TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2012, No. 4

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.omm.unam.mx

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Impreso y hecho en México.
Octubre de 2012.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Tzaloa es una publicación de interés para un público amplio. Está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, pero debido a que su columna vertebral es la resolución de problemas, también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2012, Número 4

Con esta nueva edición de tu revista Tzaloa cerramos el 2012 y como cada fin de año, la publicación se ve enriquecida con la sección *Una vida, un matemático*. En esta ocasión, bajo el título *La matemática es un oficio que todos podemos aprender*, el Dr. Adolfo Sánchez Valenzuela nos comparte un ensayo donde plantea sus reflexiones a propósito de la actividad profesional de los matemáticos. A través de sus páginas, el Dr. Sánchez Valenzuela no sólo establece atinadas analogías entre matemáticos, artistas y artesanos, sino que al hacerlo, además, nos cuenta sus vivencias personales, poniendo en evidencia que lo más importante para ser matemático es la pasión.

Por otro lado, para el *Artículo de Matemáticas* escogimos un tema clásico en los concursos olímpicos: la desigualdad media aritmética, media geométrica (MA-MG). Es

[1]Palabra náhuatl cuyo significado es *aprender*.

así, que Marco Figueroa nos muestra cómo *Una Desigualdad Básica*, MA-MG, es la clave para resolver numerosos problemas que, de manera recurrente, aparecen en concursos nacionales e internacionales.

Por primera vez y con el fin de brindar un mejor apoyo a todos nuestros lectores, se decidió incluir los exámenes con *Soluciones de las Etapas Semifinal y Final Estatal de la OMM*. Esta nueva sección de la revista se publicará todos los años, presentando en ella los exámenes correspondientes al año inmediato anterior.

En la sección de *Olimpiadas Internacionales*, presentamos los exámenes sin soluciones correspondientes a la *XIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe* y a la *53a Olimpiada Internacional de Matemáticas*. Tómalos como un reto y si logras resolver alguno, te invitamos para que, a través de nuestra dirección electrónica, compartas tu solución con nosotros.

Por último, al final de la revista encontrarás la *Información Olímpica* incluyendo el calendario con las actividades programadas para los próximos meses. No olvidamos incluir el directorio completo y actualizado del *Comité Organizador de la OMM*.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Hace más de 25 años que la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Desde sus inicios, este programa se ha visto fortalecido gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

26^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delegaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 26^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1993. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2012-2013 y, para el 1° de julio de 2013, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.omm.unam.mx`

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 26^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 11 al 17 de noviembre de 2012 en Guanajuato, Guanajuato. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2013: la XXV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, que se llevará a cabo en el mes de marzo; la XV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, que se celebrará en el mes de junio; la 54^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se llevará a cabo en Colombia en el mes de julio, y la XXVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en el mes de septiembre.

Una desigualdad básica

Por Marco Antonio Figueroa Ibarra

Nivel Intermedio

Una de las desigualdades más importantes en la solución de problemas tipo olimpiada es la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica (MA-MG). Si tenemos dos números positivos a y b, su media aritmética es $\frac{a+b}{2}$. La media aritmética es simplemente el promedio que estamos acostumbrados a utilizar. Por ejemplo, si sacamos de calificaciones 10 y 9, el promedio de las dos calificaciones (o su media aritmética) es $\frac{10+9}{2} = 9.5$. Siempre que los dos números sean iguales, también serán iguales a su media aritmética, pues $\frac{a+a}{2} = a$.

Por otro lado, la media geométrica es otro tipo de promedio, pero que tiene que ver con la multiplicación en vez de con la suma. Dados los números positivos a y b, su media geométrica es $\sqrt{a \cdot b}$. De nuevo, si los dos números son iguales, también su media geométrica es igual a cada uno de ellos, pues $\sqrt{a \cdot a} = a$.

Desigualdad MA-MG para dos números

Para cualesquiera dos números positivos a y b, la media geométrica siempre es menor o igual que la media aritmética. Es decir,

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Además, la igualdad se verifica si y sólo si $a = b$.

Demostración 1. Factorizando obtenemos,

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a + b - 2\sqrt{ab}) = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0,$$

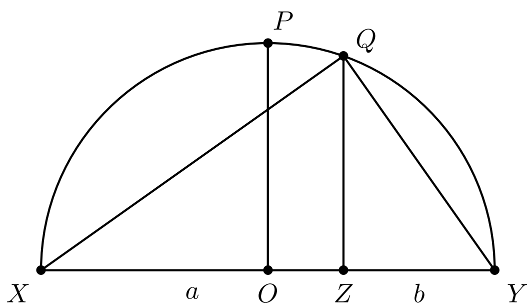
luego, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Ahora, para que la igualdad se dé, necesitamos que $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, y esto sólo sucede si $a = b$.

Demostración 2. Notamos que $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ y $b = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$. Luego,

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right)} &= \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \frac{a+b}{2}, \end{aligned}$$

nuevamente, para que la igualdad se dé, necesitamos que $\frac{a-b}{2} = 0$, es decir, $a = b$.

Demostración 3. Tomemos una semicircunferencia con diámetro $XY = a + b$ y un punto Z en el segmento XY tal que $XZ = a$ y $YZ = b$. Sea O el punto medio de XY y sean P y Q puntos sobre la semicircunferencia tales que OP y ZQ son perpendiculares a XY.



Como O es el centro, OP es un radio. Luego, $OP = \frac{a+b}{2}$. Por otro lado, es fácil ver que los triángulos XQZ y QYZ son semejantes (por el criterio AAA). Luego,

$$\frac{XZ}{QZ} = \frac{QZ}{YZ},$$

de donde $QZ = \sqrt{a\,b}$. Pero este segmento siempre será menor o igual que el radio OP, por lo que $\sqrt{a\,b} \leq \frac{a+b}{2}$. Para que la igualdad se dé, es necesario que los puntos O y Z coincidan, o sea, $a = b$.

De las dos primeras demostraciones podemos notar que la desigualdad entre la Media Aritmética y la Media Geométrica para dos números (para más números también) depende simplemente del hecho $x^2 \geq 0$. Esta última puede bien ser considerada como la base de las desigualdades. Este simple hecho puede demostrar desigualdades muy complicadas. Cuando así pasa, se dice que se usó el método SOS (*sum of squares*).

Ejemplo 1. De entre todos los rectángulos con perímetro fijo, ¿cuál tiene más área?

Solución. Veamos que el cuadrado es el que tiene más área. Digamos que el perímetro es la constante p y que las dimensiones del cuadrado son $a \times b$. Como el perímetro es p se tiene que $2a + 2b = p$ o $a + b = \frac{p}{2}$. Como el área del rectángulo es $a \cdot b$, tenemos que,

$$a \cdot b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{4}\right)^2.$$

Como $(\frac{p}{4})^2$ no depende de a y b, hemos terminado. Y justamente la igualdad se obtiene cuando $a = b$, es decir, cuando el rectángulo es un cuadrado.
Podemos pensar en el mismo problema sin la restricción de ser un rectángulo. De entre todas las figuras con perímetro fijo, ¿cuál es la que encierra más área? ¡El círculo! Lo malo es que es difícil demostrarlo.

Ejemplo 2. Demuestra que para reales positivos x, y, z se tiene que,

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz.$$

Solución. En este problema, aprovecharemos que el lado izquierdo de la desigualdad está factorizado y cada factor es una suma. Dividimos todo entre 8 y vemos que la desigualdad original es equivalente a:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{y+z}{2}\right)\left(\frac{z+x}{2}\right) \geq xyz.$$

Ahora, cada factor del lado izquierdo es la media aritmética de dos números. Aplicamos la desigualdad en cada factor (todos los números involucrados son positivos),

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{y+z}{2}\right)\left(\frac{z+x}{2}\right) \geq \sqrt{xy}\,\sqrt{yz}\,\sqrt{zx} = xyz.$$

Lo cual demuestra la desigualdad. Podemos notar que para que se dé la igualdad tiene que suceder que $x = y$, $y = z$ y $z = x$ al mismo tiempo, es decir, los tres números tienen que ser iguales.

Ejemplo 3. Encuentra el menor valor de la expresión $x^2 + \frac{1}{x}$, para $x > 0$. ¿Para qué valor de x se obtiene este valor?

Solución. Este puede pensarse como un ejercicio de cálculo diferencial, pero veremos cómo hacerlo con la desigualdad MA-MG. Si usamos directamente la desigualdad,

$$\frac{x^2 + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x}} = \sqrt{x}.$$

Hemos probado que $x^2 + \frac{1}{x}$ es mayor o igual que $2\sqrt{x}$, pero esta última expresión sigue dependiendo de x, por lo que no hemos encontrado el menor valor. Hay que pensar cómo escribir la expresión como la suma de varios números tales que su producto sea constante. No resulta muy difícil, simplemente hay que cambiar $\frac{1}{x}$ por $\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}$:

$$x^2 + \frac{1}{x} = 3\left(\frac{x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}}{3}\right) \geq 3\sqrt{x^2\left(\frac{1}{2x}\right)^2} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$

Como $3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ no depende de x, ya casi terminamos. Para que la igualdad se dé, necesitamos que $x^2 = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x}$, o sea, $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.
Otra manera de pensar la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica es: dados dos números positivos, cuyo producto es constante, su suma será mínima cuando los números son iguales.

Ejemplo 4. Sean a, b y c números reales positivos. Demuestra que,

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \leq abc.$$

Solución. En el lado izquierdo tenemos un producto de tres números. Si sólo uno de ellos es negativo, el producto de los tres será también negativo y la desigualdad resultará cierta, pues el lado derecho es positivo.
Si al menos dos de los factores son negativos, sin perdida de generalidad los dos primeros, tenemos que,

$$\begin{aligned} a+b-c &< 0, \\ a-b+c &< 0. \end{aligned}$$

Sumando estas dos desigualdades se tiene que $2a < 0$, lo cual es una contradicción y por tanto no puede haber más de un factor negativo. Resta ver el caso cuando los tres son positivos.
Apliquemos la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica para los dos primeros factores,

$$\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)} \leq \frac{(a+b-c)+(a-b+c)}{2} = a,$$

De la misma manera, obtenemos,

$$\begin{aligned} \sqrt{(a-b+c)(-a+b+c)} &\leq b, \\ \sqrt{(-a+b+c)(a+b-c)} &\leq c. \end{aligned}$$

Y como cada lado de cada una de las tres desigualdades es positivo, podemos multiplicar las tres y obtenemos que $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \leq abc$, que era lo que se quería demostrar.

Desigualdad MA-MG para más de dos números

Para cualesquiera números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la media geométrica siempre es menor o igual que la media aritmética. Es decir,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_2 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Además, la igualdad se verifica si y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Hay muchas maneras de demostrar la desigualdad MA-MG. Veamos una demostración de uno de los matemáticos más influyentes del siglo XIX, Agustin-Louis Cauchy. Esta prueba es por inducción sobre n, pero no de la manera usual. La idea es la siguiente:

1. Probar que la desigualdad es cierta para $n = 2$.
2. Probar que si la desigualdad es cierta para $n = k$, también es cierta para $n = 2k$. Esto, con el punto anterior, demuestra que la desigualdad es cierta para toda n igual a una potencia de 2.
3. Probar que si la desigualdad es cierta para $n = k + 1$, también lo es para $n = k$.

Con esto quedaría demostrada la desigualdad MA-MG para toda n, pues ya tendríamos que es cierta para una potencia $2^x \geq n$ y por el punto 3, sería cierta para los números $2^x - 1, 2^x - 2, \ldots, n$. Veamos la demostración.

1. Este punto ya fue demostrado.
2. Supongamos que la desigualdad es cierta para $n = k$, veamos que es cierta para $n = 2k$.

   Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ reales positivos. Queremos demostrar la desigualdad MA-MG para ellos. Como estamos suponiendo que la desigualdad es cierta para $n = k$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} &\geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k}, \\
B = \frac{a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}}{k} &\geq \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_{2k}}.
\end{aligned}
$$

   Por otro lado, por el punto 1 tenemos que la desigualdad MA-MG es cierta para $n = 2$. Como A y B son positivos, tenemos que $\frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB}$. Luego,

$$
\begin{aligned}
\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2k}}{2k} &= \frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB} \\
&\geq \sqrt{\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k}\,\sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_{2k}}} \\
&= \sqrt[2k]{a_1 a_2 \cdots a_{2k}}.
\end{aligned}
$$

   Lo cual demuestra la desigualdad MA-MG para $n = 2k$. Ahora, para que la igualdad se dé, es necesario que se den simultáneamente $a_1 = a_2 = \cdots = a_k$, $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_{2k}$ y $A = B$. Si $a_1 = a_2 = \cdots = a_k$, se tiene que $A = a_1 = a_2 = \cdots = a_k$ y si $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_{2k}$ se tiene que $B = a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_{2k}$. Luego, es necesario que todos los números sean iguales.

