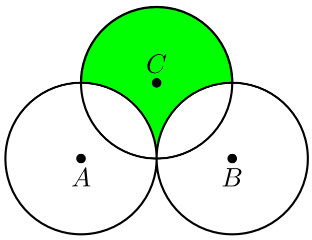
Problema 9. En una convención de gemelos y trillizos, había 9 conjuntos de gemelos y 6 conjuntos de trillizos, todos de familias distintas. Cada gemelo le dio la mano a todos los gemelos excepto a su hermano(a) y a la mitad de los trillizos. Cada trillizo dio la mano a todos los trillizos excepto a sus hermanos (hermanas) y a la mitad de los gemelos. ¿Cuántos apretones de manos hubo?
(a) 324 (b) 441 (c) 630 (d) 648 (e) 882

Solución. La respuesta es (b).
Cada uno de los 18 gemelos saludó de mano a 16 gemelos y a 9 trillizos, dando un total de $18 \cdot 25$ saludos de manos. De manera análoga, cada uno de los 18 trillizos saludó de mano a 15 trillizos y a 9 gemelos, dando un total de $18 \cdot 24$ saludos de mano. En esta cuenta se considera cada saludo de mano dos veces, por lo tanto el número de saludos de mano es $\frac{1}{2}(18(25) + 18(24)) = 9(49) = 441$.

Problema 10. Un par de dados de 6 caras son lanzados. La suma de los números que se obtiene es el diámetro de un círculo. ¿Cuál es la probabilidad de que el área del círculo sea menor que el perímetro?
(a) $\frac{1}{36}$ (b)$\frac{1}{12}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{4}$ (e) $\frac{5}{18}$

Solución. La respuesta es (b).
Véase la solución del problema 14 del AMC 10.

Problema 11. Cada uno de los círculos tiene radio 1. Los círculos con centros A y B son tangentes. Si el círculo con centro C es tangente con el punto medio del segmento AB, ¿cuánto vale el área sombreada?



(a) $3 - \frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) 2 (d) $\frac{3\pi}{4}$ (e) $1 + \frac{\pi}{2}$

Solución. La respuesta es (c).
Véase la solución del problema 18 del AMC 10.

Problema 12. Una lancha de motor y una balsa partieron desde el muelle A río abajo. La balsa recorrió la distancia hasta el muelle B a la velocidad de la corriente del río. La lancha de motor se mantuvo a una velocidad constante con respecto al río. La lancha de motor llegó al muelle B, e inmediatamente giró y viajó de regreso río arriba. Se

encontró con la balsa 9 horas después de dejar el muelle A. ¿Cuántas horas le tomó a la lancha de motor ir del muelle A al muelle B?
(a) 3 (b) 3.5 (c) 4 (d) 4.5 (e) 5

Solución. La respuesta es (d).
Asumamos que la lancha de motor y la balsa se encuentran en el punto O del río. Sea x la velocidad de la lancha y sea y la velocidad de la balsa y de la corriente del río. Entonces $x+y$ es la velocidad de la lancha corriente abajo y $x-y$ es la velocidad de la lancha de motor corriente arriba. Sea S la distancia entre los muelles A y B, entonces $OA = 9y$ y $OB = S - 9y$. Luego, dado que tiempo es igual a distancia entre velocidad, tenemos que,

$$\frac{S}{x+y} + \frac{S-9y}{x-y} = 9,$$

de donde $S = \frac{9}{2}(x+y)$. Entonces, el tiempo que le tomó a la lancha de motor para ir del muelle A al muelle B es,

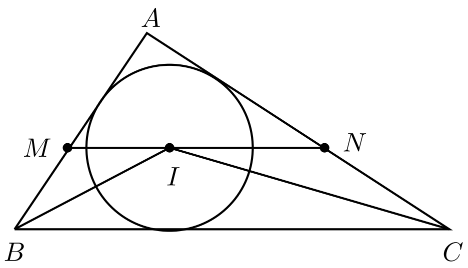
$$\frac{S}{x+y} = \frac{9(x+y)}{2(x+y)} = 4.5 \text{ horas.}$$

Segunda solución. Desde el punto de vista de la balsa, la lancha simplemente se fue, dio la vuelta, y regresó, todo con la misma velocidad. Debido a que el viaje demoró 9 horas, la lancha debió de haber dado la vuelta después de 4.5 horas.

Problema 13. En un triángulo ABC, se tiene que $AB = 12$, $BC = 24$ y $AC = 18$. La recta que pasa por el incentro del triángulo ABC y es paralela a BC, intersecta al segmento AB en el punto M y al segmento AC en el punto N. ¿Cuál es el perímetro del triángulo AMN?
(a) 27 (b) 30 (c) 33 (d) 36 (e) 42

Solución. La respuesta es (b).
Sea I el incentro del triángulo ABC. Como I es la intersección de las bisectrices de los ángulos del triángulo y MN es paralela a BC, se sigue que $\angle IBM = \angle CBI = \angle MIB$ y $\angle NCI = \angle ICB = \angle CIN$. Por lo tanto, los triángulos BMI y CNI son isósceles con $MB = MI$ y $CN = IN$. Luego, el perímetro del triángulo AMN es,

$$\begin{aligned} AM + MN + NA &= AM + MI + IN + NA \\ &= AM + MB + CN + NA \\ &= AB + AC = 12 + 18 = 30. \end{aligned}$$



Problema 14. Supongamos que a y b son enteros positivos de un solo dígito elegidos de manera independiente y al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el punto (a, b) se encuentre por encima de la parábola $y = ax^2 - bx$?
(a) $\frac{11}{81}$ (b) $\frac{13}{81}$ (c) $\frac{5}{27}$ (d) $\frac{17}{81}$ (e) $\frac{19}{81}$

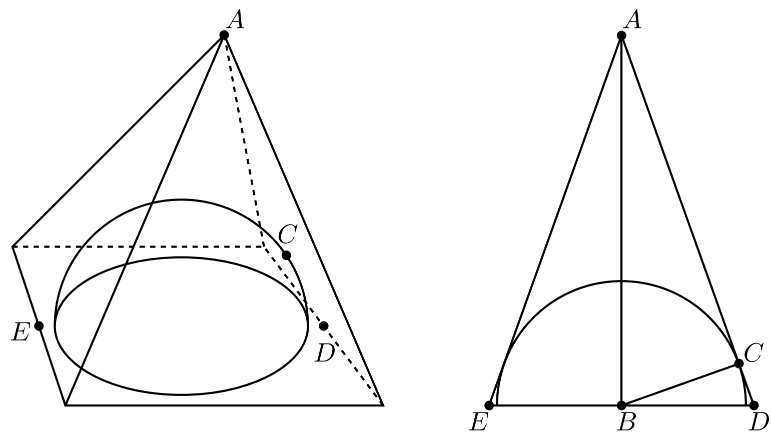
Solución. La respuesta es (e).
El punto (a, b) está por encima de la parábola si y sólo si $b > a^3 - ab$. Como a es positivo, esto es equivalente a $b > \frac{a^3}{a+1}$. Si $a = 1$, entonces b puede ser cualquier dígito del 1 al 9 inclusive. Si $a = 2$, entonces b puede ser cualquier dígito entre 3 y 9 inclusive. Si $a = 3$, entonces b puede ser cualquier dígito entre 7 y 9 inclusive. Si $a > 3$, no hay ningún b que satisfaga $b > \frac{a^3}{a+1}$. Por lo tanto hay $9 + 7 + 3 = 19$ pares que satisfacen la condición, de un total de $9 \cdot 9 = 81$ pares. Luego, la probabilidad requerida es $\frac{19}{81}$.

Problema 15. La base circular de una semiesfera de radio 2 está sobre la base de una pirámide cuadrangular de altura 6. La semiesfera es tangente a las otras 4 caras de la pirámide. ¿Cuál es la longitud de cada arista de la base de la pirámide?
(a) $3\sqrt{2}$ (b) $\frac{13}{3}$ (c) $4\sqrt{2}$ (d) 6 (e) $\frac{13}{2}$

Solución. La respuesta es (a).
Se muestra una sección transversal de la figura, donde A es ápice, B es el centro de la base, D y E son puntos medios de lados opuestos en la base, y el hemisferio se intersecta con AD en C.
En el triángulo rectángulo ABC, $AB = 6$ y $BC = 2$, de donde $AC = 4\sqrt{2}$. Como los triángulos ABC y ADB son semejantes, se sigue que,

$$BD = \frac{BC \cdot AB}{AC} = \frac{2 \cdot 6}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Entonces, la longitud de las aristas en la base es $DE = 2BD = 3\sqrt{2}$.



Problema 16. Cada vértice de un pentágono $ABCDE$ se colorea. Hay 6 colores para elegir y cada diagonal debe tener los extremos de distinto color. ¿Cuántas maneras diferentes hay de colorear?

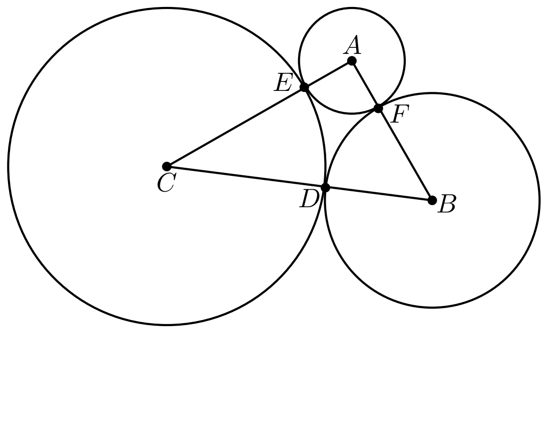
(a) 2520 (b) 2880 (c) 3120 (d) 3250 (e) 3750

Solución. La respuesta es (c).
Véase la solución del problema 22 del AMC 10.

Problema 17. Tres círculos de radios 1, 2 y 3 son tangentes externamente dos a dos. ¿Cuál es el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de tangencia?

(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) 1 (d) $\frac{6}{5}$ (e) $\frac{4}{3}$

Solución. La respuesta es (d).
Denotemos con (ABC) al área del triángulo ABC. Sean A, B y C los centros de los círculos con radios 1, 2 y 3, respectivamente. Sean D, E y F los puntos de tangencia como se muestra en la figura.



Ya que $AB = AF + FB = 1 + 2 = 3$, $BC = BD + DC = 2 + 3 = 5$ y $CA = CE + EA = 3 + 1 = 4$, se sigue que el triángulo ABC es rectángulo con lados de longitudes 3, 4 y 5. Por lo tanto,

$$(ABC) = \frac{1}{2}AB \cdot AC = 6, \quad (AEF) = \frac{1}{2}AE \cdot AF = \frac{1}{2},$$

$$(BFD) = \frac{1}{2}BD \cdot BF \cdot \operatorname{sen}(\angle FBD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5},$$

$$(CDE) = \frac{1}{2}CD \cdot CE \cdot \operatorname{sen}(\angle DCE) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{27}{10}$$

y $(DEF) = (ABC) - (AEF) - (BFD) - (CDE) = 6 - \frac{1}{2} - \frac{8}{5} - \frac{27}{10} = \frac{6}{5}$.