3. Suponiendo que la desigualdad Ma-MG es cierta para $n = k + 1$, hay que demostrar que es cierta para $n = k$. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_k$ números reales positivos. Demostremos la desigualdad MA-MG para estos valores.

Sea m la media aritmética de $a_1, a_2, \ldots, a_k$ y sea $a_{k+1} = m$. Como todas los a_i son positivos, a_{k+1} también es positivo. Luego, podemos aplicar la desigualdad MA-MG para estos $k+1$ valores,

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}}{k+1} \geq \sqrt[k+1]{a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1}}.$$

El lado izquierdo de la desigualdad es,

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}}{k+1} = \frac{km + m}{k+1} = m.$$

Luego,

$$\begin{array}{rcl} m & \geq & \sqrt[k+1]{a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1}} \\ m^{k+1} & \geq & a_1 a_2 \cdots a_k m \\ m^k & \geq & a_1 a_2 \cdots a_k \\ m & \geq & \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k}. \end{array}$$

Lo cual es justo la desigualdad para $n = k$. Además, para que se dé la igualdad, es necesario que $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1}$ y esto es cierto cuando $a_1 = a_2 = \cdots = a_k$.

Por lo tanto, queda demostrada la desigualdad MA-MG para n valores.

Ejemplo 5. Demuestra que para números reales positivos a, b, c y d se tiene que

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \geq 16.$$

¿Cuándo se da la igualdad?

Solución. En este caso, dividimos entre 16 y vemos que la desigualdad es equivalente a,

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}}{4}\right) \geq 1.$$

Notamos que cada factor del lado izquierdo es una media aritmética de números positivos, así que usamos dos veces la desigualdad MA-MG.

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}}{4}\right) \geq \sqrt{abcd}\sqrt{\frac{1}{abcd}} = 1.$$

Para que la igualdad se dé, necesitamos que $a = b = c = d$ y que $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$, es decir, los cuatro números tienen que ser iguales.
Esta desigualdad se puede generalizar para n números como sigue: Si se tienen reales positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, se tiene que

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Y la demostración es igual a la anterior. Usualmente esta desigualdad está en la forma:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

y es llamada la desigualdad entre la media aritmética y la media armónica. De hecho, se puede probar algo más fuerte:

Ejemplo 6. Demuestra que para números reales positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se tiene que,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Solución. Reacomodando obtenemos que la desigualdad es equivalente a,

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}},$$

lo cual es justamente la desigualdad MA-MG para los números positivos $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$, por lo que la igualdad se da cuando todos los números son iguales. Podemos incluir esta desigualdad a la desigualdad MA-MG y obtener la:

Desigualdad entre la media aritmética, la media geométrica y la media armónica. Dados números reales positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se tiene que

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Con una doble igualdad cuando los números son iguales.

Ejemplo 7. Desigualdad de Nesbitt. Dados tres números reales positivos a, b y c se tiene que,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Solución. Sumando 1 a cada sumando del lado izquierdo, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} &= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{a+c} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3 \\
&= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 \\
&= \frac{1}{2}((b+c) + (a+c) + (a+b))\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 \\
&\geq \frac{1}{2}(9) - 3 = \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad entre la media armónica y la media aritmética.

El siguiente problema es un ejemplo donde se pide demostrar una desigualdad, pero no se puede alcanzar la igualdad. Dicho problema apareció en la Olimpiada Internacional de Matemáticas de 2012.

Ejemplo 8. Sea $n \geq 3$ un entero y sean a_2, a_3,..., a_n números reales positivos tales que $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Demuestra que

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n.$$

Solución. Para cada $i = 2$, 3,..., n, usamos la desigualdad MA-MG con $i-1$ números iguales a $\frac{1}{i-1}$ y el i-ésimo igual a a_i,

$$\frac{1+a_i}{i} = \frac{\frac{1}{i-1} + \frac{1}{i-1} + \cdots + \frac{1}{i-1} + a_i}{i} \geq \sqrt[i]{\frac{a_i}{(i-1)^{i-1}}},$$

de donde,

$$(1+a_i)^i \geq a_i \, \frac{i^i}{(i-1)^{i-1}},$$

y para que la igualdad en ésta se alcance, es necesario que $a_i = \frac{1}{i-1}$.

Multiplicando todas estas desigualdades, para $i = 2, 3, \ldots, n$, se tiene que,

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n \geq (a_2 a_3 \cdots a_n) n^n = n^n.$$

Ahora, hemos obtenido la desigualdad que se pide, pero hay que demostrar que no se puede alcanzar la igualdad, pues en el problema la desigualdad es estricta (es decir, hay que probar que es mayor, no mayor o igual). Ya vimos que para que se cumpla la i-ésima igualdad tiene que pasar que $a_i = \frac{1}{i-1}$. En particular, es necesario que $a_2 = 1$ y $a_3 < 1$ para toda $i \geq 3$. Como $n \geq 3$, si se dieran todas las igualdades, se tendría que $a_2 a_3 \cdots a_n < 1$, lo cual es una contradicción. Luego, la igualdad no puede darse y la desigualdad es estricta.

Por último, veremos que la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica vale también cuando algunos de los números son 0. Es decir, que la desigualdad vale cuando los números son no-negativos.
Esto es cierto, ya que si se tiene que $a_i = 0$ para cierto i (usando la notación de la desigualdad), se tiene que la media geométrica es igual a 0. Como la media aritmética sería no-negativa, se tiene la desigualdad,

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = 0.$$

Para que la igualdad se dé, la media aritmética tendría que ser igual a 0 y esto sólo se logra cuando todos son 0, así que también podemos decir que la igualdad se da cuando todos los números son iguales.

Usaremos este hecho en el siguiente problema, que apareció en el Concurso Nacional de la 25^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Ejemplo 9. Sea $n \geq 3$ un entero positivo. Encuentra todas las soluciones de números reales $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ que satisfacen el siguiente sistema de n ecuaciones,

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_1 - 1 &= a_2, \\ a_2^2 + a_2 - 1 &= a_3, \\ &\vdots \\ a_{n-1}^2 + a_{n-1} - 1 &= a_n, \\ a_n^2 + a_n - 1 &= a_1. \end{aligned}$$

Solución. Es claro que si $a_j = 1$ para alguna j, entonces $a_i = 1$ para toda i; y si $a_j = -1$ para alguna j, entonces $a_i = -1$ para toda i. Además, $(1, 1, \ldots, 1)$ y $(-1, -1, \ldots, -1)$ son soluciones.

Sumando las n ecuaciones obtenemos que,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i - n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

de donde $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = n$.

Por otro lado, podemos reescribir las ecuaciones de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_1 &= a_2 + 1, \\ a_2^2 + a_2 &= a_3 + 1, \\ &\vdots \\ a_{n-1}^2 + a_{n-1} &= a_n + 1, \\ a_n^2 + a_n &= a_1 + 1. \end{aligned}$$

Multiplicando todas las ecuaciones, obtenemos

$$a_1(a_1 + 1)a_2(a_2 + 1) \cdots a_n(a_n + 1) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_n + 1),$$

de donde $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ si $a_i \neq -1$ para todo $1 \leq i \leq n$.

De las dos ecuaciones $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = n$ y $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, obtenemos, usando la desigualdad MA-MG con los números no negativos $a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2$, que

$$1 = \frac{n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \sqrt[n]{a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2} = 1,$$

de donde se sigue que $a_1^2 = a_2^2 = \cdots = a_n^2 = 1$.

Por lo tanto, concluimos que sólo hay dos soluciones: $(1, 1, \ldots, 1)$ y $(-1, -1, \ldots, -1)$.

Ejercicios

1. Demuestra que para x, y reales, $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$.

2. ¿Cuál es el máximo valor de la expresión $x(1 - x^3)$ para $0 \leq x \leq 1$?

3. Sean a, b y c reales positivos. Demuestra que,

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} \leq a + b + c.$$

4. Si a, b, c son reales positivos demuestra que $a(1-b) > \frac{1}{4}$, $b(1-c) > \frac{1}{4}$ y $c(1-a) > \frac{1}{4}$ no se pueden dar simultáneamente.

5. Si a, b, c son reales positivos tales que $(a+1)(b+1)(c+1) = 8$, demuestra que $abc \leq 1$.

6. Las diagonales del cuadrilátero convexo $ABCD$ se intersectan en O de tal manera que las áreas de los triángulos AOB y COD son 4 y 9, respectivamente. ¿Cuál es el mínimo valor del área del cuadrilátero?

7. Sean a, b, c reales positivos tales que $a + b + c = 1$, demuestra que,

$$\left(\frac{1}{a} + 1\right)\left(\frac{1}{b} + 1\right)\left(\frac{1}{c} + 1\right) \geq 64.$$

8. Si a, b y c son números reales positivos tales que $abc = 1$, demuestra que,

   (a) $\dfrac{1+ab}{1+a} + \dfrac{1+bc}{1+b} + \dfrac{1+ca}{1+c} \geq 3.$

   (b) $\dfrac{a^3}{a^3+2} + \dfrac{b^3}{b^3+2} + \dfrac{c^3}{c^3+2} \geq 1.$

   (c) $\left(a - 1 + \dfrac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \dfrac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \dfrac{1}{a}\right) \leq 1.$

Bibliografía

1. R. Bulajich Manfrino, J.A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Inequalities. A Mathematical Olympiad Approach.* Birkhäuser, 2009.

2. A. Engel. *Problem Solving Strategies.* Springer-Verlag, 1998.

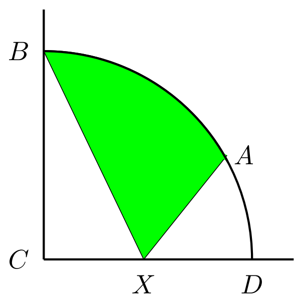
Problemas de Práctica

En esta sección encontrarás 20 problemas de diversos niveles cuya selección fue hecha pensando en todos nuestros lectores. Estamos seguros que con ellos, estudiantes de todos los niveles, encontrarán retos a su alcance y con los cuales podrán poner a prueba todas sus habilidades. Esperamos que resulten útiles y sobre todo interesantes para un público amplio.

En la siguiente sección encontrarás las soluciones de todos ellos, pero NO te rindas antes de tiempo. Consultar una solución precipitadamente (camino fácil) no permite desarrollar al máximo todo tu potencial, ten en cuenta que resolver problemas es una habilidad que sólo se perfecciona con práctica, dedicación y sobre todo pasión.

Por último, te invitamos a contribuir y mejorar nuestra revista. Si tienes problemas interesantes que proponer y te interesa compartirlos y publicarlos, ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus aportaciones de material para esta u otra sección.

Problema 1. En la figura se tiene que BCD es la cuarta parte de un círculo de radio 1, $\angle BCA = 60°$ y X es un punto en CD. Si el área de la región sombreada es la mitad del área del cuarto de círculo BCD, ¿cuánto mide CX?



Problema 2. Sean a, b y c números reales positivos tales que $abc = 1$. Demuestra que a lo más dos de los números $2a - \frac{1}{b}$, $2b - \frac{1}{c}$, $2c - \frac{1}{a}$ son mayores que 1.

Problema 3. ¿De cuántas formas se pueden acomodar los enteros del 1 al 16 en un renglón, de tal manera que la suma de cualesquiera dos números adyacentes sea un cuadrado perfecto?

Problema 4. Sea n un entero positivo. Demuestra que cada número entre 1 y $n!$ se puede escribir como suma de a lo más n distintos divisores de $n!$.

Problema 5. Sea ABC un triángulo y sea A' el punto medio de BC. La recta paralela a AB que pasa por A' intersecta a las alturas desde A y B en los puntos D y E, respectivamente. La recta paralela a AC que pasa por A' intersecta a las alturas desde A y C en los puntos F y G, respectivamente. Demuestra que las rectas DC, BF y GE son paralelas entre sí.

Problema 6. Determina el valor máximo de la expresión,

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{2012}{b + \cfrac{1}{c}}}$$

si a, b y c son dígitos distintos de cero y distintos entre sí.

Problema 7. Sean $\mathcal{C}$ una circunferencia y O un punto sobre $\mathcal{C}$. Otra circunferencia $\mathcal{C}'$ con centro en O corta a $\mathcal{C}$ en los puntos B y C. Sea A un punto sobre la circunferencia $\mathcal{C}$ distinto de B y C, y sean C' y B' los puntos de intersección de $\mathcal{C}'$ con AB y AC, respectivamente.
(a) Demuestra que los triángulos ABC y $AB'C'$ son semejantes.
(b) Demuestra que los triángulos ABC y $AB'C'$ son congruentes.

Problema 8. Si la suma de 20 enteros positivos, no necesariamente distintos, es 462, ¿cuál es el mayor valor posible de su máximo común divisor?

Problema 9. Si las sumas de cualesquiera dos de los trinomios x^2+ax+b, x^2+cx+d y x^2+ex+f no tienen soluciones reales, ¿es posible que la suma de los tres trinomios tenga soluciones reales?

Problema 10. Encuentra el menor entero positivo divisible entre 3 y 7, que usa sólo los dígitos 3 y 7 (ambos dígitos), y cuya suma de dígitos también es divisible entre 3 y 7.

Problema 11. En un triángulo ABC se sabe que $\angle A = 2\angle B = 4\angle C$. Sean D, E y F los puntos de intersección de las bisectrices internas de los ángulos en A, B y C con BC, AC y AB, respectivamente. Demuestra que $DE = DF$.

Problema 12. Queremos ubicar los enteros del 1 al 9 en las casillas de un tablero de 3×3 (uno en cada casilla), de manera que la suma en cada columna y cada fila del tablero sea impar. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?

Problema 13. Sean a, b y c números reales tales que $0 \leq a \leq b \leq c$. Demuestra que $(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geq 60abc$.

Problema 14. Demuestra que para diferentes elecciones de signos $+$ y $-$ la expresión,

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm (4n+1),$$

da todos los impares positivos menores o iguales que $(2n+1)(4n+1)$.

Problema 15. Una cuadrícula de $(n-1) \times (n-1)$ se divide en $(n-1)^2$ cuadrados unitarios de la manera usual. Cada uno de los n^2 vértices se colorea de rojo o verde. ¿De cuántas maneras se puede colorear la cuadrícula de tal manera que cada uno de los cuadrados unitarios tenga exactamente dos vértices rojos?

Problema 16. Sea $p \neq 3$ un número primo. Demuestra que el número,

$$\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p} - 123456789$$

es divisible entre p.

Problema 17. Cada una de 23 personas pesa un entero positivo de kilogramos. Quieren jugar futbol y para ello eligen primero quién será el árbitro para luego dividir a las 22 restantes en dos equipos de 11 personas tales que la suma de los pesos de las personas en cada equipo es la misma. Resulta que sin importar quién es el árbitro, siempre se puede hacer esto. Demuestra que todos pesan lo mismo.

Problema 18. Demuestra que:

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{2012}}}} < 2.$$

Problema 19. Sea D un punto sobre el lado BC de un triángulo ABC tal que $AD > BC$. Sea E un punto sobre el lado AC tal que $\frac{AE}{EC} = \frac{BD}{AD-BC}$. Demuestra que $AD > BE$.

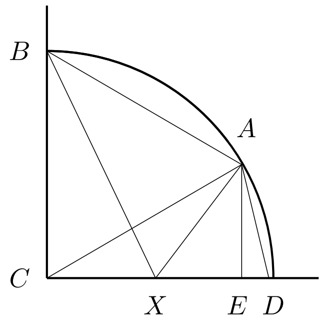
Problema 20. Sean a, b y c números reales tales que $a+b+c=0$. Demuestra que,

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7} = \left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right).$$

Soluciones a los Problemas de Práctica

A continuación se presentan las soluciones que el equipo editorial de Tzaloa preparó para los 20 problemas de práctica que figuran en este número de tu revista. Date cuenta que en cada problema siempre se incluye la explicación que justifica la validez de la solución y observa que la argumentación siempre se basa en resultados conocidos y/o en razonamientos lógicos. Las soluciones que aquí se presentan no son necesariamente las únicas o las mejores, si tú tienes otra solución y la quieres compartir con nosotros, te invitamos para que la envíes a nuestro buzón electrónico `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto la analizaremos para darte nuestra opinión.

Solución del problema 1. Como el área de la región sombreada es la mitad del cuarto de círculo BCD, el área de la región no sombreada también es la mitad del cuarto de círculo, es decir $\frac{\pi}{8}$. Calcularemos el área de la región no sombreada de otra manera.
El área del triángulo BCX que denotaremos como (BCX), es $(BCX) = \frac{1}{2}x$, donde x es la longitud de CX. Dibujemos la altura desde A sobre CD y llamemos E a la intersección.



Como $\angle ACD = 30°$ y $AE = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$, el área del triángulo AXD es $(AXD) = \frac{1}{4}(1-x)$. El área que falta calcular es la diferencia de áreas del sector circular ACD y el triángulo ACD. El área del sector circular ACD es $\frac{\pi}{12}$, y el área del triángulo ACD es $\frac{CD\cdot AE}{2} = \frac{1}{4}$. Luego, tenemos que,

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{4}(1-x) + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8},$$

de donde $x = \dfrac{\pi}{6}$.

Solución del problema 2. Supongamos lo contrario, es decir, que $2a - \frac{1}{b} > 1$, $2b - \frac{1}{c} > 1$ y $2c - \frac{1}{a} > 1$. Multiplicando estas tres desigualdades obtenemos que,

$$\left(2a - \frac{1}{b}\right)\left(2b - \frac{1}{c}\right)\left(2c - \frac{1}{a}\right) > 1,$$

de donde $7 - 4(a+b+c) + 2(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) > 1$ o

$$2(a+b+c) - (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) < 3.$$

Por otro lado, si sumamos las tres desigualdades iniciales obtenemos que,

$$2(a+b+c) - (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) > 3,$$

lo cual es una contradicción y se sigue el resultado.

Solución del problema 3. Escribamos en orden las posibles parejas que sumadas nos dan como resultado un cuadrado perfecto, de manera que el segundo sumando sea mayor que el primero:

$1+3$	$2+14$	$4+12$	$9+16$
$1+8$	$3+6$	$5+11$	$10+15$
$1+15$	$3+13$	$6+10$	$11+14$
$2+7$	$4+5$	$7+9$	$12+13.$

Observemos que los números que sólo participan en una suma son el 16 y el 8, por lo que estos números tienen que ser los extremos de la lista. Así sólo bastará seguir la cadena tachando las opciones utilizadas y las que no se puedan utilizar (es decir, si utilizamos una suma en las que aparece el 6, por ejemplo, tachamos todas las demás en las que aparece el número 6). De esta manera, comenzando con el 16 tendremos el acomodo: $16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3$. Hasta aquí no hay problema, pero a partir del 3 tenemos dos posibilidades para seguir, con la suma $3+1$ o con $3+6$. Analicemos las dos posibilidades:
a) Veamos primero qué pasa si ponemos el $3+1$, tendremos

$$16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 1, 15, 10, 6$$

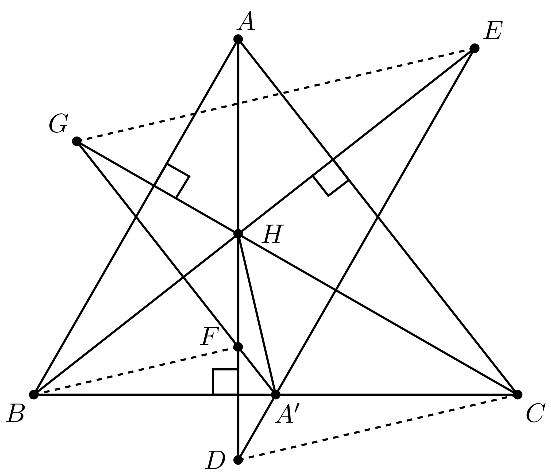
y nos falta acomodar el 8 pero ya no se puede, es decir, este caso no se puede completar.
b) Si colocamos el $3 + 6$, tendremos $16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8$.
Por lo tanto, tenemos dos posibilidades: $16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8$ y la misma leída de derecha a izquierda.

Solución del problema 4. Lo demostraremos por inducción en n (ver en el apéndice el teorema 4). Es claro que para $n = 1$ es cierto. Supongamos que es cierto para $n - 1$ y probémoslo para n.
Sea $1 < k < n!$ un entero. Sean q y r el cociente y residuo al dividir k entre n, respectivamente. Tenemos que $k = nq + r$ con $0 \leq r < n$ y $0 \leq q < \frac{n!}{n} = (n - 1)!$.
Si $q = 0$, k es menor que n, por lo tanto es un divisor de $n!$ y acabamos.
Por la hipótesis de inducción tenemos que existen enteros $1 \leq d_1 < d_2 < \cdots < d_s$ con $s \leq n - 1$, tales que $d_i \mid (n - 1)!$ para $i = 1, 2, \ldots, s$ y $q = d_1 + d_2 + \cdots + d_s$. Luego,

$$k = nd_1 + nd_2 + \cdots + nd_s + r.$$

Como cada d_i es divisor de $(n - 1)!$, cada nd_i es divisor de $n!$. Si $r = 0$ acabamos, pues $k = nd_1 + nd_2 + \cdots + nd_s$, $s \leq n - 1 < n$ y cada uno de los divisores es diferente. Si $r \neq 0$, tenemos que r también es divisor de $n!$ (pues es menor que n) y como $r < n \leq nd_1 < nd_2 < \cdots < nd_s$ son todos diferentes y $s + 1 \leq n$, así que son a lo más n. Esto concluye la inducción.

Solución del problema 5. Sea H el ortocentro del triángulo ABC.



Como $FA' \,||\, AC$ tenemos que $FA' \perp BH$. Además, como $BA' \perp FH$ se tiene que A' es el ortocentro del triángulo BFH, de donde,

$$HA' \perp BF. \tag{1}$$

Por otro lado, como $A'D \,||\, AB$ tenemos que $A'D \perp HC$. Además, como $A'C \perp HD$

se tiene que D es el ortocentro de CHA', de donde,

$$HA' \perp DC. \tag{2}$$

Como $AB \,||\, A'E$ y $GH \perp AB$ se tiene que $GH \perp A'E$. Análogamente se tiene que $HE \perp GA'$. Luego, H es el ortocentro del triángulo EGA' y se tiene que,

$$HA' \perp GE. \tag{3}$$

Finalmente, por (1), (2) y (3) se sigue que las rectas BF, DC y GE son paralelas entre sí.

Solución del problema 6. Ya que a, b y c son enteros positivos menores o iguales que 9, tenemos que,

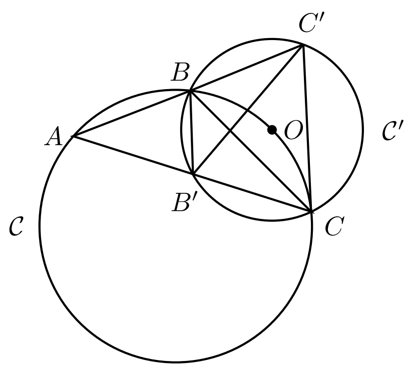
$$\frac{1}{a+\frac{2012}{b+\frac{1}{c}}} \leq \frac{1}{a+\frac{2012}{9+\frac{1}{c}}}$$

para cualesquiera valores de a, b y c. El valor máximo de la expresión se obtendrá con los valores más pequeños de a y c. Como a y c son distintos, tenemos dos posibilidades: $a = 1$ y $c = 2$, o $a = 2$ y $c = 1$.
Si $a = 1$ y $c = 2$, obtenemos que $\frac{1}{1+\frac{2012}{9+\frac{1}{2}}} = \frac{19}{4043}$.
Si $a = 2$ y $c = 1$, obtenemos que $\frac{1}{2+\frac{2012}{9+\frac{1}{1}}} = \frac{5}{1016}$.
Como $\frac{5}{1016} > \frac{19}{4043}$, pues $5(4043) = 20,215 > 19,304 = 19(1016)$, concluimos que el valor máximo de la expresión es $\frac{5}{1016}$.

Solución del problema 7. (a) Tenemos que $\angle BAC = \angle B'AC'$. Además, como el cuadrilátero $B'CC'B$ es cíclico (ver en apéndice la definición 14), tenemos que,

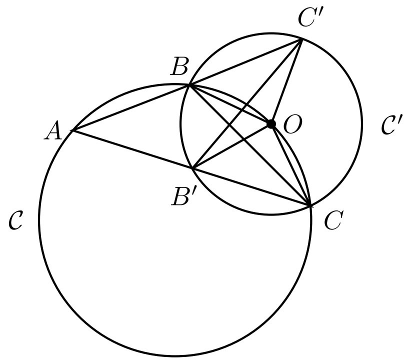
$$\angle ACB = \angle B'CB = \angle B'C'B = \angle B'C'A.$$

Luego, por el criterio de semejanza AAA (ver en el apéndice el criterio 11), se sigue que los triángulos ABC y $AB'C'$ son semejantes.



(b) Como $ABOC$ es un cuadrilátero cíclico, tenemos que $\angle ACO = 180° - \angle ABO = \angle C'BO$ (ver en el apéndice el teorema 15). Luego, los triángulos isósceles $B'CO$

y $C'BO$ son congruentes por el criterio de congruencia LAL (ver en el apéndice el criterio 9). Por lo tanto, los triángulos isósceles BCO y $C'B'O$ son congruentes (ver en el apéndice la definición 7), por lo que $BC = C'B'$, lo que garantiza junto con (a) que ABC y $AB'C'$ son congruentes.