Problema 18. Supongamos que $|x + y| + |x - y| = 2$. ¿Cuál es el valor mayor posible de $x^2 - 6x + y^2$?

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

Solución. La respuesta es (d).

Consideramos la ecuación $|x + y| + |x - y| = 2$. Como cada lado de la ecuación es no negativo, podemos elevar al cuadrado y obtenemos,

$$\begin{aligned} (x+y)^2 + 2|(x+y)(x-y)| + (x-y)^2 &= 4, \\ x^2 + y^2 + |x^2 - y^2| &= 2. \end{aligned}$$

Si $|x| \geq |y|$ esta ecuación se reduce a $2x^2 = 2$ cuya solución es $x = \pm 1$ y $-1 \leq y \leq 1$. Análogamente, si $|y| \geq |x|$ obtenemos $y = \pm 1$ y $-1 \leq x \leq 1$. Por lo tanto, la gráfica de la ecuación $|x + y| + |x - y| = 2$ es el cuadrado delimitado por las rectas $x = \pm 1$ y $y = \pm 1$. Para $c > -9$, la ecuación $c = x^2 - 6x + y^2 = (x - 3)^2 + y^2 - 9$ es la ecuación de una circunferencia con centro $(3, 0)$ y radio $\sqrt{c + 9}$. Entre todas estas circunferencias que intersectan el cuadrado, la mayor contiene los puntos $(-1, \pm 1)$ y tiene radio $\sqrt{4^1 + 1^2} = \sqrt{17}$. Se sigue que el valor máximo de c es $17 - 9 = 8$.

Problema 19. En una competencia con N jugadores, el número de jugadores con status VIP es igual a

$$2^{1 + \lfloor \log_2(N-1) \rfloor} - N.$$

Suponiendo que 19 jugadores tienen status VIP, ¿cuál es la suma de los dos más pequeños valores de N? (Nota: $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x).

(a) 38 (b) 90 (c) 154 (d) 406 (e) 1024

Solución. La respuesta es (c).

Las condiciones dadas implican que $N \geq 19$ y $1 + \lfloor \log_2(N - 1) \rfloor = \log_2(N + 19)$. Como $1 + \lfloor \log_2(N-1) \rfloor$ es un entero positivo, $\log_2(N+19)$ también lo es; por lo tanto $2^k = N + 19 \geq 38$ para algún entero k. Se sigue que $k \geq 6$ y que los dos menores valores de N son $2^6 - 19 = 45$ y $2^7 - 19 = 109$, cuya suma es 154.

Nota: Esta fórmula para el número de jugadores con estado VIP da un método para determinar el número de los que no jugarán en la primera ronda en un torneo de eliminación simple.

Problema 20. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son enteros. Supongamos que $f(1) = 0$, $50 < f(7) < 60$, $70 < f(8) < 80$, y $5000k < f(100) < 5000(k+1)$ para algún entero k. ¿Cuál es el valor de k?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Solución. La respuesta es (c).

Nótese que $f(1) = a+b+c = 0$, entonces $f(7) = 49a+7b+c = 48a+6b = 6(8a+b)$. Por lo tanto, $f(7)$ es un número entero múltiplo de 6 que está estrictamente entre 50 y 60, de modo que $f(7) = 54$ y $8a + b = 9$. De manera similar, $f(8) = 64a + 8b + c = 63a+7b = 7(9a+b)$. Por lo tanto, $f(8)$ es un número entero múltiplo de 7 estrictamente entre 70 y 80, de modo que $f(8) = 77$ y $9a + b = 11$. Se sigue que $a = 2$, $b = -7$ y $c = 5$. Por lo tanto, $f(100) = 2 \cdot 100^2 - 7 \cdot 100 + 5 = 19,305$, y entonces $k = 3$.

Problema 21. Sean $f_1(x) = \sqrt{1-x}$ y $f_n(x) = f_{n-1}(\sqrt{n^2 - x})$ para cada entero $n \geq 2$. Si N es el mayor valor de n para el cual el dominio de f_n es no vacío y el dominio de f_N es $\{c\}$, ¿cuál es el valor de $N + c$?

(a) -226 (b) -144 (c) -20 (d) 20 (e) 144

Solución. La respuesta es (a).

$f_2(x) = \sqrt{1 - \sqrt{4-x}}$ está definida si y sólo si $0 \leq \sqrt{4-x} \leq 1$, de donde el dominio de f_2 es el intervalo $[3, 4]$. De manera similar, el dominio de f_3 es el conjunto solución de la desigualdad $3 \leq \sqrt{9-x} \leq 4$, el cual es el intervalo $[-7, 0]$, y el dominio de f_4 es el conjunto solución de la desigualdad $-7 \leq \sqrt{16-x} \leq 0$, el cual es $\{16\}$. El dominio de f_5 es el conjunto solución de la ecuación $\sqrt{25-x} = 16$, el cual es $\{-231\}$, y como la ecuación $\sqrt{36-x} = -231$ no tiene soluciones reales, el dominio de f_6 es el conjunto vacío. Por lo tanto, $N + c = 5 + (-231) = -226$.

Problema 22. Sea R una región cuadrada y $n \geq 4$ un entero. Un punto X en el interior de R se llama “particional n-rayos”, si existen n rayos saliendo de X que dividen a R en n triángulos de la misma área. ¿Cuántos puntos son “particional 100-rayos” pero no son “particional 60-rayos”?

(a) 1500 (b) 1560 (c) 2320 (d) 2480 (e) 2500

Solución. La respuesta es (c).

Véase la solución del problema 25 del AMC 10.

Problema 23. Sean $f(z) = \frac{z+a}{z+b}$ y $g(z) = f(f(z))$, donde a y b son números complejos. Supongamos que $|a| = 1$ y que $g(g(z)) = z$ para todo z tal que $g(g(z))$ está definido. ¿Cuál es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de $|b|$?

(a) 0 (b) $\sqrt{2} - 1$ (c) $\sqrt{3} - 1$ (d) 1 (e) 2

Solución. La respuesta es (c).

Nótese que,

$$g(z) = \frac{\frac{z+a}{z+b} + a}{\frac{z+a}{z+b} + b} = \frac{(1+a)z + a(1+b)}{(1+b)z + (a+b^2)} = \frac{Az+B}{Cz+D},$$

donde $A = 1 + a$, $B = a(1 + b)$, $C = 1 + b$ y $D = a + b^2$. Entonces,

$$g(g(z)) = \frac{Ag(z) + B}{Cg(z) + D}.$$

Haciendo $g(g(z)) = z$ y resolviendo para $g(z)$ se obtiene $g(z) = \frac{-Dz+B}{Cz-A}$. Igualando las dos expresiones para $g(z)$ se obtiene,

$$(Az + B)(Cz - A) = (-Dz + B)(Cz + D),$$

es decir,

$$(A + D)(z^2C + z(D - A) - B) = 0,$$

que por hipótesis, debe cumplirse para toda z tal que $g(g(z))$ está definido. Por lo tanto, o bien $B = C = 0$ (y $A = D$) o bien $A + D = 0$. En el primer caso, $b = -1$, $f(z) = \frac{z+a}{z-1}$ y $g(z) = \frac{(1+a)z}{1+a} = z$, como se requiere, a no ser que $a = -1$. (Note que en este caso $a = -1$ implicaría $f(z) = 1$ para toda $z \neq -b$, lo cual contradice $g(g(z)) = z$ para toda z tal que $g(g(z))$ está definido.)
En el segundo caso $1 + 2a + b^2 = 0$, de donde $|b|^2 = |2a + 1|$. Como $|a| = 1$, de la desigualdad del triángulo, se obtiene,

$$1 = |2 \cdot |a| - 1| \leq |2a + 1| \leq 2|a| + 1 = 3,$$

de donde $1 \leq |b| \leq \sqrt{3}$. El mínimo $|b| = 1$ se consigue cuando $a = -1$ y $b = 1$ (o como en el caso anterior, cuando $b = -1$). El máximo $|b| = \sqrt{3}$ se consigue cuando $a = 1$ y $b = \pm\sqrt{3}i$. La diferencia requerida es $\sqrt{3} - 1$.
Nota: Las condiciones implican que a está sobre el círculo unitario del plano complejo, de modo que $2a + 1$ está en un círculo de radio 2 con centro en 1. Los pasos antes mostrados son reversibles, de donde si $b^2 = -1 - 2a$, entonces $g(g(z)) = z$ (a no ser que $a = b = -1$). Por lo tanto, b^2 puede estar en cualquier parte en el círculo de radio 2 centrado en -1, y $|b|$ puede tomar cualquier valor entre 1 y $\sqrt{3}$.

Problema 24. Considere todos los cuadriláteros $ABCD$ tales que $AB = 14$, $BC = 9$, $CD = 7$ y $DA = 12$. ¿Cuál es el radio del círculo más grande que cabe dentro de tal cuadrilátero?

(a) $\sqrt{15}$ (b) $\sqrt{21}$ (c) $2\sqrt{6}$ (d) 5 (e) $2\sqrt{7}$

Solución. La respuesta es (c).
Como $AB + CD = 21 = BC + DA$, se sigue que $ABCD$ siempre tiene una circunferencia inscrita tangente a sus cuatro lados. Sea r el radio de la circunferencia inscrita. Nótese que $(ABCD) = \frac{1}{2}r(AB + BC + CD + DA) = 21r$. Por lo tanto, el radio es máximo cuando el área es maximizada. Nótese que $(ABC) = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 9 \cdot \operatorname{sen}(B) = 63 \operatorname{sen}(B)$ y $(ACD) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 7 \cdot \operatorname{sen}(D) = 42 \operatorname{sen}(D)$. Por un lado, tenemos que,

$$\begin{aligned} (ABCD)^2 &= [(ABC) + (ACD)]^2 \\ &= 63^2 \operatorname{sen}^2(B) + 42^2 \operatorname{sen}^2(D) + 2 \cdot 42 \cdot 63 \cdot \operatorname{sen}(B) \operatorname{sen}(D). \end{aligned}$$

Por otro lado, por la ley de los cosenos,

$$AC^2 = 12^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \cos(D) = 14^2 + 9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 14 \cdot \cos(B).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 21^2 &= \left(\frac{2(26)+2(16)}{4}\right)^2 = \left(\frac{14^2-12^2+9^2-7^2}{4}\right)^2 \\ &= (63\cos(B)-42\cos(D))^2 \\ &= 63^2\cos^2(B)+42^2\cos^2(D)-2\cdot 42\cdot 63\cos(B)\cos(D). \end{aligned}$$

Sumando estas dos identidades obtenemos,

$$\begin{aligned} (ABCD)^2+21^2 &= 63^2+42^2-2\cdot 42\cdot 63\cdot\cos(B+D) \\ &\leq 63^2+42^2+2\cdot 42\cdot 63 = (63+42)^2 = 105^2, \end{aligned}$$

con la igualdad si y sólo si $B+D=\pi$, es decir, si y sólo si $ABCD$ es cíclico. Por lo tanto, $(ABCD)^2 \leq 105^2-21^2 = 21^2(5^2-1) = 42^2\cdot 6$, y el máximo requerido es $r=\frac{1}{21}(ABCD)=2\sqrt{6}$.