Solución del problema 8. Supongamos que tenemos 20 enteros no necesariamente distintos cuya suma es 462. Como el máximo común divisor de los 20 números divide a cada uno de ellos, tenemos que dicho máximo común divisor dividirá a la suma de los 20 enteros, es decir, dividirá a 462. Luego, el máximo común divisor buscado d debe ser un divisor positivo de 462. Como cada uno de los 20 números debe ser múltiplo de d, cada uno de ellos es mayor o igual que d y por lo tanto, su suma igual a 462 es mayor o igual que $20d$, es decir, $462 \geq 20d$ de donde $d \leq \frac{462}{20} < 24$. Como $462 = 2(3)(7)(11)$, tenemos que el mayor divisor de 462 que es menor que 24 es 22. Para concluir que 22 es el mayor valor posible para d, una posibilidad es tomar 19 enteros iguales a 22 y el entero $44 = 2(22)$. Entonces, la suma de los 20 enteros es $19(22) + 44 = 462$ y su máximo común divisor es 22.

Solución del problema 9. Veamos que no es posible. Sean $f_1(x) = x^2 + ax + b$, $f_2(x) = x^2 + cx + d$ y $f_3(x) = x^2 + ex + f$. Si las sumas $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) + f_3(x)$ y $f_2(x) + f_3(x)$ no tienen soluciones reales, entonces estas sumas son parábolas que no intersectan el eje de las x's. Además, como el coeficiente de x^2 de cada una de estas sumas es positivo (igual a 2), tenemos que las tres sumas son parábolas cóncavas hacia arriba. Por lo tanto, $f_1(x) + f_2(x) > 0$, $f_1(x) + f_3(x) > 0$ y $f_2(x) + f_3(x) > 0$ para todos los valores de x. Luego,

$$\begin{aligned}(f_1(x) + f_2(x)) + (f_1(x) + f_3(x)) + (f_2(x) + f_3(x)) &> 0,\\ 2(f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)) &> 0,\end{aligned}$$

de donde $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) > 0$ para todos los valores de x. Esto significa que la gráfica de la suma de los tres trinomios $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_3(x)$ no intersecta el eje de las x's y por lo tanto no tiene soluciones reales.

Solución del problema 10. Como la suma de los dígitos del entero debe ser divisible entre 7 y entre 3, el dígito 3 debe aparecer al menos siete veces y el dígito 7 al menos tres veces. Como queremos el menor entero, buscaremos un número de 10 dígitos, de los cuales siete son 3 y tres son 7, que sea divisible entre 7 y entre 3. Como la suma de esos dígitos es $3 \cdot 7 + 7 \cdot 3 = 42$ que es divisible entre 7 y entre 3, el número es divisible entre 3. Sólo resta encontrar alguna manera de acomodar los dígitos, para que el número sea divisible entre 7.

Vamos a analizar el número 3333333333, a través de los residuos de $3 \cdot 10^9, 3 \cdot 10^8, 3 \cdot 10^7, \ldots, 3 \cdot 10^0$ al dividirlos entre 7, para luego acomodar los tres dígitos 7 de tal forma que su suma sea divisible entre 7.

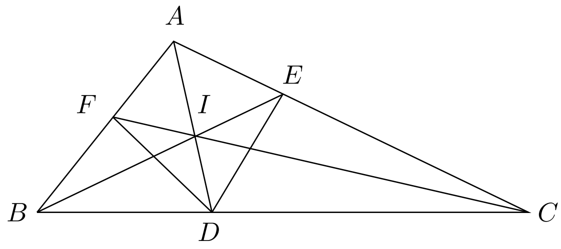
Número	Residuo	Número	Residuo
$3 \cdot 10^0$	3	$3 \cdot 10^5$	1
$3 \cdot 10^1$	2	$3 \cdot 10^6$	3
$3 \cdot 10^2$	6	$3 \cdot 10^7$	2
$3 \cdot 10^3$	4	$3 \cdot 10^8$	6
$3 \cdot 10^4$	5	$3 \cdot 10^9$	4

Ahora, como $3,333,333,333 = 3 \cdot 10^9 + 3 \cdot 10^8 + 3 \cdot 10^7 + \cdots + 3 \cdot 10 + 3$ podemos tomar sólo los residuos al dividir entre 7 y obtenemos que la suma de los residuos es 36, que al volver a dividirlo entre 7 deja residuo 1, así que los tres números 7 los debemos poner en lugares cuya suma de residuos sea 1, 8, 15, etc. para que al quitarlos quede un múltiplo de 7 ($36-1 = 35, 36-8 = 28, 36-15 = 21, 36-22 = 14, \ldots$), por ejemplo, si quitamos 3×10^0, 3×10^1 y 3×10^6, la suma de sus residuos es 8 y colocando los dígitos 7 en esos lugares obtenemos un múltiplo de 7. Veamos la siguiente tabla:

Exponentes	Residuos	Suma de Residuos
$0, 1, 6$	$3, 2, 3$	8
$0, 2, 8$	$3, 6, 6$	15
$0, 3, 5$	$3, 4, 1$	8
$1, 3, 7$	$2, 4, 2$	8
$1, 4, 5$	$2, 5, 1$	8
$2, 3, 4$	$6, 4, 5$	15

La tercera columna de los exponentes, indica la máxima potencia, así comparando todos los exponentes vemos que el más pequeño es 4, eso quiere decir que, 3333377733 es el menor de los números que es divisible entre 7.

Solución del problema 11. Sea I el incentro del triángulo ABC. Sea $\theta = \angle BCI = \angle ACI$, entonces $\angle ABI = \angle CBI = 2\theta$ y $\angle CAI = \angle BAI = 4\theta$. Por lo tanto, $\angle AIE = \angle BID = \angle BDI = 6\theta$, $\angle AIF = \angle AFI = 5\theta$ y $\angle AEI = 4\theta$.



Sean $x = AI$ e $y = DI$. Entonces $AF = IE = x$ y $BD = BI = AD = x + y$. Aplicando el teorema de la bisectriz en el triángulo BAD (ver en el apéndice el teorema 12), tenemos que $\frac{AB}{AI} = \frac{DB}{DI}$; por lo tanto $BF = \left(\frac{DB}{DI} - \frac{AF}{AI}\right) AI = \frac{x^2}{y}$. Por otro lado, si aplicamos el teorema de la bisectriz en el triángulo ABE, tenemos que $\frac{EA}{EI} = \frac{BA}{BI}$; por lo tanto $AE = \left(\frac{AF+FB}{BI}\right) EI = \frac{x^2}{y} = BF$. De lo anterior y de que $BD = AD$, se sigue que los triángulos EAD y FBD son congruentes por el criterio LAL (ver en el apéndice el criterio 9), y por lo tanto $DE = DF$.

Solución del problema 12. Entre los enteros del 1 al 9 hay cinco números impares. Luego, necesariamente en alguna de las tres columnas hay por lo menos dos impares. Como la suma de los números de esa columna es impar, el tercer número en esa columna debe ser también impar. Por la misma razón, una de las filas debe tener tres números impares. Entonces, hay una fila y una columna con sólo impares, en las demás filas y columnas hay dos pares y un impar. Sólo de esta forma la suma de los números en cada fila y columna es impar. Un ejemplo es el siguiente.

2	7	6
1	3	5
4	9	8

La fila con sólo impares la podemos escoger de 3 formas y la columna también de 3 formas. Los cinco impares están en las casillas de esa fila y esa columna y los podemos ubicar de $5! = 120$ formas. Los pares, que están en las casillas restantes, los podemos ubicar de $4! = 24$ formas. Por lo tanto, hay $9(120)(24) = 25,920$ formas de colocar los números.

Solución del problema 13. Aplicando la desigualdad media artimética-media geométrica (ver el artículo de este número), obtenemos que,

$$\frac{a+3b}{4} \geq a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{3}{4}}, \quad \frac{b+4c}{5} \geq b^{\frac{1}{5}} c^{\frac{4}{5}}, \quad \frac{c+2a}{3} \geq c^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}}.$$

Estas tres desigualdades implican que,

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geq 60a^{\frac{11}{12}} b^{\frac{19}{20}} c^{\frac{17}{15}}.$$

Ahora, como $0 \leq a \leq b \leq c$, tenemos que,

$$c^{\frac{17}{15}} = c^{\frac{1}{12}} c^{\frac{1}{20}} c \geq a^{\frac{1}{12}} b^{\frac{1}{20}} c,$$

y por lo tanto,

$$60a^{\frac{11}{12}} b^{\frac{19}{20}} c^{\frac{17}{15}} \geq 60abc.$$

Solución del problema 14. Procedemos por inducción en n. Para $n = 1$ es cierto, ya que,

$$\begin{aligned}
-1-2+3-4+5 &= 1, \\
+1-2+3-4+5 &= 3, \\
-1+2+3-4+5 &= 5, \\
+1+2+3-4+5 &= 7, \\
+1+2-3+4+5 &= 9, \\
+1-2+3+4+5 &= 11, \\
-1+2+3+4+5 &= 13, \\
+1+2+3+4+5 &= 15.
\end{aligned}$$

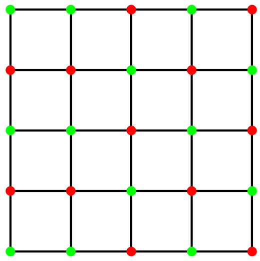
Supongamos que para n es cierto, es decir, supongamos que para ciertas elecciones de signos, la expresión $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm (4n+1)$ toma todos los valores impares entre 1 y $(2n+1)(4n+1)$. Como $-(4n+2)+(4n+3)+(4n+4)-(4n+5)=0$, luego, la expresión $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm (4n+5)$ puede tomar todos los valores impares entre 1 y $(2n+1)(4n+1) = 8n^2+6n+1$.

Faltan los impares entre $8n^2+6n+3$ y $(2n+3)(4n+5) = 8n^2+22n+15$. Estos se obtienen de la siguiente manera,

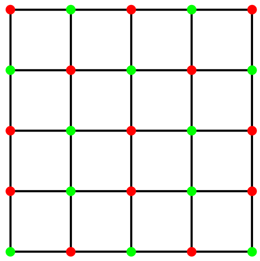
$$\begin{aligned}
(2n+3)(4n+5) &= +1+2+\cdots+(4n+5), \\
(2n+3)(4n+5)-2 &= -1+2+\cdots+(4n+5), \\
(2n+3)(4n+5)-4 &= +1-2+\cdots+(4n+5), \\
&\vdots \\
(2n+3)(4n+5)-(8n+10) &= +1+2+\cdots+(4n+3)-(4n+5), \\
(2n+3)(4n+5)-(8n+12) &= -1+2+\cdots+(4n+3)-(4n+5), \\
(2n+3)(4n+5)-(8n+14) &= +1-2+\cdots+(4n+3)-(4n+5), \\
&\vdots \\
(2n+3)(4n+5)-(16n+12) &= +1+2+\cdots+(4n-1)-(4n+1) \\
&\quad +(4n+3)-(4n+5).
\end{aligned}$$

Como este último es justamente $8n^2+6n+3$, la inducción está completa.

Solución del problema 15. Elegimos de cualquier manera los n vértices del segmento de abajo. Si hay al menos una pareja de estos vértices consecutivos del mismo color, es fácil ver que el resto de la puntícula queda determinada de una única manera.



De estos hay $2^n - 2$ (pues sólo dos coloraciones del segmento de abajo no cumplen esto: las que alternan rojo y verde).
Restan dos maneras de colorearlo si se alternan rojo y verde. En este caso, todos los demás segmentos horizontales tienen que estar alternados. Para cada segmento tenemos 2 opciones, por lo que en cada caso tenemos 2^{n-1} opciones.



Luego, hay $(2^n - 2) + 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} - 2$ coloraciones posibles.

Solución del problema 16. Denotemos por n al número dado y sea $c = 123456789$. Tenemos que,

$$n = \sum_{k=0}^{p-1} 10^{8p+k} + 2\sum_{k=0}^{p-1} 10^{7p+k} + \cdots + 9\sum_{k=0}^{p-1} 10^{k} - c.$$

Considerando la igualdad anterior, tenemos que,

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{9}(10^p - 1)(10^{8p} + 2 \times 10^{7p} + \cdots + 8 \times 10^p + 9 \times 1) - c \\ &= \frac{1}{9}\left(10^{9p} + 10^{8p} + \cdots + 10^p - 9\right) - c. \end{aligned}$$

Como $p \mid n$ si y sólo si $9p \mid 9n$, bastará demostrar que,

$$9p \mid 10^{9p} + 10^{8p} + \cdots + 10^p - 9 - 9c.$$

Como $9+9c = 1,111,111,110 = 10^9 + 10^8 + \cdots + 10$, lo que debemos demostrar es,

$$9p \mid (10^{9p} + 10^{8p} + \cdots + 10^p) - (10^9 + 10^8 + \cdots + 10).$$

Por el pequeño teorema de Fermat (ver en el apéndice el teorema 3), tenemos que $10^{mp} \equiv (10^m)^p \equiv 10^m \pmod{p}$ para cada $m = 1, 2, \ldots, 9$. Por otra parte, como $10 \equiv 1 \pmod{9}$, tenemos que $10^{mp} \equiv 1 \equiv 10^m \pmod{9}$ para cada $m = 1, 2, 3, \ldots, 9$. Como $p \neq 3$, entonces el máximo común divisor de p y 9 es 1, luego $10^{mp} \equiv 10^m \pmod{9p}$. Por lo tanto,

$$9p \mid (10^{9p} + 10^{8p} + \cdots + 10^p) - (10^9 + 10^8 + \cdots + 10)$$

como queríamos.

Solución del problema 17. Supongamos lo contrario, es decir, que esto se puede y no todos los pesos son iguales. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{23}$ los pesos, s su suma y consideramos la configuración donde s es mínima. Como no todos los pesos son iguales a 1 se tiene que $s > 23$.
Si tomamos a la persona i, el peso de los 22 restantes es $s - a_i$ y tiene que ser par, para que se puedan hacer los equipos del mismo peso. Luego, $a_i \equiv s \pmod{2}$ para toda $i = 1, 2, \ldots, 23$. Es decir, todos los pesos son de la misma paridad. Veamos dos casos.

- Los pesos son pares. Notamos que si tomamos los pesos enteros,

  $$\left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_{23}}{2}\right)$$

  también se cumple el problema y su suma es la mitad que la anterior, lo cual es una contradicción.

- Los pesos son impares. Ahora tomamos la configuración de pesos enteros,

  $$\left(\frac{a_1+1}{2}, \frac{a_2+1}{2}, \ldots, \frac{a_{23}+1}{2}\right).$$

  Con esta también se cumple el problema y su suma es,

  $$\frac{a_1+1}{2} + \frac{a_2+1}{2} + \cdots + \frac{a_{23}+1}{2} = \frac{s+23}{2} < \frac{s+s}{2} = s,$$

  lo cual es una contradicción.

Luego, tienen que tener todos el mismo peso.

Solución del problema 18. Sea $S = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{2012}}}}$.

Observemos que:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{1+\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{\frac{3}{2^2}+\sqrt{\frac{4}{2^{2^2}}+\cdots+\sqrt{\frac{2012}{2^{2^{2010}}}}}}}}\\ &< \sqrt{1+\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}\\ &< \sqrt{1+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\\ &< \sqrt{1+\sqrt{2}\cdot 2}\\ &< 2. \end{aligned}$$

La primera y segunda desigualdades se siguen cada una del hecho de que $0 < a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.
La tercera desigualdad se sigue de $\sqrt{2} < 2 \Rightarrow 2+\sqrt{2} < 4 \Rightarrow \sqrt{2+\sqrt{2}} < 2$ y por inducción tenemos que $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{k} < 2$. Esta desigualdad también se puede justificar como sigue:

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{k} < \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{4}}}}_{k} = 2.$$

La última desigualdad es clara, pues,

$$\sqrt{1+\sqrt{2}\cdot 2} < 2 \Leftrightarrow 1+\sqrt{2}\cdot 2 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cdot 2 < 3 \Leftrightarrow (\sqrt{2}\cdot 2)^2 < 3^2 \Leftrightarrow 8 < 9.$$

Solución alternativa. Sean $R = \underbrace{\sqrt{2012+\sqrt{2012+\cdots+\sqrt{2012}}}}_{2009}$, S como en la primera solución y $T = \sqrt{4+\sqrt{5+\cdots+\sqrt{2012}}}$. Es claro que $T < R$.
Tenemos que:

$$R^2 - 2012 = \underbrace{\sqrt{2012+\sqrt{2012+\cdots+\sqrt{2012}}}}_{2008} < R$$

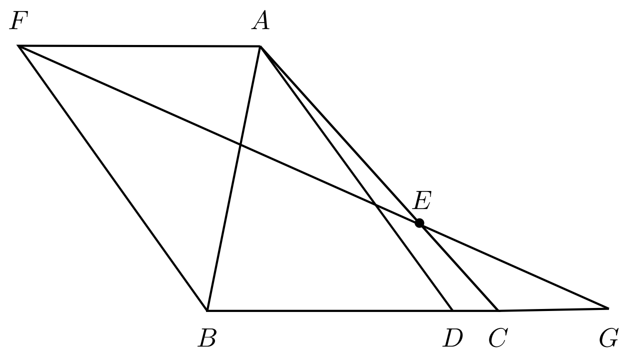
de donde:

$$R(R-1) < 2012 < (46)(45) \Leftrightarrow R < 46$$

y por lo tanto $T < 46$. Luego,

$$S = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+T}}} < \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+46}}} = 2.$$

Solución del problema 19. Sea F el punto tal que $AF \| BD$ y $BF \| AD$. Ya que $AFBD$ es un paralelogramo, tenemos que $FB = AD$ y $FA = BD$. Sea G el punto de intersección de EF con BC.



Ya que $FA \| CG$, tenemos que,

$$\frac{FA}{CG} = \frac{AE}{EC} = \frac{BD}{AD - BC}.$$

Como $FA = BD$, obtenemos,

$$\frac{BD}{CG} = \frac{BD}{AD - BC}.$$

Luego, $CG = AD - BC$ de donde $AD = BC + CG = BG$. Como $BF = AD$, tenemos que $BF = BG$. De aquí,

$$\angle BEF > \angle BGF = \angle BFG = \angle BFE.$$

Por lo tanto, $BF > BE$, es decir, $AD > BE$.

Solución del problema 20. Sean a, b y c números reales tales que $a + b + c = 0$. Consideremos el polinomio $(x-a)(x-b)(x-c)$. Desarrollando el producto, obtenemos que,

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc.$$

Como $a + b + c = 0$, este polinomio no tiene término cuadrático, de modo que es de la forma $x^3 + qx + r$ donde $ab + bc + ac = q$ y $abc = r$. Haciendo $S_k = a^k + b^k + c^k$, tenemos que $S_1 = 0$ y,

$$S_2 = (a^2 + b^2 + c^2) = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = -2q.$$

Ahora, tenemos que,

$$\begin{aligned}
S_3 &= a^3+b^3+c^3 \\
&= (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)-(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2) \\
&= -(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2) \\
&= -(ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)) \\
&= -[(ab+ac+bc)(a+b+c)-abc-abc-abc] \\
&= -(qS_1-3r) \\
&= 3r.
\end{aligned}$$

De manera análoga, obtenemos que,

$$\begin{aligned}
S_4 &= rS_1-qS_2=2q^2, \\
S_5 &= rS_2-qS_3=-2qr-3qr=-5qr, \\
S_7 &= rS_4-qS_5=2q^2r+5q^2r=7q^2r.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dfrac{S_7}{7}=q^2r=\dfrac{S_5}{5}\cdot\dfrac{S_2}{2}$.

Problemas de Entrenamiento

Desde su creación, Tzaloa no sólo ha buscado ser un útil recurso informativo y una fuente de problemas para aquellos que se interesan en los concursos de matemáticas. Tzaloa pretende ser un vínculo y un medio efectivo de comunicación para la comunidad olímpica mexicana. Pensamos que, para nosotros, el medio natural de expresión es a través de la matemática y por eso esta sección está especialemnte dedicada a mostrar y compartir el talento y la matemática desarrollada por todos nuestros lecto-escritores.

Con el fin de dar tiempo a redactar y enviar los trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestro buzón electrónico `revistaomm@gmail.com`. Ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo.

Problemas de Entrenamiento.
Año 2012 No. 4.

Los siguientes 10 problemas están buscando las soluciones que sólo con tu participación podrán ser halladas. Considera que estos *Problemas de Entrenamiento* son una magnífica oportunidad para imponerte el reto de que la solución salga publicada con tu nombre impreso. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Problema 1. Escogemos a los puntos P y Q sobre los lados AB y BC del triángulo ABC. Sea R el punto de intersección de los segmentos AQ y CP. Suponiendo que $AQ = QC$ y $AB = RC$, demuestra que los puntos B, P, Q y R están en una misma circunferencia.

Problema 2. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Demuestra que,

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}.$$

Problema 3. Sean f y g dos funciones tales que $g(f(x)) = x$ y $f(g(y)) = y$ para cualesquiera números reales x y y. Supongamos que para todo número real x, $f(x) = kx + h(x)$ donde $k \neq 0$ es una constante y $h(x)$ es una función periódica. Demuestra que $g(x)$ siempre puede ser expresada como la suma de una función lineal más una función periódica. (Decimos que una función h es periódica, si existe un número real $p \neq 0$ tal que $h(x + p) = h(x)$ para cualquier número real x.)

Problema 4. Tres personas juegan el siguiente juego. N canicas se colocan en un recipiente y los jugadores pueden tomar, en su turno, 1, 2 o 3 canicas. Pierde la persona que toma la última canica. ¿Para que valores de N, pueden el primer y tercer jugador trabajar juntos para forzar a que el segundo jugador pierda?

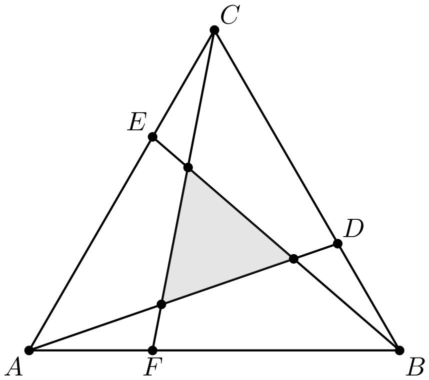
Problema 5. Sea $ABCD$ un tetraedro en el cual la suma de las áreas de las caras ABC y ABD es igual a la suma de las áreas de las caras CDA y CDB. Demuestra que los puntos medios de BC, AD, AC y BD están sobre un mismo plano que pasa por el incentro de $ABCD$.

Problema 6. Sean k y n enteros positivos. Adán piensa que si k divide a $(n-1)(n+1)$, entonces k divide a $n-1$ o a $n+1$. Encuentra todas las k para las cuales la conclusión de Adán es correcta.

Problema 7. En el siguiente triángulo equilátero se tiene que,

$$\frac{AE}{EC}=\frac{CD}{DB}=\frac{BF}{FA}=2.$$

Si el área del triángulo ABC es $1\ \text{cm}^2$, ¿cuánto vale el área sombreada?



Problema 8. Demuestra que,

$$\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+\cdots+\sqrt[2012]{2012}}}}<2.$$

Problema 9. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reales positivos tales que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Demuestra que,

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\geq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}.$$

Problema 10. Determina todos los enteros positivos n tales que,

$$\frac{n}{d(n)}$$

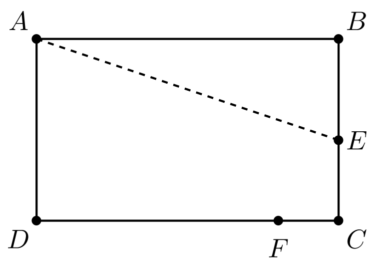
sea un número primo.
(Nota: $d(n)$ denota al número de divisores positivos del entero n.)

Soluciones a los Problemas Propuestos. Año 2012 No. 1.

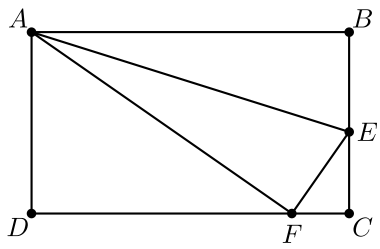
A continuación presentamos las soluciones de los problemas propuestos en Tzaloa 1, año 2012. En esta ocasión felicitamos a José Ramón Tuirán Rangel y a Carlos Eduardo García Romero, quienes nos comparten sus soluciones a los Problemas 1 y 2.

Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento de Tzaloa 2, año 2012, por lo que ésta es la última llamada para que tus trabajos puedan salir publicados dándote todo el crédito que mereces.

Problema 1. (Principiante) E es un punto sobre el lado BC de un rectángulo $ABCD$ tal que, si se hace un doblez sobre AE, el vértice B coincide con un punto F sobre el lado CD. Si $AD = 16\,cm$ y $BE = 10\,cm$, ¿cuál es la longitud de AE?

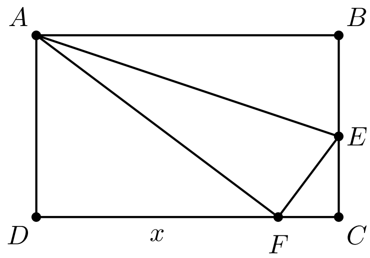


Solución de José Ramón Tuirán Rangel. Como el triángulo AEF se obtiene de doblar el triángulo AEB sobre la recta AE tenemos que estos dos triángulos son congruentes. En particular el triángulo AEF es un triángulo rectángulo. Además, $FE = EB = 10\,cm$. Como $AD = BC = 16\,cm$ tenemos que $EC = 16 - 10 = 6\,cm$. Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo FEC obtenemos que $FC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\,cm$.