Segunda solución. Establezcamos como en la primera solución que r se maximiza cuando el área se maximiza. La fórmula de Bretshneider, la cual generaliza la fórmula de Brahmagupta, establece que el área de un cuadrilátero arbitrario con lados de longitudes a, b, c y d, está dada por,

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\theta},$$

donde $s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ y θ es la mitad de la suma de cualquier par de ángulos opuestos. Para a, b, c y d fijos, el área se maximiza cuando $\cos\theta=0$. Por lo tanto, el área se maximiza cuando $\theta=\frac{1}{2}\pi$, esto es, cuando el cuadrilátero es cíclico. En este caso, el área es igual a $\sqrt{7\cdot 12\cdot 14\cdot 9}=42\sqrt{6}$, y el radio máximo requerido es $r=\frac{1}{21}\cdot 42\sqrt{6}=2\sqrt{6}$.

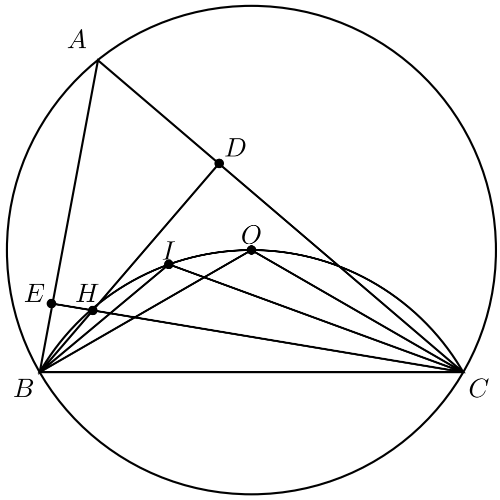
Problema 25. En el triángulo ABC se tiene que $\angle BAC=60°$, $\angle CBA\leq 90°$, $BC=1$ y $AC\geq AB$. Sean H, I y O el ortocentro, incentro y circuncentro del triángulo ABC, respectivamente. Supongamos que el área del pentágono $BCOIH$ es la mayor posible. ¿Cuál es la medida del ángulo $\angle CBA$?

(a) $60°$ (b) $72°$ (c) $75°$ (d) $80°$ (e) $90°$

Solución. La respuesta es (d).

Por el teorema del ángulo inscrito, $\angle BOC=2\angle BAC=120°$. Sean D y E los pies de las alturas del triángulo ABC desde B y C, respectivamente. Como CE y BD se intersectan en H,

$$\begin{aligned} \angle BHC &= \angle DHE = 360° - \angle HEA - \angle ADH - \angle EAD \\ &= 360° - 90° - 90° - 60° = 120°. \end{aligned}$$



Como las rectas BI y CI son bisectrices del $\angle CBA$ y del $\angle ACB$, respectivamente, se sigue que,

$$\begin{aligned}\angle BIC &= 180^\circ - \angle ICB - \angle CBI = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle CBA)\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = 120^\circ.\end{aligned}$$

Entonces, los puntos B, C, O, I y H están todos en una misma circunferencia. Además,

$$\begin{aligned}\angle OCI &= \angle ACI - \angle ACO = \frac{1}{2}\angle ACB - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle COA\right)\\ &= \frac{1}{2}\angle ACB - (90^\circ - \angle CBA)\\ &= \frac{1}{2}\angle ACB - 90^\circ + (120^\circ - \angle ACB) = 30^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB,\end{aligned}$$

y $\angle ICH = \angle ACH - \angle ACI = (90^\circ - \angle EAC) - \frac{1}{2}\angle ACB = 30^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB$. Entonces $OI = IH$. Como $(BCOIH) = (BCO) + (BOIH)$ y BCO es un triángulo isósceles con $BC = 1$ y $OB = OC = \frac{1}{\sqrt{3}}$, es suficiente maximizar el área del cuadrilátero $BOIH$. Si P_1 y P_2 son puntos en el arco $\widehat{BO}$ con $BP_1 < BP_2$, entonces el área máxima de OBP_1P_2 ocurre cuando $BP_1 = P_1P_2 = P_2O$. De hecho, si $BP_1 \neq P_1P_2$, entonces reemplazando P_1 por el punto P_1' ubicado a mitad de camino en el arco $\widehat{BP_2}$, produce un triángulo $BP_1'P_2$ con área mayor que la del triángulo BP_1P_2, y el área del triángulo BOP_2 permanece igual. De manera similar, si $P_1P_2 \neq P_2O$, entonces reemplazando P_2 por el punto medio P_2' del arco $\widehat{P_1O}$ se tiene que el área del triángulo $P_1P_2'O$ aumenta y el área del triángulo BP_1O permanece igual.
Por lo tanto, el máximo se consigue cuando $OI = IH = HB$, esto es, cuando $\angle OCI = \angle ICH = \angle HCB = \frac{1}{3}\angle OCB = 10^\circ$. Luego, $30^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB = 10^\circ$, de donde $\angle ACB = 40^\circ$ y $\angle CBA = 80^\circ$.

XIII Olimpiada Centroamericana y del Caribe

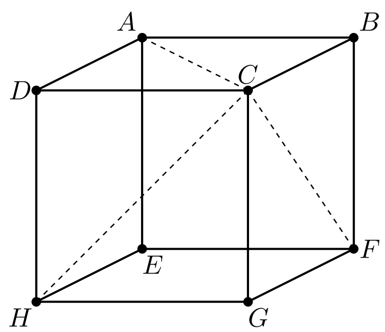
Del 16 al 26 de junio de 2011 se celebró en Colima, México, la XIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. México ocupó el primer lugar, con 118 puntos, de entre los 13 países que participaron. Éste es el puntaje más alto que se ha obtenido en una Olimpiada Centroamericana.

La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Adán Medrano Martín del Campo (Jalisco), Enrique Chiu Han (Distrito Federal) y Juan Carlos Ortiz Rhoton (Jalisco). Todos ellos obtuvieron medalla de oro. Enrique obtuvo 41 puntos de un total de 42, Adán obtuvo 40 puntos y Juan Carlos obtuvo 37 puntos.

A continuación presentamos los exámenes y sus soluciones de la XIII Olimpiada Centroamericana y del Caribe. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. En cada uno de los vértices de un cubo hay una mosca. Al sonar un silbato cada una de las moscas vuela a alguno de los vértices del cubo situado en una misma cara que el vértice de donde partió, pero diagonalmente opuesto a éste. Al sonar el silbato, ¿de cuántas maneras pueden volar las moscas de modo que en ningún vértice queden dos o más moscas?

Solución de Ana Sofía Domínguez Cajas (Guatemala). Tenemos que cada mosca tiene 3 posibilidades a dónde ir, para C: H, F o A; para H: C, F o A; para F: H, C o A; y para A: H, F o C.

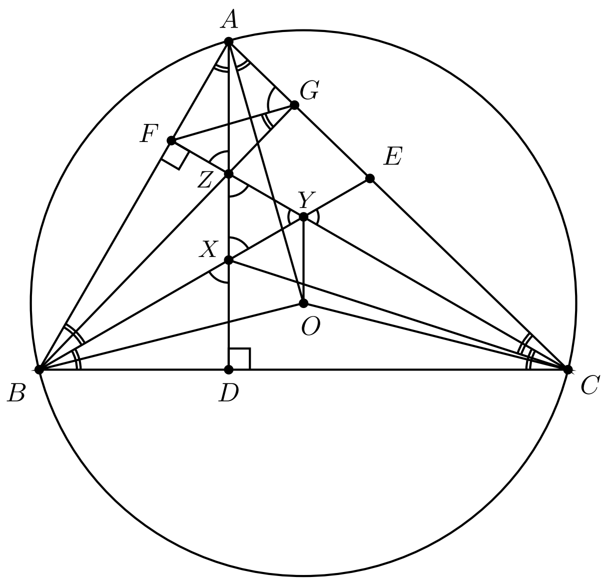


Ahora sabemos que las moscas en H, C, F o A no se ponen en cualquiera de los vértices B, D, E o G. Entonces vamos a denominar al grupo de vértices C, A, H, F como C' y al grupo de vértices B, D, E, G como G'. Lo que pase con las moscas en C' puede pasar con las moscas en G'. Es decir, que luego de que suene el silbato como sea que quede C' puede quedar G' y como sea que quede G' puede quedar C'. Ahora veamos todas las posibilidades de C', que son las mismas de G'. Como lo que hagan las moscas de un grupo no afecta en nada al otro, podemos ver en el dibujo que pasa lo mismo pero reflejado. A A le corresponde B, a H le corresponde G, a E le corresponde

F y a C le toca D.
Supongamos que la mosca que está en C se mueve a H, entonces la mosca en H se tiene que mover y tiene tres posibilidades: A, F o C. Si elige A, la mosca de A se tiene que mover a F y entonces la mosca de F a C. Luego hay 3 posibilidades si C se mueve a H. Análogamente hay tres posibilidades si C se mueve a A o a F. Entonces en C' hay 9 posibilidades y por lo tanto, en G' también. Por lo tanto, en total hay 81 maneras en que pueden volar las moscas, de modo que en ningún vértice queden 2 o más moscas.

Problema 2. Sean ABC un triángulo escaleno, D el pie de la altura desde A, E la intersección del lado AC con la bisectriz del $\angle ABC$, y F un punto sobre el lado AB. Sea O el circuncentro del triángulo ABC y sean X, Y, Z los puntos donde se cortan las rectas AD con BE, BE con CF, CF con AD, respectivamente. Si XYZ es un triángulo equilátero, demuestra que uno de los triángulos OXY, OYZ, OZX es un triángulo equilátero.

Solución de Oscar Armando Hidalgo Arévalo (El Salvador). Siempre habrá un triángulo equilátero donde O es uno de los vértices. Los otros dos vértices son aquellos que su recta corta al plano dejando a O de un lado y al otro punto del otro lado. Por ejemplo, en este caso XYO es el triángulo equilátero.



Como el triángulo XYZ es equilátero, entonces $\angle YXZ = \angle XZY = \angle XYZ = 60°$. Luego, como los ángulos opuestos por el vértice son iguales, tenemos que $\angle YXZ = \angle BXD = 60°$, y como $\angle XDB = 90°$, entonces $\angle DBX = 30°$. Análogamente en el triángulo DZC tenemos que, $\angle CDZ = 90°$ y $\angle DZC = 60°$, luego $\angle DCZ = 30°$. Además, como BX es bisectriz del ángulo DBF, entonces $\angle XBF = 30°$. De

aquí que $\angle BFC = 90°$ y Z es el ortocentro del triángulo ABC. Además, como $\angle FZA = 60°$, tenemos que $\angle FAZ = 30°$.
Ahora bien, como O es el circuncentro del triángulo ABC, entonces $AO = OB = OC$, es decir, el triángulo AOC es isósceles. Además Z es el ortocentro del triángulo ABC, luego por ser isogonales tenemos que, $\angle ZAF = \angle OAC = 30°$, de donde $\angle OCA = 30°$. Como BZ es perpendicular a AC, entonces $FGCB$ es cíclico, luego $\angle FCB = \angle ZGF = 30°$, de donde, $\angle AGF = 60°$.
Como $\angle YCB = \angle YBC = 30°$, entonces el triángulo BYC es isósceles con $BY = YC$ y como $OC = OB$ y YO es común, entonces los triángulos BYO y CYO son congruentes. Luego, $\angle BYO = \angle OYC = 60°$ pues $\angle BYC = 120°$. Análogamente, los triángulos OXA y OXB son congruentes, dado que $OA = OB$, $AX = XB$ y tienen a XO en común. Luego, $\angle DXO = \angle OXY = 60°$. De aquí que $\angle XOY = 60°$ y por lo tanto el triángulo XOY es equilátero.
Análogamente se demuestra, dependiendo de dónde esté O, que el triángulo OXZ o el triángulo OYZ es equilátero.

Problema 3. *Aplicar un desliz* a un entero $n \geq 2$ significa tomar cualquier primo p que divida a n y reemplazar n por $\frac{n+p^2}{p}$.
Se comienza con un entero cualquiera mayor o igual a 5 y se le aplica un desliz. Al número así obtenido se le aplica un desliz, y así sucesivamente se siguen aplicando deslices. Demuestra que sin importar los deslices aplicados, en algún momento se obtiene el número 5.

Solución de Francisco Acosta Henao (Colombia). La demostración la haremos por inducción fuerte en n. Al aplicar un desliz a $n = 5$ obtenemos $\frac{5+5^2}{5} = 6$. Luego,

$$6 \to \frac{6+3^2}{3} = 5 \text{ o } 6 \to \frac{6+2^2}{2} = 5.$$

Supongamos entonces que el problema es cierto para todos los números entre 5 y k (inclusive) con $k \geq 5$. Consideremos el número $k+1$. Si $k+1$ es primo, con el único desliz pasa a $\frac{k+1+(k+1)^2}{k+1} = k+2$ que no es primo.
Vamos a demostrar que si n no es primo y p es un divisor primo de n, entonces $\frac{n+p^2}{p} < n-1$. Hagamos $\frac{n}{p} = m$. Entonces, debemos probar que $m+p < mp-1$. Observemos que si $m = 1$, entonces $n = p$ lo cual no puede ser porque n no es primo. Entonces, $m > 1$. Si $m = 2$, entonces $2+p < 2p-1$ si y sólo si $p > 3$. Si $p = 3$, entonces $n = 6$ y ya vimos este caso. Si $p = 2$, entonces $n = 4$ lo cual no puede ser.
Si $m > 2$ y $p \geq 3$, entonces $p \geq 3 > 1 + \frac{2}{m-1}$ y de aquí $p > 1 + \frac{2}{m-1} = \frac{m+1}{m-1}$. Luego, $m+1 < p(m-1)$ que es equivalente a $m+p < mp-1$.
Tenemos entonces que al aplicar un desliz a $k+1$ (si este no es primo), se obtiene un número menor o igual que k por la desigualdad que acabamos de demostrar, y al aplicar dos deslices a $k+1$ (si éste es primo), también se obtiene un número menor o igual que k.
Demostraremos que $\frac{n+p^2}{p} \geq 5$ para todo $n \geq 6$ y p divisor primo de n. Haciendo $\frac{n}{p} = m$, la desigualdad a demostrar es equivalente a demostrar que $m+p \geq 5$ si $mp \geq 6$. Si $p = 2$ es claro el resultado, pues $m+2 \geq 5$ si $2m \geq 6$. Si $p = 3$, entonces

$m \geq 2$ y $m + p \geq 2 + 3 = 5$. Si $p \geq 5$, entonces $p + m \geq 5$ siempre se cumple para todo $m \geq 0$. Por lo tanto, $\frac{n+p^2}{p} \geq 5$ para todo $n \geq 6$ y p divisor primo de n.
De todo lo anterior tenemos entonces que si $n \geq 6$ y n es primo, al aplicarle dos deslices a n obtenemos un entero k tal que $5 < k < n$. Además, si $n \geq 6$ y n no es primo, al aplicar un desliz a n obtenemos un entero k tal que $5 < k < n$. Luego, por la hipótesis de inducción, al aplicar deslices a $k + 1$ obtendremos un número i tal que $5 \leq i \leq k$ y ya sabemos que todos los números del 5 al k funcionan. Por lo tanto, el problema se cumple para todos los números $n \geq 5$.

Problema 4. Encuentra todos los enteros positivos p, q y r, con p y q números primos, que satisfacen la igualdad:

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} - \frac{1}{(p+1)(q+1)} = \frac{1}{r}.$$

Solución de Adán Medrano Martín del Campo (México). Tenemos que,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} - \frac{1}{(p+1)(q+1)} = \frac{p+q+1}{(p+1)(q+1)},$$

de donde $r = \frac{(p+1)(q+1)}{p+q+1} = \frac{pq+p+q+1}{p+q+1}$. Luego, $p + q + 1 \mid pq + p + q + 1$ y de aquí $p + q + 1 \mid pq$. Como $p + q + 1$ y pq son enteros positivos, la última relación de divisibilidad implica que $p + q + 1 \leq pq$. Por otra parte, los únicos divisores positivos de pq son pq, p, q y 1 ya que p y q son números primos, y claramente $p + q + 1$ es mayor que p, q y 1. Por lo tanto, $p + q + 1 = pq$ que es lo mismo a $(p - 1)(q - 1) = 2$. Tenemos entonces dos posibilidades: $p - 1 = 1$ y $q - 1 = 2$, o $p - 1 = 2$ y $q - 1 = 1$. En el primer caso obtenemos que $p = 2$ y $q = 3$, y en segundo caso obtenemos $p = 3$ y $q = 2$. En ambos casos tenemos que $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} - \frac{1}{(p+1)(q+1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$ de modo que $r = 2$. Por lo tanto, las soluciones son $(p, q, r) = (2, 3, 2)$ y $(3, 2, 2)$.

Problema 5. Los números reales positivos x, y, z son tales que,

$$x + \frac{y}{z} = y + \frac{z}{x} = z + \frac{x}{y} = 2.$$

Determina todos los valores posibles de $x + y + z$.

Solución de Juan Carlos Ortiz Rothon (México). Sin pérdida de generalidad, supongamos que z es el menor de los tres, es decir, $z = \min\{x, y, z\}$, y que cualesquiera dos números de x, y y z son distintos.
Usando $x + \frac{y}{z} = 2$, tenemos por la desigualdad media aritmética - media geométrica,

$$2 = x + \frac{y}{z} \geq 2\sqrt{x\left(\frac{y}{z}\right)} = 2\sqrt{\frac{xy}{z}},$$

de donde $1 \geq \frac{xy}{z}$ o bien $z \geq xy$. Si $x \geq 1$ o $y \geq 1$, entonces $z \geq xy \geq y$ o $z \geq xy \geq x$, pero esto no puede ser porque $z < x$ y $z < y$. Por lo tanto, los tres

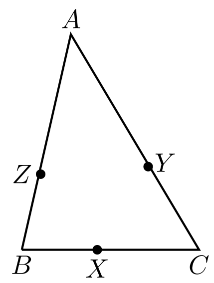
números x, y, z son menores que 1.
Usando ahora que $y + \frac{z}{x} = 2$ y $y < 1$, tenemos que $\frac{z}{x} = 2 - y > 2 - 1 = 1$, es decir, $z > x$ lo que es una contradicción.
Por lo tanto, dos de los números x, y, z son iguales. A partir de aquí dejamos de suponer que z es el menor de los tres. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x = y$.
Usando $z + \frac{x}{y} = 2$, tenemos que $z + 1 = 2$ y de aquí $z = 1$. Luego,

$$2 = y + \frac{z}{x} = x + \frac{1}{x},$$

de donde $2x = x^2 + 1$, o bien $(x - 1)^2 = 0$. De aquí que $x = 1$ y por lo tanto $y = 1$. Luego, $x = y = z = 1$ es la única solución y $x + y + z = 3$.

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo y sean D, E y F los pies de las alturas desde A, B y C, respectivamente. Sean Y y Z los pies de las perpendiculares desde B y C sobre FD y DE, respectivamente. Sea F_1 la reflexión de F con respecto a E y sea E_1 la reflexión de E con respecto a F. Si $3EF = FD + DE$, demuestra que $\angle BZF_1 = \angle CYE_1$.
Nota: La reflexión de un punto P respecto a un punto Q es el punto P_1 ubicado sobre la recta PQ tal que Q queda entre P y P_1, y $PQ = QP_1$.

Solución de Chiu Han (México). Empezaremos demostrando algunos lemas.
Lema 1. *Sea ABC un triángulo. Sean X, Y y Z los puntos de tangencia del incírculo del triángulo ABC con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Si $AB + AC = 3BC$, entonces $AY = AZ = BC$.*
Demostración. Consideremos la siguiente figura:

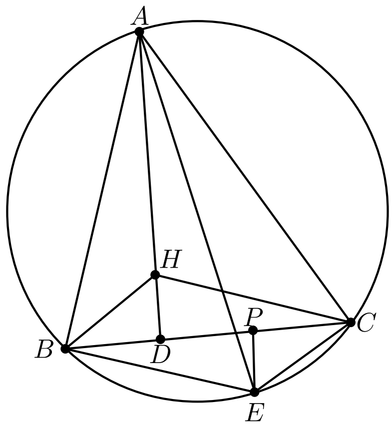


Sabemos que $AZ = AY$, $BZ = BX$ y $CY = CX$. Entonces,

$$\begin{aligned} 3(BX + CX) &= 3BC \\ &= AB + AC \\ &= AZ + ZB + AY + YC \\ &= AZ + BX + AY + CX, \end{aligned}$$

luego $2AZ = 2(BX + CX)$, de aquí que $AZ = AY = BX + CX = BC$.