Notemos que el cuadrilátero $ABEF$ es cíclico, pues $\angle ABE = \angle AFE = 90°$. Luego, $\angle FAB + \angle FEB = 180°$. Por otro lado, $\angle FEC + \angle FEB = 180°$, de donde $\angle FEC = \angle FAB$. Como el triángulo FEC es un triángulo rectángulo, tenemos que $\angle CEF + \angle EFC = 90°$, pero también observamos que $90° = \angle BAD = \angle BAF + \angle FAD$. Como $\angle BAF = \angle CEF$ se sigue que $\angle FAD = \angle EFC$ y los triángulos FEC y AFD son semejantes por el criterio AAA. Además, como $\frac{AD}{FC} = 2$, la razón de semejanza es $1 : 2$ y como $FE = 10\,cm$, se sigue que $AF = 20\,cm$.
Aplicando de nuevo el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo AFE, tenemos que $AE = \sqrt{20^2 + 10^2} = 10\sqrt{5}\,cm$.

Solución de Carlos Eduardo García Romero. Como al hacer el doblez por el segmento punteado el punto B va al punto F tenemos que los triángulos AEB y AEF son congruentes de donde $FE = EB = 10\,cm$. Como $EC = 6\,cm$, por el teorema de Pitágoras en el triángulo CEF tenemos que $FC = 8\,cm$.



Si $x = DF$, tenemos que $AF = AB = DC = x + 8$. Ahora, por el teorema de Pitágoras en el triángulo DFA tenemos que $x^2 + 16^2 = (x + 8)^2 = x^2 + 16x + 64$ de donde $x = 12\,cm$ y $AF = 20\,cm$.
Finalmente, por el teorema de Pitágoras en el triángulo AFE tenemos que $AE = \sqrt{20^2 + 10^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}\,cm$.

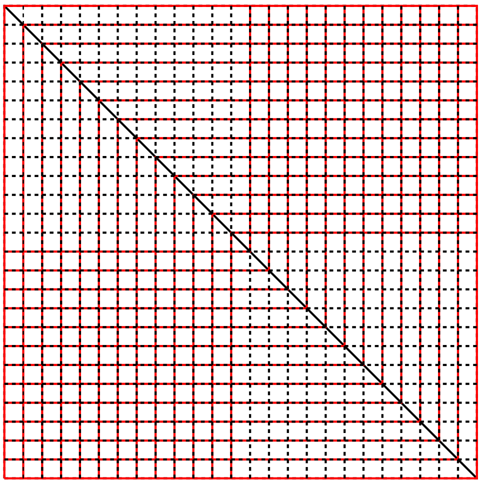
Problema 2. (Principiante) Si el conjunto $\{10, 20, 30, 40, 50\}$ se divide en dos conjuntos A y B (no vacíos), muestra que alguno de estos conjuntos tiene a dos de los números y a su diferencia.

Solución de Carlos Eduardo García Romero. Observemos que si alguno de los conjuntos es $\{10, 20, \ldots\}$ o $\{20, 40, \ldots\}$, se cumple la condición. Supongamos entonces que el número 20 no está con el 10 ni con el 40. Consideremos dos casos:
1. Uno de los conjuntos tiene un elemento y el otro tiene 4. Por la suposición anterior, la única posibilidad es $A = \{20\}$ y $B = \{10, 30, 40, 50\}$, donde claramente B satisface la condición del problema.
2. Uno de los conjuntos tiene dos elementos y el otro tiene 3. Supongamos que el 20 está en el conjunto A, y que el 10 y el 40 están en el conjunto B. Si B contiene a cualquiera de los números 30 o 50, como $40 - 30 = 10$ y $50 - 40 = 10$, se cumple la condición del problema. Ahora, si ninguno de los números 30 y 50 está en B, entonces $A = \{20, 30, 50\}$ y $B = \{10, 40\}$, donde claramente A satisface la condición del problema.
Por lo tanto, en cualquier caso, alguno de los conjuntos A o B tiene a dos de los números y a su diferencia.

Solución alternativa. Supongamos que el conjunto $\{10, 20, 30, 40, 50\}$ se puede dividir en dos conjuntos que no cumplen las condiciones del problema, es decir, que en cada uno no haya 2 números y su diferencia.
Por ejemplo, el 10 y el 20 no pueden estar en el mismo conjunto, ya que $20 - 10 = 10$. De la misma forma, el 20 y el 40 no pueden estar juntos, ya que $40 - 20 = 20$. Supongamos entonces que el 20 está en A y que el 10 y el 40 están en B. Entonces, el 30 no puede estar en B ya que $40 - 30 = 10$, por lo que debe quedar en A. Pero ahora, el 50 no puede estar en A, ya que $50 - 30 = 20$, y tampoco puede estar en B ya que $50 - 40 = 10$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, cualesquiera dos conjuntos que dividen al conjunto $\{10, 20, 30, 40, 50\}$ cumplen que uno de ellos tiene a 2 elementos y a su diferencia.

Problema 3. (Principiante) Considera una cuadrícula de 25×25 cuadraditos. Si se pueden pintar de rojo contornos de cuadrados de cualquier tamaño, ¿cuál es el menor número de contornos de cuadrados que se deben pintar para tener todas las líneas de la cuadrícula de color rojo?

Solución. Consideremos una de las diagonales de la cuadrícula. Para cada uno de los puntos A en esta diagonal, denotemos por C al punto de la diagonal más alejado de A y pintemos de rojo el contorno del cuadrado cuya diagonal es AC. Luego, hemos pintado de rojo el contorno de 24 cuadrados.
Considerando la otra diagonal, tendremos otros 24 cuadrados. Por lo tanto, hemos definido el conjunto de 48 cuadrados rojos (24 para cada diagonal). No es difícil ver que si trazamos todos esos contornos, todas las líneas de la cuadrícula estarán pintadas de rojo.



Para demostrar que 48 es el mínimo, tomemos en cuenta todos los segmentos de la cuadrícula de longitud 1 que tienen exactamente un punto final en la frontera. Cada recta horizontal y cada recta vertical divide a la cuadrícula en dos partes determinadas por dichos segmentos. Por lo que tenemos $4\cdot 24 = 96$ segmentos. Es claro que todos los cuadrados rojos pueden contener como máximo dos de estos segmentos. Por lo tanto, se deben pintar de rojo al menos $2 \cdot 24 = 48$ contornos de cuadrados para tener todas las líneas de la cuadrícula de color rojo.

Problema 4. (Intermedio) Determina el menor entero $n \geq 2$ con la siguiente propiedad: *Los enteros* $1, 2, \ldots, n$ *se pueden reescribir en un renglón de manera que la suma de cualesquiera dos números consecutivos sea un cuadrado perfecto.*
Por ejemplo, $n = 3$ no cumple, ya que en cada acomodo de los números 1, 2 y 3 en un renglón, hay dos números consecutivos cuya suma no es un cuadrado. Los acomodos son:

$$1, 2, 3; \quad 1, 3, 2; \quad 2, 1, 3; \quad 2, 3, 1; \quad 3, 1, 2; \quad 3, 2, 1;$$

y fallan porque ninguna de las sumas $1 + 2$, $3 + 2$, $2 + 1$, $2 + 3$, $1 + 2$ y $2 + 1$ en cada caso respectivamente, es un cuadrado.

Solución. Es fácil ver que $n = 2$, 3 no cumplen. Con $n = 4$, se necesita un número al lado de 4 que sume con 4 un cuadrado. Los números $1, 2$ y 3 no pueden ser. El primero que cumple es 5. Podemos ir completando el acomodo $4, 5, \ldots$ buscando números que sumados a la derecha y a la izquierda den un cuadrado. Es fácil obtener un acomodo con los primeros 15 números:

$$8, 1, 15, 10, 6, 3, 13, 12, 4, 5, 11, 14, 2, 7, 9.$$

Para asegurar que $n = 15$ es el menor entero positivo que satisface la condición del problema, demostraremos que no existen acomodos con números menores que 15. Como los únicos números menores que 15 que sumados con 4 dan un cuadrado son 5 y

12, tenemos dos posibilidades para el 4: que esté en una orilla del acomodo o que no esté en una orilla.
Caso 1: Si el 4 está en una orilla, digamos la izquierda, tenemos dos posibilidades: $4, 5, \ldots$ y $4, 12, \ldots$. La primera posibilidad sólo puede continuarse como 4, 5, 11, 14, 2, 7, 9 en cuyo caso no hay solución. Para la segunda posibilidad, tenemos $4, 12, 13, 3$. Después del 3 podemos poner un 1 o un 6. Si ponemos 1 obtenemos $4, 12, 13, 3, 1, 8$ y ya no puede crecer. Si ponemos 6 obtenemos $4, 12, 13, 3, 6, 10$ y tampoco puede crecer. Luego, no hay acomodos en este caso.
Caso 2: Si el 4 no está en una orilla, debe tener un 5 al lado y un 12 al otro. Del lado del 5 sólo pueden ir $11, 14, 2, 7, 9$. Del lado del 12 sigue el 13 y luego el 3. Después del 3 puede ir un 1 o un 6. Si ponemos 1, el único número que podemos poner después es el 8 y tendríamos el acomodo $8, 1, 3, 13, 12, 4, 5, 11, 14, 2, 7, 9$ que no es solución ya que falta el 6 y el 10. Ahora, si ponemos un 6 después del 3, la única posibilidad después del 6 es el 10 y ya no puede crecer, de modo que tampoco es solución porque falta el 1 y el 8. Por lo tanto, tampoco hay acomodos en este caso.
Concluimos que el menor entero que cumple la condición del problema es el 15.

Problema 5. (Intermedio) Determina todas las ternas (a, b, c) (con $a < b < c$) de enteros positivos con las siguientes dos propiedades:

1. a, b y c son tres enteros impares consecutivos.
2. El número $a^2 + b^2 + c^2$ consiste de cuatro dígitos iguales.

Solución. Ya que a, b y c son tres enteros positivos impares consecutivos, podemos escribir $a = 2n - 1$, $b = 2n + 1$ y $c = 2n + 3$, con n un entero positivo. Luego,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 \\ &= (4n^2 - 4n + 1) + (4n^2 + 4n + 1) + (4n^2 + 12n + 9) \\ &= 12n^2 + 12n + 11. \end{aligned}$$

Supongamos que este número es un entero formado por cuatro dígitos iguales a d, es decir,

$$12n^2 + 12n + 11 = 10^3 d + 10^2 d + 10d + d.$$

Entonces, $12n^2 + 12n = 10^3 d + 10^2 d + 10(d-1) + (d-1)$ está formado por cuatro dígitos, de los cuales los primeros dos son iguales a d y los últimos dos son iguales a $d - 1$. Como $12n^2 + 12n$ es divisible entre 2, $d - 1$ debe ser par. Tenemos entonces las siguientes posibilidades para $12n^2 + 12n$: $1100, 3322, 5544, 7766$ y 9988. Como $12n^2+12n$ también es divisible entre 3, la única posibilidad es $12n^2+12n = 5544$. De aquí, $n^2 + n = \frac{5544}{12} = 462$, es decir, $n^2 + n - 462 = 0$. Factorizando, obtenemos que $(n-21)(n+22) = 0$. Como n es positivo, la única posibilidad es $n = 21$. Por lo tanto, la única terna que satisface las condiciones del problemas es $(a, b, c) = (41, 43, 45)$ y es fácil ver que $41^2 + 43^2 + 45^2 = 5555$.

Soluciones de las Etapas Semifinal y Final Estatal de la 25^{a} OMM

En esta nueva sección de la revista publicamos los exámenes de las etapas semifinal y final estatal de la olimpiada mexicana de matemáticas del año inmediato anterior. La etapa semifinal consta de un examen con 5 problemas para resolver en un tiempo máximo de 4 horas. La etapa final consta de dos exámenes con 4 problemas cada uno, para resolver en un tiempo máximo de 4.5 horas.

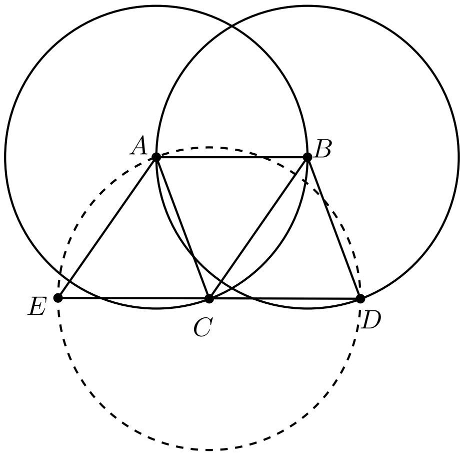
Etapa Semifinal Estatal de la 25^{a} OMM, 2011

Problema 1. Sean $\mathcal{K}_A$ y $\mathcal{K}_B$ circunferencias del mismo radio con centros A y B, respectivamente, tales que A está en $\mathcal{K}_B$. Sea C en $\mathcal{K}_A$ tal que la medida g del ángulo $\angle ABC$ satisfaga $30° < g < 60°$. Sobre $\mathcal{K}_B$ tómese el punto D (distinto de A) para el cual $\angle CBD = g$ y constrúyase la circunferencia $\mathcal{K}_C$ que pasa por A y tiene centro C. De D hacia C trácese una recta hasta que toque a $\mathcal{K}_C$ y sea E el punto de intersección. Demuestra que $\angle AEC = g$.