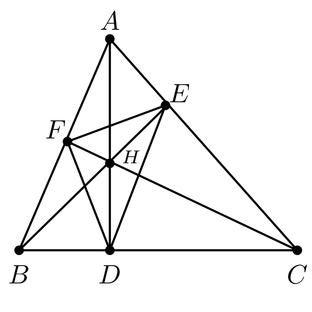
Lema 2. *Sea ABC un triángulo acutángulo. Sean D el pie de la perpendicular desde A a BC, E el punto diametralmente opuesto a A en el circuncírculo del triángulo ABC y P el pie de la perpendicular desde E a BC. Entonces, $BD = CP$.*
Demostración. Sea H el ortocentro del triángulo ABC.



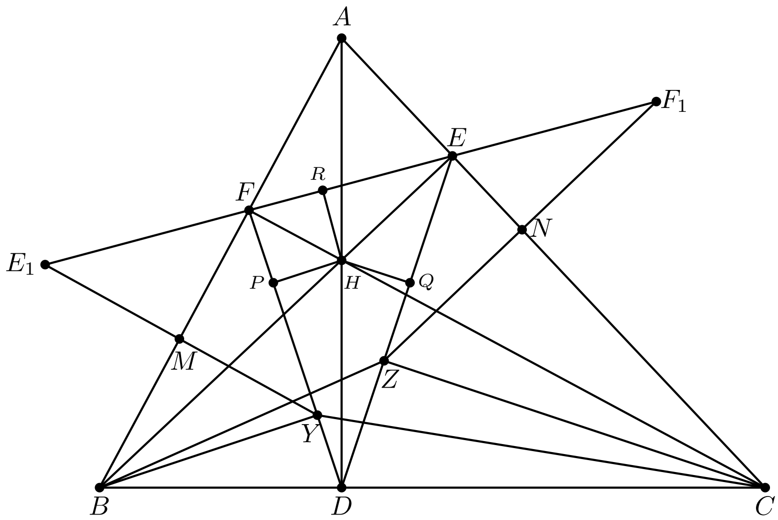
Sea $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ y $\angle BCA = \gamma$. Entonces, $\angle EAC = \angle BAD = 90° - \beta$ ya que el ortocentro y el circuncentro son isogonales. Como el cuadrilátero $BACE$ es cíclico, $\angle CBE = \angle EAC = 90° - \beta$. Además, $\angle HCB = 90° - \beta$ (que se obtiene fácilmente trazando el pie de altura desde C a AB), de donde HC es paralela4 a BE. Por otro lado,

$$\angle BCE = \angle BAE = \angle BAC - \angle EAC = \alpha - (90° - \beta) = 90° - \gamma,$$

donde hemos usado que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ y que $BACE$ es cíclico. Por otro lado, $\angle HBC = 90° - \gamma$ (se obtiene de la misma manera que obtuvimos $\angle HCB$), de donde HB es paralela a CE. Entonces, el cuadrilátero $HBEC$ es un paralelogramo, de donde el triángulo HBC es congruente al triángulo ECB, y de aquí es evidente que el triángulo HBD es congruente al triángulo ECP, entonces $BD = PC$ como queríamos.
Lema 3. *Sean ABC un triángulo acutángulo, H su ortocentro y D, E, y F los pies de las alturas desde A, B y C, respectivamente. Entonces H es el incentro del triángulo DEF.*
Demostración. Tenemos la siguiente figura:



Sean $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ y $\angle BCA = \gamma$. Es fácil ver que $\angle ABE = \angle ACF = 90^\circ - \alpha$, $\angle BAD = \angle BCF = 90^\circ - \beta$ y $\angle CBE = \angle CAD = 90^\circ - \gamma$. Como $\angle AEH = \angle AFH = 90^\circ$, $AFHE$ es cíclico, de donde $\angle FEH = \angle FAH = 90^\circ - \beta$ y $\angle EFH = \angle EAH = 90^\circ - \gamma$. Análogamente, $BDHF$ y $CDHE$ son cíclicos, de donde, $\angle FDH = \angle FBH = 90^\circ - \alpha$, $\angle DFH = \angle DBH = 90^\circ - \gamma$, $\angle HDE = \angle HCE = 90^\circ - \alpha$ y $\angle HED = \angle HCD = 90^\circ - \beta$. Entonces, $\angle DFH = \angle EFH = 90^\circ - \gamma$, $\angle DEH = \angle FEH = 90^\circ - \beta$ y $\angle DFH = \angle EDH = 90^\circ - \alpha$, de donde H es el incentro del triángulo DEF.
Ahora regresemos al problema original. Sean M y N las intersecciones de E_1Y con AB y F_1Z con AC, respectivamente, y sean P, Q, R los pies de las perpendiculares desde H a FD, DE y EF, respectivamente. Tenemos la siguiente figura:



Por el Lema 3, H es el incentro del triángulo DEF, por lo que P, Q y R son puntos de tangencia del incírculo del triángulo DEF a los lados de dicho triángulo. Ahora, como $DF + DE = 3EF$, por el Lema 1 tenemos que $DP = DQ = EF$. Por otro lado, sean $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$ y $\angle ACB = \gamma$. En la demostración del Lema 2 habíamos visto que $\angle HDF = \angle HDE = 90^\circ - \alpha$. Entonces,

$$\begin{aligned} \angle BDY &= \angle BDF = \angle BDH - \angle FDH = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha \\ &= \angle CDH - \angle EDH = \angle CDE = \angle CDZ, \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned} \angle DBY &= 180^\circ - \angle BDY - \angle BYD = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha \\ &= 180^\circ - \angle CDZ - \angle CZD = \angle DCZ. \end{aligned}$$

Además, $\angle EBA = \angle FCA = 90^\circ - \alpha$. Considerando el triángulo BDF, como $\angle DBY = \angle EBA = \angle HBF$ y como Y es el pie de la altura desde B, es un hecho conocido que BH pasa por el circuncentro del triángulo BDF (ya que la altura y la recta que une el vértice con el circuncentro son isogonales). Además, como

$\angle BDH = \angle BFH = 90°$, el cuadrilátero $BDHF$ es cíclico, de donde H es el punto diametralmente opuesto a B en el circuncírculo del triángulo BDF (también es posible ver que como $\angle BFH = 90°$, BH es diámetro).
Análogamente, H es el punto diametralmente opuesto a C en el circuncírculo del triángulo CDE. Además, como HP es perpendicular a DF y HQ es perpendicular a DE, por Lema 2 tenemos que, $FP = DY$ y $EQ = DZ$. Entonces,

$$\begin{aligned} FY &= FP + PY = DY + YP = DP = EF = FE_1 \\ EZ &= EQ + QZ = DZ + ZQ = DQ = EF_1 \end{aligned}$$

Luego, los triángulos FE_1Y y EF_1Z son isósceles.
En la demostración del Lema 2 habíamos visto que $\angle HFD = \angle HFE = 90° - \gamma$ y que $\angle HED = \angle HEF = 90° - \beta$, entonces,

$$\begin{aligned} \angle E_1FY &= 180° - \angle DFE \\ &= 180° - \angle DFH - \angle EFH \\ &= 180° - (90° - \gamma) - (90° - \gamma) = 2\gamma, \end{aligned}$$

de donde, $\angle FYE_1 = \frac{180° - \angle E_1FY}{2} = \frac{180° - 2\gamma}{2} = 90° - \gamma$.
Análogamente, $\angle F_1EZ = 2\beta$, de donde, $\angle EZF_1 = 90° - \beta$.
Por otro lado, como $\angle ZEB = \angle FEB = 90° - \beta$ y $EZ = DQ = EF$, tenemos que el triángulo EZB es congruente al triángulo EFB, de donde, $\angle EZB = \angle EFB = 180° - \angle AFE = 180° - (90° - \angle EFH) = 180° - (90° - (90° - \gamma)) = 180° - \gamma$.
Análogamente el triángulo FEC es congruente al triángulo FYC, de donde $\angle FYC = \angle FEC = 180° - \angle AEF = 180° - \beta$. Ahora, sumamos y nos queda:

$$\begin{aligned} \angle BZF_1 &= \angle BZE + \angle EZF_1 = 180° - \gamma + 90° - \beta = 270° - \beta - \gamma \\ \angle CYE_1 &= \angle CYF + \angle FYE_1 = 180° - \beta + 90° - \gamma = 270° - \beta - \gamma. \end{aligned}$$

Entonces, $\angle BZF_1 = \angle CYE_1$, como queríamos demostrar.

Las Olimpiadas de Matemáticas en México

Por Radmila Bulajich Manfrino

Historia de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Durante el año de 1987, un grupo de matemáticos, entre ellos José Seade, Mónica Clapp y Carlos Bosch, preocupado por la educación y la difusión de las matemáticas en México, se plantean la organización de un concurso nacional de matemáticas. La finalidad era doble, se pretendía promover las matemáticas entre los jóvenes del país pero también se buscaba un mecanismo para seleccionar a los alumnos que representarían a México en la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO, por sus siglas en inglés). México ya había participado en la IMO en 1981 y en 1987, pero no existía ningún mecanismo, que incluyera a todos los subsistemas de nivel medio superior, para conformar las delegaciones. La delegación que representó a México en la IMO de 1981 estuvo formada únicamente de cinco alumnos y fue seleccionada a través de dos concursos. Dos de los alumnos se eligieron a través de un concurso que se le llamó "Evento Nacional Intertecnológico XXV", en el cual concursaron los Institutos Tecnológicos que antes contaban con el bachillerato. El otro, fue un concurso realizado entre los Centros de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios (CBTis), y de este último se eligieron a tres concursantes. En 1987, la IMO se realizó en Cuba y fue el Ministro de Educación cubano quien, durante una visita que realizó a nuestro país ese mismo año, invitó a México a participar en la misma. Los candidatos que representaron a México en la IMO en Cuba, fueron seleccionados de la siguiente manera: dos alumnos del Instituto Politécnico Nacional, dos alumnos de la Universidad Nacional Autónoma de México, un alumno de una preparatoria de Tijuana y uno más de una preparatoria de Tula. Ese mismo año, la SEP le otorgó un voto de confianza a la Sociedad Matemática Mexicana (SMM), para que fuera ella quien organizara, difundiera y realizara la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

El primer concurso de la OMM se realizó en la ciudad de Xalapa, Veracruz, en el mes de noviembre durante el Congreso Nacional de la SMM. A este primer concurso, asistieron únicamente los ganadores de 12 concursos regionales que se realizaron previamente. A los ganadores de este concurso se les preparó para competir en la IMO que se realizó en Canberra, Australia en julio de 1988. Durante 1987 se empezó a invitar a algunas personas, de distintos estados, para que ellas organizaran concursos en sus estados y eligieran a los alumnos que asistirían al concurso del siguiente año. Los estados en los que sí se pudo encontrar un delegado fueron: Coahuila, Distrito Federal, Durango, Guanajuato, Jalisco, Michoacán, Nuevo León, Puebla, Veracruz y Zacatecas.

Durante 1988, el número de delegados estatales aumentó y se adhirieron a la organización otros 15 estados, es decir, se tenía un total de 25 estados con al menos un mínimo de organización olímpica. Los estados que se adhirieron fueron: Aguascalientes, Baja California, Colima, Guerrero, Hidalgo, Estado de México, Morelos, Nayarit, Oaxaca, Querétaro, Quintana Roo, San Luis Potosí, Sonora, Tabasco y Yucatán. Ya, en el año de 1989, se habían nombrado delegados en todos los estados, pero en muchos de ellos la organización era deficiente y no participaban en el concurso nacional. En la actualidad, las delegaciones de cada uno de los estados están formadas por 6 alumnos, con excepción de la delegación del Distrito Federal que está formada por 10 alumnos. En el año de 2001 fue la primera vez que se contó con la participación de todos los estados de la República y por primera vez todos los estados participaron con el equipo completo. A partir de 2004 esta ha sido la norma en general, con excepción del año 2009 en el que el estado de Tabasco no participó.

Los estados de la República que han sido sede de los concursos nacionales son:

Año	*No. de Olimpiada*	*Estado*
1987	1^o Concurso	Veracruz
1988	2^o Concurso	Sonora
1989	3^o Concurso	Puebla
1990	4^o Concurso	Guanajuato
1991	5^o Concurso	Morelos
1992	6^o Concurso	Tlaxcala
1993	7^o Concurso	Guerrero
1994	8^o Concurso	Jalisco
1995	9^o Concurso	Colima
1996	10^o Concurso	Yucatán
1997	11^o Concurso	Nuevo León
1998	12^o Concurso	Querétaro
1999	13^o Concurso	Oaxaca
2000	14^o Concurso	Michoacán
2001	15^o Concurso	Morelos
2002	16^o Concurso	Colima
2003	17^o Concurso	Guanajuato
2004	18^o Concurso	Estado de México

Año	*No. de Olimpiada*	*Estado*
2005	19^o Concurso	Campeche
2006	20^o Concurso	Zacatecas
2007	21^o Concurso	Coahuila
2008	22^o Concurso	Sonora
2009	23^o Concurso	Campeche
2010	24^o Concurso	Baja California
2011	25^o Concurso	San Luis Potosí

Aún cuando el número de participantes de cada estado en el concurso nacional es reducido, el trabajo que el delegado de cada estado realiza para seleccionar a sus representantes al Concurso Nacional es enorme. Hoy en día existen los concursos estatales y en algunas regiones ya se organizan también concursos regionales, previos al concurso nacional.
Posteriormente México se une a otras olimpiadas y actualmente los ganadores del concurso nacional reciben un entrenamiento y los mejores representan a México en:

- La Olimpiada Internacional de Matemáticas desde 1987,
- La Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas desde 1989,
- La Olimpiada de Matemáticas de la Cuenca del Pacífico desde 1991, sin embargo en algunos años no se ha participado,
- La Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe desde 1999.

En 2010, por primera vez, se participó (con un equipo de secundaria) en el Concurso Mundial de Matemáticas para alumnos de primaria y secundaria.
México ha sido sede de tres olimpiadas Iberoamericanas (la ciudad de México en 1993, Guadalajara en 1997 y Querétaro en 2009), dos Centroamericanas (Mérida en 2002 y Colima en 2011) y una Internacional (Mérida en 2005).

Organización Actual

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

La primera etapa “los Concursos Estatales” está a cargo del delegado de cada uno de los estados. A lo largo del año, los delegados organizan concursos estatales y entrenamientos con la finalidad de preparar a los alumnos que participarán en el Concurso Nacional de la OMM que, en general, se celebra en el mes de noviembre de cada año.

El examen, del concurso nacional, que se aplica a los alumnos participantes consta de dos pruebas escritas, cada una con una duración de cuatro horas y media, realizadas en dos días distintos. Cada prueba consiste de tres problemas de matemáticas. Cada concursante presenta por escrito su solución a dichos problemas. Los problemas del examen del Concurso Nacional versan sobre distintos temas de matemáticas básicas (previos a Geometría Analítica, sin incluir esta). La resolución correcta de los problemas del examen requiere, en general, de mucho ingenio y de gran habilidad en el manejo de esos conocimentos básicos de matemáticas. El Comité Organizador de la OMM elabora dicho examen con base en problemas que le envían las delegaciones estatales, así como miembros de la comunidad matemática del país.
Con base en los resultados obtenidos, en el examen del Concurso Nacional, se eligen al menos a los 16 primeros lugares y a 8 alumnos, que no necesariamente se encuentran dentro del grupo de los primeros 16 alumnos, que cumplen con el requisito adicional de tener 15 años hasta el 31 de diciembre del año en que estén presentando el examen del Concurso Nacional. La necesidad de contar con un grupo de alumnos más jóvenes es que cumplan con los requisitos para poder participar en la Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe.

En el mes de diciembre se inicia la última etapa, la cual finaliza un poco antes de ir a cada una de las competencias internacionales. Durante estos entrenamientos se aplican una serie de exámenes selectivos que tienen como finalidad elegir a los alumnos que representarán a México en cada uno de los certámenes antes mencionados.
Esta labor está a cargo del Comité de la OMM. El Comité está formado por un Presidente y, un gran número de profesores y jóvenes exolímpicos. Gracias al compromiso de todas las personas que nos apoyan, las cuales han trabajado todos estos años, sin más remuneración que el placer de ayudar y preparar a las nuevas generaciones, es que México ha logrado colocarse en la posición actual. Los Presidentes del Comité de la OMM han sido: Carlos Bosch Giral (1987-1995), José Antonio Gómez Ortega (1996-1999), María Luisa Pérez Seguí (2000-2003) y Radmila Bulajich Manfrino (2004-2011).

México en la Olimpiada Internacional de Matemáticas

Los concursos de matemáticas tienen una gran tradición en varios países del mundo. En 1934 en la Unión Soviética, B.N. Delone promueve la formación de un comité que organice competencias de matemáticas y por primera vez, estas competencias, reciben el nombre de olimpiadas. El comité estuvo integrado por prominentes matemáticos soviéticos y ese mismo año organizan la primera Olimpiada de Matemáticas en Leningrado (hoy San Petersburgo). Esta organización continuó durante varios años y en 1959, en Rumania, se organiza la primera Olimpiada Internacional de Matemáticas con la participación de ocho países del bloque socialista. Esta organización continúa con los países del bloque socialista y se convierte en un evento anual. El número de países participantes empezó a crecer año con año y en 2009 se celebró la 50^a edición de la IMO, en Bremen, Alemania, con la participación de ciento cuatro países. En 1964, Mongolia fue el primer país no europeo en adherirse a la organización y Finlandia, en 1965, fue el primer país no socialista en participar. En los años setenta aproximadamente la mitad de los países que participaban eran del bloque socialista y la otra mitad no socialista. Cuba, en 1971, fue el primer país del continente Americano en incorporarse a la IMO, seguido por Estados Unidos en 1974. No fue hasta 1977 que el primer país Africano, Argelia se une a la organización, seguido de Marruecos en 1983. A finales de los años setenta se presentaron algunas dificultades en la organización y la IMO de 1980, no se llevó a cabo. En 1981, Estados Unidos fue sede de la IMO y desde esta fecha no ha habido interrupciones.

Actualmente la participación de México en la Olimpiada Internacional se puede calificar de buena pero claramente han sido largos años de entrenamiento, no únicamente de los alumnos que participan en los certámenes, sino sobre todo de toda la gente involucrada en la organización. Años en los que se han tenido que aprender las técnicas para preparar a los alumnos, años en los que se ha elaborado una gran cantidad de material que antes era inexistente al menos en español.

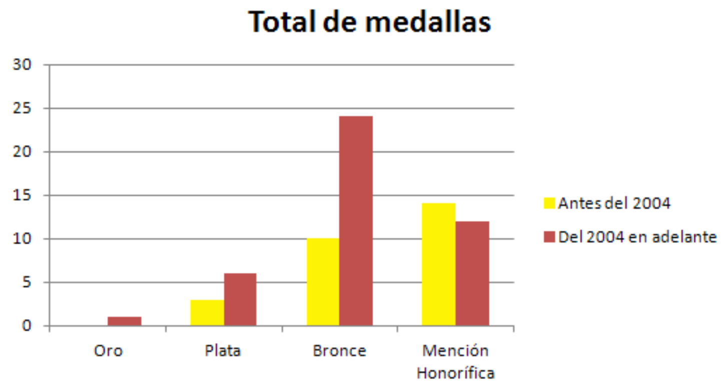
En 1988, en Australia, el alumno Antonio Peimbert Torres gana la primera medalla de bronce para México y pasaron varios años en los que el número de medallas (de bronce) que obtenían los alumnos mexicanos eran únicamente una o dos por año, a veces acompañadas de algunas menciones honoríficas. Nueve años más tarde, en 1997, durante la Olimpiada Internacional realizada en Argentina, Patricio Alva Pufleau gana la primera medalla de plata y después de otros nueve años, en 2006 en Eslovenia, Pablo Soberón Bravo obtiene la primera medalla de oro para México. El número de premiados cada año fue aumentando hasta que este año, por primera vez, toda la delegación mexicana obtuvo una medalla, logrando la posición 22, que es la mejor posición que ha obtenido nuestro país en la IMO.