Solución. Llamemos r al radio de $\mathcal{K}_A$ y $\mathcal{K}_B$. Los triángulos ABC y DBC son congruentes por tener dos lados iguales (pues $AB = BD = r$ y BC es común) e igual el ángulo comprendido entre ellos. Entonces $CD = AC = r$ (de hecho $\mathcal{K}_C$ pasa por D). Además los triángulos ABC y DBC son isósceles, así que $\angle ACB = \angle ABC = \angle CBD = \angle BCD = g$. Ahora podemos concluir de varias maneras que $\angle AEC = g$.
Primera forma: Como EAC es isósceles, $\angle EAC = \angle AEC$, y si llamamos h a este valor común, en vista de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$, tenemos que $2h + \angle ACE = 180°$; pero también $2g + \angle ACE = 180°$, de donde obtenemos $h = g$, como queríamos.
Segunda forma: Como $\angle ABC = \angle BCD$ tenemos que las rectas AB y CD (que es

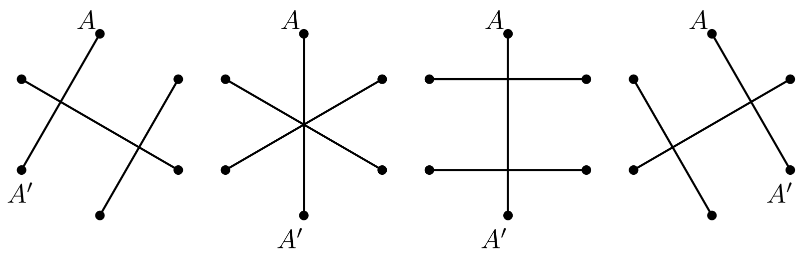
la misma que ED) son paralelas, pero entonces $AECB$ tiene dos lados paralelos y del mismo tamaño, por lo que es un paralelogramo, de donde $\angle AEC = \angle ABC = g$.
Tercera forma: Por ángulos inscritos en la circunferencia $\mathcal{K}_C$ tenemos que,

$$\angle AEC = \angle AED = \frac{\angle ACD}{2} = \frac{\angle ACB + \angle BCD}{2} = \frac{g+g}{2} = \frac{2g}{2} = g.$$



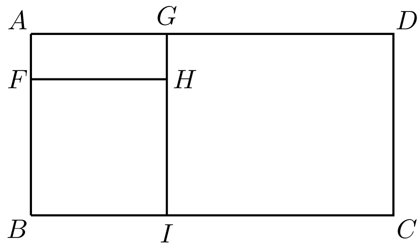
Problema 2. A una cena llegan 3 matrimonios. Se quieren sentar alrededor de una mesa redonda de manera que nadie quede junto a su pareja. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar si Adela ya tiene un lugar asignado fijo?

Solución. Supongamos que los matrimonios son (A, A'), (B, B') y (C, C') y que Adela es A. Tenemos las siguientes posibilidades de acomodo de las parejas con referencia a A:



Cada segmento representa dónde queda un matrimonio. En cada esquema, el matrimonio $\{B, B'\}$ tiene para escoger cualquiera de los dos segmentos y, entre sí B y B' se pueden quedar en cualquiera de los dos lugares; el segmento restante queda determinado por el matrimonio $\{C, C'\}$ y esa pareja tiene dos posibilidades de acomodo en su segmento. Entonces hay $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ posibilidades en cada esquema, dando un total de $8 \cdot 4 = 32$ posibilidades.

Problema 3. Un rectángulo $ABCD$ de lados de longitudes enteras y área 756 se divide en tres rectángulos $AFHG$, $FBIH$ y $GICD$ con lados de longitudes enteras como se muestra en la figura, de manera que el área de $FBIH$ es el triple que la de $AFHG$ y el área de $GICD$ es 5 veces la de $AFHG$. Determina todas las posibilidades para la longitud de AD.



Solución. Sean k el área de $AFHG$, $a = AG$, $b = AF$ y $c = GD$. Luego, el área de $FBIH$ es $3k$, el área de $GICD$ es $5k$ y el área total es $756 = k + 3k + 5k = 9k$, por lo que $ab = k = \frac{756}{9} = 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, $FB = 3b$ y $4bc = 5k = 5(84) = 4 \cdot 5 \cdot 21$, de donde $bc = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Como ab es múltiplo de 4 pero bc no lo es, se sigue que a es múltiplo de 4. La siguiente tabla muestra las posibilidades para la longitud de AD.

a	b	c	$AD = a + c$
4	21	5	9
12	7	15	27
28	3	35	63
84	1	105	189

Problema 4. ¿Cuántos elementos a lo más podemos escoger del conjunto $\{1, 2, \ldots, 20\}$ si no queremos que la suma de dos de los números escogidos sea múltiplo de un cuadrado mayor que 1?

Solución. La suma de dos números escogidos no puede ser múltiplo de $2^2 = 4$, así que no puede haber un número con residuo 1 al dividirlo entre 4 y otro cuyo residuo de la división entre 4 sea 3. Esto nos dice que la elección de cualquiera de los números $1, 5, 9, 13, 17$ excluye la elección de cualquiera de los números $3, 7, 11, 15, 19$. Por la misma razón, a lo más se puede escoger un número con residuo 0 (o sea, uno de la lista $4, 8, 12, 16, 20$) y uno con residuo 2 (uno de la lista $2, 6, 10, 14, 18$). Esto nos dice que el conjunto buscado a lo más tiene $5 + 1 + 1 = 7$ elementos. Sin embargo, las sumas tampoco pueden ser múltiplos de 9, así que de los números 1 y 17 a lo más se puede escoger uno, y lo mismo pasa con los números 5 y 13. Luego, de la lista $1, 5, 9, 13, 17$ a lo más se pueden tomar 3 elementos. De manera análoga, de los números 3 y 15 a lo más se puede escoger uno, y lo mismo pasa con los números 7 y 11, de modo que de la lista $3, 7, 11, 15, 19$ a lo más se pueden tomar 3 elementos. En cualquier caso, tenemos que el conjunto buscado a lo más tiene $3 + 1 + 1 = 5$ elementos. Por lo tanto, considerando el conjunto $\{1, 2, 5, 9, 12\}$ concluimos que el máximo buscado es 5.

Problema 5. ¿De cuántas maneras es posible acomodar los números del 1 al 10 de manera que del primero al séptimo vayan creciendo, que el séptimo sea mayor que el octavo, y que del octavo al décimo vayan creciendo otra vez? (Por ejemplo, una posibilidad es $1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 4, 7, 9$.)

Solución. Supongamos que $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ es un acomodo de los números del 1 al 10 que satisface la condición del problema. Como a_7, a_9 y a_{10} son mayores que a_8, las posibilidades para a_8 son $1, 2, \ldots, 7$.
Si $a_8 = 7$, entonces hay 3 posibilidades para escoger a_9 y a_{10}, pues deben ser dos números en $\{8, 9, 10\}$ y las opciones son $\{8, 9\}$, $\{8, 10\}$ y $\{9, 10\}$. Al escoger esos dos números ya todo queda determinado (pues los que sobren se pondrán en orden para formar la sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_7$; por ejemplo, si se escogen el 8 y el 10, la sucesión será $1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 7, 8, 10$).
Si $a_8 = 6$, entonces hay 6 posibilidades para escoger a_9 y a_{10}, pues deben ser dos números en $\{7, 8, 9, 10\}$ los cuales son: 3 escogiendo $a_9 = 7$; 2 escogiendo $a_9 = 8$; 1 escogiendo $a_9 = 9$ (esto también puede contarse usando el lenguaje de las combinaciones y es $\binom{4}{2} = 6$).
Si $a_8 = 5$, entonces hay 10 posibilidades para escoger a_9 y a_{10} pues deben ser dos números en $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ los cuales son: 4 escogiendo $a_9 = 6$; 3 escogiendo $a_9 = 7$; 2 escogiendo $a_9 = 8$; 1 escogiendo $a_9 = 9$ (o en lenguaje de combinaciones, $\binom{5}{2} = 10$).
Continuando de esta manera tenemos que el total de posibilidades es,

$$\begin{aligned} & 3 + (1 + 2 + 3) + (1 + 2 + 3 + 4) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) + \cdots + \\ & + (1 + 2 + 3 + \cdots + 8) \\ = \; & 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 \\ = \; & 119. \end{aligned}$$

(En lenguaje de combinaciones, tenemos $3 + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} + \binom{7}{2} + \binom{8}{2} + \binom{9}{2} = 119$.)

Solución alternativa. Observemos que si elegimos los primeros 7 números, hay una única manera de elegir el orden de los últimos tres (pues éstos deben estar en orden creciente). Ahora, necesitamos que el séptimo número sea mayor que el octavo, así que el número más grande entre los 7 que tomemos, debe ser mayor que el menor número de los tres que quedan. Esto siempre sucede, a menos que hayamos elegido exactamente los números del 1 al 7 (pues ya no quedan números menores a 7). Por lo tanto, el número de posibilidades es $\binom{10}{7} - 1 = 119$.

Etapa Final Estatal de la 25^{a} OMM, 2011

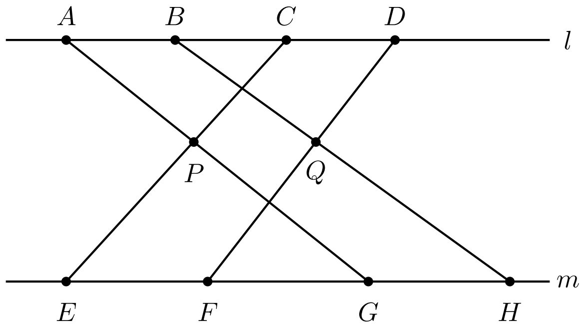
Problema 1. En un torneo había 7 equipos que jugaron todos contra todos una vez. Cada día se efectuó un partido. En determinado momento se observó que cada equipo había jugado a lo más 3 juegos. Demuestra que a alguno de los equipos le faltaba en ese momento por lo menos 4 partidos por jugar.

Solución. En el momento en que cada equipo ha jugado a lo más 3 partidos, se tiene que el número de partidos jugados es menor o igual que $\frac{7\cdot 3}{2}$ (pues cada partido jugado entre los equipos A y B es el mismo partido jugado entre B y A), así que es 10 a lo más. Por otro lado, el número total de partidos al finalizar el torneo es de $\binom{7}{2} = 21$, lo cual dice que faltaban al menos $21 - 10 = 11$ partidos por jugar. Si a cada equipo le faltaran 3 partidos a lo más por jugar, entonces el mismo razonamiento nos llevaría a que faltarían a lo más 10 partidos por jugar, lo que es una contradicción. Por lo tanto, a alguno de los equipos le faltaban 4 partidos por jugar en ese momento.

Problema 2. En un planeta, el año dura 101 días y los días están numerados del 1 al 101. Resulta que llueve un día, después deja de llover dos días, al día siguiente vuelve a llover y después deja de llover el día siguiente; otra vez llueve y luego pasan dos días más sin llover y así sucesivamente, alternándose los días que no hay lluvia en $2, 1, 2, 1, 2$, etc. Llovió por primera vez el día 2, luego el 5, luego el 7, luego el 10, luego el 12, etc. Demuestra que, al pasar los años, llega un momento en que ha llovido exactamente el mismo número de veces cada fecha del año, y determina cuántos años deben pasar para que eso ocurra.

Solución. Al pasar el primer año ha llovido exactamente los días con número de la forma $5k + 2$ y de la forma $5k$. Entonces, los últimos días del año con lluvia son el 97 y el 100. El residuo de dividir $97 + 5 = 102$ entre 101 es 1, y el de dividir $100 + 5$ entre 101 es 4, de donde ese segundo año lloverá todos los días con número de la forma $5k + 1$ y $5k + 4$, y los últimos días de lluvia de ese año serán el 99 y el 101. Ahora, los respectivos residuos de la división entre 101 de $99 + 5 = 104$ y de $101 + 5 = 106$ son 3 y 5, de donde el tercer año lloverá los días con número de la forma $5k + 3$ y $5k$, de modo que los últimos días del tercer año son el 98 y el 100. De la misma manera en el cuarto año lloverá los días con número de la forma $5k + 2$ y $5k + 4$, y los últimos días son 97 y 99. El quinto año lloverá en los días de la forma $5k + 1$ y $5k + 3$. Entonces al terminar el quinto año ya habrá llovido exactamente dos veces cada día.

Problema 3. Sean l y m dos rectas paralelas. Sean A, B, C y D puntos en l, y sean E, F, G y H puntos en m de forma que $AB = CD$ y $EF = GH$ (ver figura). Sean P y Q los puntos de intersección de AG con CE y de BH con DF, respectivamente. Demuestra que PQ es paralela a las rectas l y m.



Solución. Sean h_1 la altura del triángulo EPG desde P, h_2 la altura del triángulo CPA desde P, h_3 la altura del triángulo FQH desde Q y h_4 la altura del triángulo DQB desde Q. Los triángulos EPG y CPA son semejantes así como los triángulos FQH y DQB. Luego, $\frac{h_1}{h_2} = \frac{EG}{AC}$ y $\frac{h_3}{h_4} = \frac{FH}{BD}$. Además $EG = FH$ y $AC = BD$, de modo que $\frac{h_3}{h_4} = \frac{EG}{AC} = \frac{h_1}{h_2}$. Por lo tanto, PQ es paralela a l y a m.