A continuación mostramos el lugar que ha obtenido México en la Olimpiada Internacional:

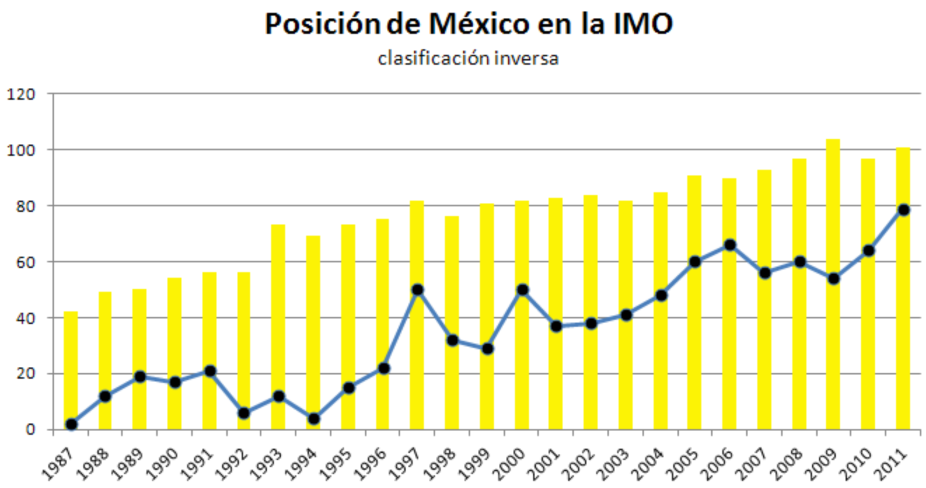
Año	*País sede*	*No. de países*	*Lugar de México*
1987	Cuba	42	40
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. de Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	37
1991	Suecia	56	35
1992	Rusia	56	50
1993	Turquía	73	61
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	73	58
1996	India	75	53
1997	Argentina	82	32
1998	Taiwan	76	44
1999	Rumania	81	52
2000	Corea	82	32
2001	Estados Unidos	83	46
2002	Escocia	84	46
2003	Japón	82	41

Año	*País sede*	*No. de países*	*Lugar de México*
2004	Grecia	85	37
2005	México	91	31
2006	Eslovenia	90	24
2007	Vietnam	93	37
2008	España	97	37
2009	Alemania	104	50
2010	Kazajistán	97	33
2011	Holanda	101	22

En esta gráfica mostramos el número de medallas de oro, plata y bronce obtenidas hasta el año 2003 inclusive y en los últimos 8 años.



En esta segunda gráfica podemos ver el número de países que han asistido a cada una de las IMO desde 1987, año en el que nuestro país inicia su participación, y cada uno de los puntos marca la posición de México.



México en la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

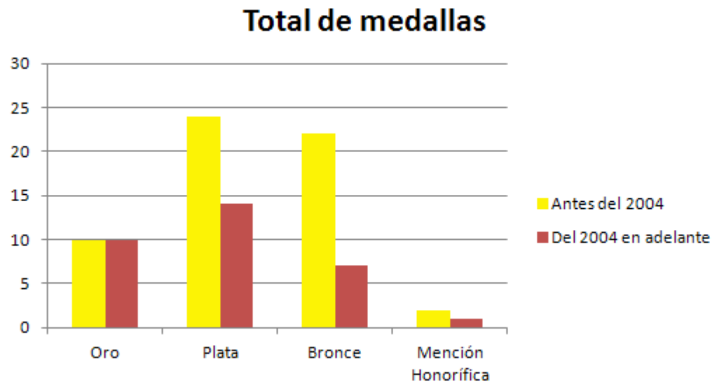
En 1985 la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura, convocó a la primera Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, la cual se celebró en Colombia con la participación de 10 países. México empieza a participar a partir de la $4°$ Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, celebrada en La Habana, Cuba, en 1989, y a partir de esa fecha lo ha hecho sin interrupción.

Los resultados de las delegaciones mexicanas en las Olimpiadas Iberoamericanas han sido:

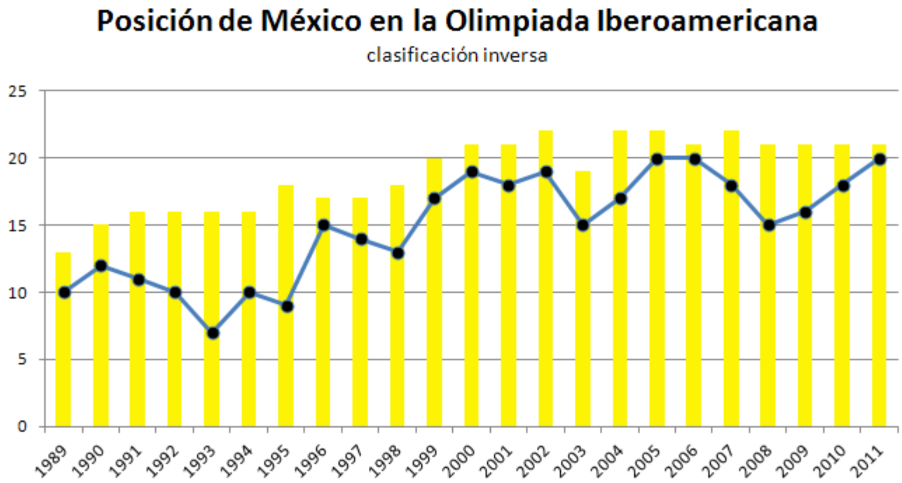
Año	*País sede*	*No. de países*	*Lugar de México*
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2
1997	México	17	3
1998	República Dominicana	18	5
1999	Cuba	20	3
2000	Venezuela	21	2
2001	Uruguay	21	3
2002	El Salvador	22	3
2003	Argentina	19	4
2004	España	22	5
2005	Colombia	22	2
2006	Ecuador	21	1
2007	Portugal	22	4
2008	Brasil	21	6
2009	México	21	5
2010	Paraguay	21	3
2011	Costa Rica	21	1

La primera medalla de oro para México la obtuvo, en 1991, Bernardo Manuel Ábrego Lerma del Distrito Federal.

En esta gráfica mostramos el número de medallas de premios obtenidos hasta el año 2003 inclusive y en los últimos 8 años.



En esta segunda gráfica podemos ver el número de países que ha asistido a cada una de las Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas desde 1989, año en el que nuestro país inicia su participación, y cada uno de los puntos marca la posición de México. Nuestro país en dos ocasiones ha sido primer lugar de este certamen, en el año 2006 y este año.



México en la Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe

Para promover la participación de los países de América Central y El Caribe en concursos de matemáticas, a partir de 1999 se organizó la primera Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, con sede en Costa Rica. También se buscaba que los países de la región tuvieran un concurso para alumnos más jóvenes, dado que en América del Sur ya se llevaba a cabo la Olimpiada del Cono Sur. Es muy importante que los alumnos empiecen a participar en este tipo de concursos años antes de asistir a una Olimpiada

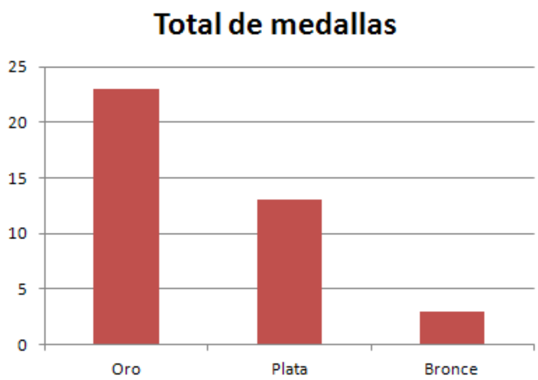
Internacional de Matemáticas ya que, sin duda, la experiencia que adquieren les ayuda a tener un mejor desempeño en los concursos subsecuentes.

A la primera olimpiada asistieron 10 delegaciones y desde entonces México ha participado. En 2000, Mauricio Esteban Chacón Tirado de Chiapas obtuvo la primera medalla de oro. En 2002, por primera vez, México obtiene el primer lugar y los tres alumnos de la delegación obtienen medalla de oro. Ellos fueron Guillermo Enrique Carro Prado de Nuevo León, Marco Antonio Figueroa Ibarra de Sonora y Carlos Vargas Obieta de Jalisco. A partir de ahí, México siempre ha sido líder de la competencia con excepción del año 2008.

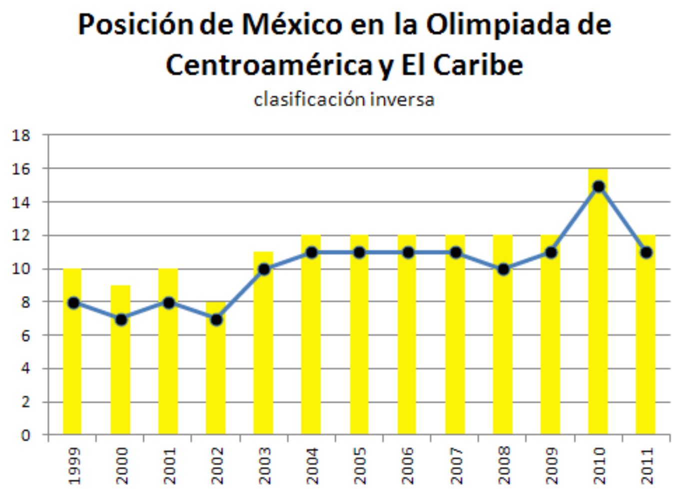
Los resultados de las delegaciones mexicanas en la Olimpiada de Centroamérica y El Caribe han sido:

Año	*País sede*	*No. de países*	*Lugar de México*
1999	Costa Rica	10	2
2000	El Salvador	9	2
2001	Colombia	10	2
2002	México	8	1
2003	Costa Rica	11	1
2004	Nicaragua	12	1
2005	El Salvador	12	1
2006	Panamá	12	1
2007	Venezuela	12	1
2008	Honduras	12	2
2009	Colombia	12	1
2010	Puerto Rico	16	1
2011	México	12	1

El número de medallas que ha obtenido México desde la primera edición de la Olimpiada de Centroamérica y El Caribe en 1999 se puede ver en la siguiente gráfica.



En esta gráfica podemos ver el número de países que han asistido a cada una de las Olimpiadas Matemáticas de Centroamérica y El Caribe desde 1999, año en el que inicia este concurso, y cada uno de los puntos marca la posición de México.

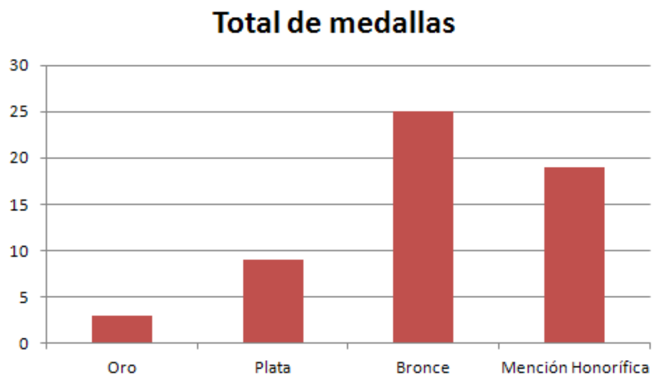


México en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

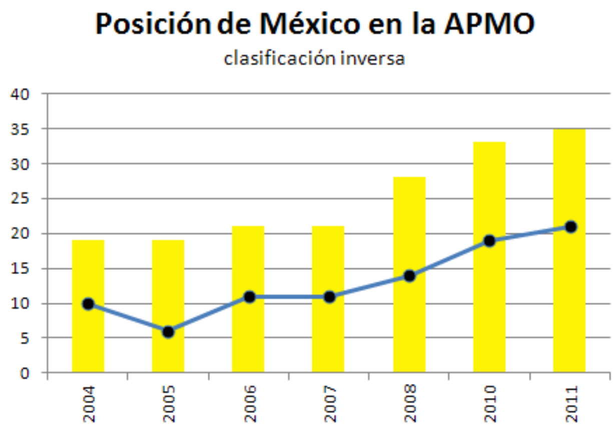
Desde 1991, algunos de los ganadores del Concurso Nacional participan anualmente en la Olimpiada de Matemáticas de la Cuenca del Pacífico. Este concurso se lleva a cabo por correo y se presenta durante el mes de marzo. No contamos con un registro estadístico sobre la participación de México antes del año 2004.

Año	*País sede*	*No. de países*	*Lugar de México*
2004	Canadá	19	9
2005	Corea	19	13
2006	Corea	21	10
2007	Corea	21	10
2008	Corea	28	14
2010	Japón	33	14
2011	Japón	35	14

El número de medallas que ha obtenido México desde 2004 en esta competencia se puede ver en la siguiente gráfica.



En esta gráfica podemos ver el número de países que han asistido a cada una de las ediciones de esta olimpiada desde 2004 y cada uno de los puntos marca la posición de México. En 2004, Marco Antonio Figueroa Ibarra de Sonora obtuvo la primera medalla de oro. En el año 2009 México no participó.



Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, de octubre a diciembre de 2011.

Del 13 al 19 de noviembre en San Luis Potosí, San Luis Potosí.

Concurso Nacional de la 25^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Del 8 al 18 de diciembre en Cuernavaca, Morelos.

Entrenamiento para los seleccionados nacionales.

Apéndice

Teorema 1 (Inducción) *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.
Ver [3].

Teorema 2 (Inducción fuerte) *El método de inducción fuerte se utiliza para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone que para algún entero $k \geq k_0$ la proposición $P(m)$ es verdadera para todo entero $k_0 \leq m \leq k$.*
3. *Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.
Ver [3].

Teorema 3 (Principio de las casillas) *Dados al menos $nk+1$ objetos acomodados en n lugares, siempre hay un lugar con al menos $k+1$ objetos.*
Ver [8].

Teorema 4 (Factorización en primos) *Todo entero n mayor que 1 puede expresarse como un producto de primos (con, tal vez, solamente un factor).*
Ver [4, 6].

Definición 5 (Congruencias) *Dados dos números enteros a, b, y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m, si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \pmod{m}$.*
Ver [7].

Teorema 6 (Desigualdad media aritmética - media geométrica) *Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales positivos, se tiene que*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

con la igualdad si y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.
Ver [2].

Teorema 7 (Desigualdad de las potencias) *Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales no negativos, y r, s son números reales distintos de cero con $r < s$, entonces,*

$$\left(\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\frac{a_1^s + a_2^s + \cdots + a_n^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}},$$

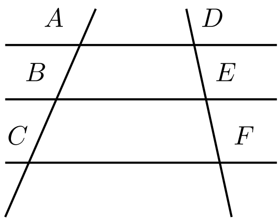
con la igualdad si y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.
Ver [2].

Teorema 8 (Desigualdad de Tchebyshev) *Si $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ son sucesiones de números reales, entonces,*

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right) \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n},$$

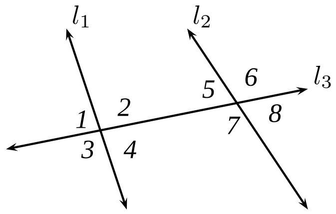
con la igualdad si y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ o $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.
Ver [2].

Teorema 9 (Teorema de Thales) *Consideremos dos rectas transversales a tres rectas como se muestra en la figura. Tenemos que si AD, BE y CF son paralelas entonces $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. Recíprocamente, si $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ y dos de las rectas AD, BE o CF son paralelas, entonces las tres rectas son paralelas.*



Ver [1].

Definición 10 (Ángulos entre paralelas) *Cuando una recta intersecta a otras dos rectas se forman ocho ángulos que numeramos del* 1 *al* 8*, como se muestra en la figura.*



Si la recta l_3 *intersecta a las rectas* l_1 *y* l_2*, decimos que es* **transversal** *a ellas. Los ángulos* 2*,* 4*,* 5 *y* 7 *están entre las rectas* l_1 *y* l_2*, los llamamos* **ángulos internos***, los ángulos restantes los llamamos* **ángulos externos***. Los ángulos en lados opuestos por la transversal* l_3 *se llaman* **ángulos alternos***, como por ejemplo* 3 *y* 5*. A los ángulos* 4 *y* 5 *les llamamos* **alternos internos** *y los ángulos* 3 *y* 6 *son* **alternos externos***.*
A los ángulos que están en la posición correspondiente respecto a la transversal, como por ejemplo 3 *y* 7 *los llamamos* **ángulos correspondientes***. Entonces, los pares de ángulos correspondientes en la figura anterior son* 3 *y* 7*,* 1 *y* 5*,* 4 *y* 8*,* 2 *y* 6*.*
Si l_1 *y* l_2 *son paralelas los ángulos alternos internos son iguales.*
Ver [1].

Teorema 11 (Suma de los ángulos internos de un triángulo) *La suma de los ángulos internos de un triángulo es* $180°$*.*
Ver [1].

Teorema 12 (Teorema de Pitágoras) *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*
Ver [1].

Definición 13 (Congruencia de triángulos) *Los triángulos* ABC *y* $A'B'C'$ *son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo* ABC *son iguales a los ángulos y los lados del triángulo* $A'B'C'$*.*
Ver [1].

Criterio 14 (Criterio de congruencia LAL) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que dos triángulos que tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos iguales, son congruentes. A este criterio de congruencia se le llama* **lado-ángulo-lado** *y lo denotamos como* **LAL***.*
Ver [1].

Criterio 15 (Criterio de congruencia LLL) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio de congruencia se le llama* **lado-lado-lado** *y lo denotamos como* **LLL***.*
Ver [1].

Definición 16 (Semejanza de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir,*

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$
$$\angle ACB = \angle A'C'B'$$
$$\angle BAC = \angle B'A'C'$$

y sus lados homólogos son proporcionales, esto es

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Ver [1].

Criterio 17 (Criterio de semejanza AA) *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*
Ver [1].

Teorema 18 *Si trazamos dos rectas tangentes a una circunferencia desde un mismo punto P, entonces los segmentos de recta desde P a los puntos de tangencia son iguales y el centro de la circunferencia yace en la bisectriz del ángulo entre las rectas.*
Ver [1].

Teorema 19 (Medida del ángulo inscrito) *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco.*
Ver [1].

Definición 20 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*
Ver [1].

Teorema 21 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, es decir, si y sólo si*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Ver [1].

Definición 22 (Círculo de Apolonio) *Dados un segmento AB y una constante $c > 0$, el lugar geométrico de los puntos P tales que $\frac{AP}{PB} = c$ es una circunferencia. Dicha circunferencia intersecta a la recta AB en dos puntos diametralmente opuestos.*
Ver [9].

Bibliografía

[1] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM. Tercera edición, 2007.

[3] F. Ruiz Benjumeda. *Demostrando por Inducción*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 3, 2009.

[4] I. Niven, H. Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[5] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2000.

[6] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de Números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2003.

[7] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[8] P. Soberón Bravo. *El Principio de las Casillas*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2010.

[9] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna*. Compañía editorial continental. México, 1972.

Directorio

Directorio del Comité Organizador de la OMM

Anne Alberro Semerena
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 3 81 03 80
Fax (777) 3 29 70 40
aalberro@uaem.mx

Ignacio Barradas Bribiesca
Universidad de Guanajuato
L. de Retana #5, Centro
36000, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 00 06 ext 2006
barradas@quijote.ugto.mx

Radmila Bulajich Manfrino
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
bulajich@uaem.mx

Gabriela Campero Arena
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, Distrito Federal
Tel. (55) 56 22 48 67
Fax (55) 56 22 48 66
gabriela@matematicas.unam.mx

Fernando Campos García
1a de Ángel Rico 85
AU.H. Vicente Guerrero
09200, Iztapalapa, Distrito Federal
Tel. (55) 34 63 75 43
fermexico89@hotmail.com

José Antonio Climent Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, Distrito Federal
Tel. (55) 56 24 59 22
Fax (55) 56 22 48 59
jach@fciencias.unam.mx

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, Distrito Federal
Tel. (55) 56 22 49 25
Fax (55) 56 22 48 59
cobian@matematicas.unam.mx

David Cossío Ruiz
ITESM, Campus Cd. Juárez
Av. Tomás Fernández 8945
32320, Cd. Juárez, Chihuahua
Tel. (656) 6 29 91 09
Fax (656) 6 29 91 01
sirio11@gmail.com

Luis Cruz Romo
Sistemas de Inteligencia
Territorial Estratégica, SITE
lcruzromo@gmail.com

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Departamento de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
Callejón Jalisco s/n
Mineral de Valencia
36240, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 01 40
fuerunt@gmail.com

José Antonio Gómez Ortega
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 48 64
Fax (55) 56 22 48 64
jago@hp.fciencias.unam.mx

Jesús Jerónimo Castro
CIMAT
Apartado Postal 402
36000, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 71 55
Fax (473) 7 32 57 49
jeronimo@cimat.mx

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Primera Cerrada de Alfalfares 41-2
Rinconada Coapa 1a Sección, Tlalpan
14330, México, D.F.
Tel. (55) 26 52 23 29
ssbmplayer@gmail.com

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Periférico norte tablaje 13615
97119, Mérida, Yucatán
Tel. (999) 942-3140 al 49
carlos.rubio@uady.mx

Elena Ruiz Velázquez
Altair 12, Col. Lomas de Palmira
62550, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 320 54 39
Cel. (777) 133 39 83
eleniux@gmail.com
A00375640@itesm.mx

Carmen Sosa Garza
Facultad de Ingeniería, UAQ
Cerro de las Campanas s/n
Querétaro, Querétaro
Tel. (442) 1 92 12 64 ext. 121 136
Fax (442) 1 92 12 646
carsg@uaq.mx

David Guadalupe Torres Flores
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Guanajuato
Callejón Jalisco s/n
Mineral de Valencia
36240, Guanajuato, Guanajuato.
Tel. (473) 73 23 587
dtorres@cimat.mx

Eduardo Velasco Barreras
Universidad de Sonora
Calle Yucas 16, Vista Bella
83170, Hermosillo, Sonora.
Tel. (662) 2 19 10 07
hamsteritokeweb@hotmail.com

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
rogelio@matcuer.unam.mx

Hugo Villanueva Méndez
Instituto de Matemáticas, UNAM
Cub. 4 de Becarios,
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria
Coyoacán 04510,
México, D.F.
Tel. (55) 56 22 45 32
Cel. 55 33 52 36 27
vill_hugo@hotmail.com
hvillan@matem.unam.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@fciencias.unam.mx`

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

`http://www.omm.unam.mx/`