Solución alternativa. Sea r la paralela a l que pasa por P y sea Q' la intersección de r con BH. Observemos las siguientes igualdades de áreas,

$$\begin{aligned}
(ABQ'P) &= (CDQ'P),\\
(EFQ'P) &= (GHQ'P),\\
(ABHG) &= (CDFE).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
(CDFE) &= (EFQ'P) + (CDQ'P) \pm (DQ'F)\\
&= (GHQ'P) + (ABQ'P) \pm (DQ'F)\\
&= (ABHG) \pm (DQ'F)\\
&= (CDFE) \pm (DQ'F),
\end{aligned}$$

de donde $(DQ'F) = 0$. Por lo tanto, Q' está sobre DF y, como estaba en DH, concluimos que $Q' = Q$.

Problema 4. Determina todos los conjuntos A de 4 enteros menores que 250, en los cuales cada pareja de números tenga máximo común divisor igual a un número primo, y que todos esos primos sean distintos.

Solución. Supongamos que A es un conjunto de los pedidos. Como $\binom{4}{2} = 6$, los máximos comunes divisores de las parejas de elementos de A deben ser 6 primos distintos. Cada número se compara con otros 3 del mismo conjunto, así que cada número debe tener entre sus factores a 3 primos, al menos. Si 17 fuera uno de los máximos comunes divisores, entonces 2 de los números a lo menos podrían ser $2 \cdot 7 \cdot 17 = 238$ y

$3 \cdot 5 \cdot 17 = 255 > 250$. Entonces, los números deben formarse con productos de 3 o más de los primos $2, 3, 5, 7, 11$ y 13.
Observemos que ningún número puede tener como factores a ambos 11 y 13 pues lo menos que podría ser es $2 \cdot 11 \cdot 13 = 286 > 250$. También tenemos que $13 \cdot 7 \cdot 5 > 250$ y $13 \cdot 7 \cdot 3 > 250$, así que la única posibilidad es que 13 sea uno de los máximos comunes divisores con los números $2 \cdot 7 \cdot 13 = 182$ y $3 \cdot 5 \cdot 13 = 195$. Como también $11 \cdot 5 \cdot 7 > 250$ y no es posible volver a poner juntos al 2 y al 7, ni tampoco al 3 y al 5, la única posibilidad es que los números de los cuales 11 es máximo común divisor son $2 \cdot 5 \cdot 11 = 110$ (o $2^2 \cdot 5 \cdot 11 = 220$) y $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$. Por lo tanto, sólo hay dos conjuntos con las características pedidas y son $\{110, 182, 195, 231\}$ y $\{220, 182, 195, 231\}$.

Problema 5. Demuestra que todos los enteros positivos impares se pueden escribir en la forma,

$$a_0 + 2 \cdot a_1 + 2^2 \cdot a_2 + \cdots + 2^n \cdot a_n,$$

donde n es cualquier entero no negativo y cada a_i es 1 o -1 (por ejemplo, $11 = 1 - 2 + 4 + 8$).

Solución. Probaremos que para n fija, todo impar positivo menor o igual que 2^{n+1} se puede lograr. Queremos conseguir todos los impares del 1 al 15 en la forma $a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \cdots + 2^n a_n$. Para ver cómo proceder en el caso general, analicemos el ejemplo de $n = 3$.

$$\begin{aligned}
+1+2+4+8 &= 15,\\
-1+2+4+8 &= 13,\\
+1-2+4+8 &= 11,\\
-1-2+4+8 &= 9,\\
+1+2-4+8 &= 7,\\
-1+2-4+8 &= 5,\\
+1-2-4+8 &= 3,\\
-1-2-4+8 &= 1.
\end{aligned}$$

Lo que se hace es, empezando por $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$ se va reduciendo cada vez en 2 la suma que se tiene y eso se logra utilizando que para todo k, $1+2+2^2+\cdots+2^{k-1} = 2^k - 1$. Entonces se busca la primera potencia de 2 que tenga signo positivo y se cambian de signo ella y todas las anteriores (por ejemplo, si 1 tenía signo positivo en un paso, entonces en el siguiente se cambia sólo ese signo; si 1 tenía signo negativo y 2 positivo, entonces se cambian los signos de los dos; si 1 y 2 tenían signos negativos pero 4 era positivo, entonces se cambian los signos de los tres y así sucesivamente). Se hace esto hasta llegar a $-1 - 2 - 2^2 - \cdots - 2^{n-1} + 2^n$ que es igual a 1.

Segunda solución. Lo que se hizo en la primera solución se puede poner de manera formal usando inducción matemática como sigue.
El caso base es el primer impar positivo que se puede escribir en la forma,

$$1 = -1 - 2 - 2^2 - \cdots - 2^{n-1} + 2^n.$$

Supongamos que para cierto entero positivo k se tiene que,

$$2k-1=a_0+2a_1+2^2a_2+\cdots+2^na_n$$

y que no todas las a_i son positivas.
Demostraremos que podemos escribir $2k+1$ de esta forma. Sea a_k el primer coeficiente negativo, es decir, si $i<k$ se tiene que $a_i=1$. Tenemos entonces que,

$$2k+1=-1-2-2^2-\cdots-2^{k-1}+2^k+a_{k-1}+\cdots+2^na_n,$$

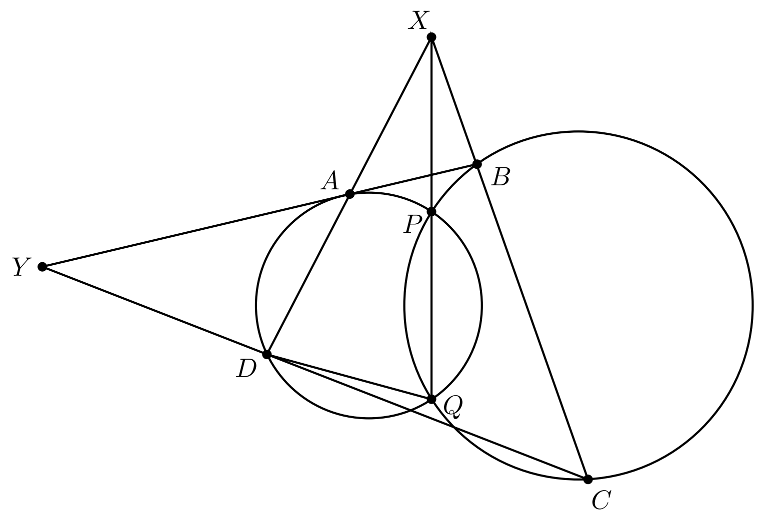
lo que completa la inducción.

Tercera solución. Para un n fijo, el número de expresiones de la forma pedida es igual a 2^{n+1}, pues cada uno de los a_i tiene 2 posibilidades y son $n+1$ de tales a_i's. Como la mitad de las expresiones son positivas y la otra mitad son negativas, tenemos $\frac{2^{n+1}}{2}=2^n$ expresiones que resultan en un número positivo. También tenemos que cualquiera de las expresiones produce un número impar pues $a_0=1$ o -1 y los demás sumandos son pares. Como hay 2^n números impares menores que $1+2+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$, bastará ver que todas son distintas. Supongamos que tenemos dos expresiones distintas,

$$a_0+2a_1+2^2a_2+\cdots+2^na_n=b_0+2b_1+2^2b_2+\cdots+2^nb_n$$

que producen el mismo número impar r, y sea k el mayor índice tal que $a_k\neq b_k$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_k=-1$ y $b_k=1$. Entonces, al cancelar los términos iguales, del lado izquierdo queda un número negativo y del lado derecho queda un número positivo, lo que contradice la igualdad.

Problema 6. En la figura hay dos círculos que se intersectan en los puntos P y Q; X es un punto sobre la recta por P y Q, y los puntos A, B, C y D son las intersecciones de los círculos con rectas que pasan por X, como se muestra. Demuestra que $YB\cdot YA=YC\cdot YD$.



Solución. Aplicando la potencia de X a los dos círculos tenemos que $XA \cdot XD = XP{\cdot}XQ = XB{\cdot}XC$. De aquí concluimos que $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico. Pero entonces aplicando la potencia de Y a la circunferencia que circunscribe al cuadrilátero $ABCD$ obtenemos la igualdad deseada.

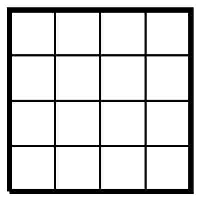
Problema 7. En un estanque hay 100 litros de agua inicialmente. Se desea poner entre 2 y 6 desagües del mismo tamaño, por donde saldrá toda el agua lentamente. Se tienen 100 recipientes: uno con capacidad de 1 litro, otro con capacidad de 2 litros, otro con capacidad de 3 litros y así sucesivamente (el último tanque tiene capacidad de 100 litros). Se quieren escoger algunos de estos recipientes y colocar uno en cada desagüe para recolectar agua (se escoge el mismo número de recipientes que de desagües). Se requiere que la suma de las capacidades de los recipientes escogidos sea 100. Aún cuando un recipiente se llena, el agua continúa saliendo por el desagüe y se tira. Determina el número óptimo de desagües y las capacidades de los recipientes escogidos de tal manera que la suma de las capacidades de los recipientes llenos cuando se terminan los 100 litros sea máxima. (Nota: Sólo cuentan los recipientes que sí hayan sido llenados por completo, por ejemplo, si se colocan cuatro recipientes con capacidades $12, 20, 28$ y 40, la cantidad de litros recolectados será de $12 + 20 = 32$).

Solución. Sea k el número de desagües (y recipientes) escogidos. Primero observemos que por cada desagüe saldrán $\frac{100}{k}$ litros de agua. Por lo tanto, un recipiente de capacidad c se llenará si y sólo si $c \leq \frac{100}{k}$. Puesto que las capacidades de los recipientes son diferentes, debe haber un recipiente cuya capacidad esté por arriba del promedio. Además, todos los recipientes que tengan capacidad por arriba del promedio no se llenarán. Entonces, lo mejor es cuando sólo hay un recipiente con capacidad por arriba del promedio y éste tiene la menor capacidad posible. Comparemos los distintos casos para el número k de recipientes y llamemos $S(k)$ a la cantidad máxima de agua que se conserva. En cada caso, tomamos todas las posibilidades de los mayores $k-1$ números que son distintos y menores o iguales que $\frac{100}{k}$. El otro número es lo necesario para sumar los 100 litros.

Si $k = 2$, con capacidades 49 y 51 se obtiene $S(2) = 49$.
Si $k = 3$, con capacidades 32, 33 y 35 se obtiene $S(3) = 65$.
Si $k = 4$, con capacidades 23, 24, 25 y 28 se obtiene $S(4) = 72$.
Si $k = 5$, con capacidades 17, 18, 19, 20 y 26 se obtiene $S(5) = 74$.
Si $k = 6$, con capacidades 12, 13, 14, 15, 16 y 30 se obtiene $S(6) = 70$.

Por lo tanto, $k = 5$ es el óptimo y las capacidades de los recipientes serán $17, 18, 19, 20$ y 26.

Problema 8. ¿Cuál es la máxima longitud de un camino de A a B en la figura, si el camino debe seguir las líneas y no debe repetir ningún segmento (pero sí puede repetir vértices)?



Solución. Pongamos coordenadas a los puntos de manera que $A=(0,0)$ y $B=(4,4)$. El camino debe tener longitud par (pues las sumas de las coordenadas de A y de B ambas son pares y cada segmento alterna suma par con impar; o, de otra manera, pensando que el camino que va primero todo por abajo y luego hacia arriba tiene longitud 8 que es par; cualquier cosa que haga hacia la izquierda otro camino debe recuperarla hacia la derecha y lo mismo verticalmente). En los vértices de la orilla, salvo en A y en B, se usan a lo más dos segmentos; en A y en B se usa uno. Entonces, la suma de los segmentos que se usan es, a lo más, $\frac{1\cdot 2+2\cdot 14+4\cdot 9}{2}=33$ (esto es porque hay 14 vértices en la orilla distintos de A y B, y hay 9 vértices centrales; la división entre 2 es porque al contar los segmentos que llegan a cada vértice, cada segmento se cuenta dos veces porque tiene dos extremos). Como ya dijimos que la longitud debe ser par, tenemos que a lo más es 32. Para ver que con 32 sí se puede, construyamos el camino como sigue llamando ab al punto de coordenadas (a,b):

$$00, 10, 11, 01, 02, 12, 22, 21, 11, 12, 13, 14, 04, 03, 13, 23,$$

$$24, 34, 33, 32, 31, 21, 20, 30, 40, 41, 42, 32, 22, 23, 33, 43, 44.$$

Problemas de Olimpiadas Internacionales

XIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

La XIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe se realizó del 15 al 23 de junio de 2012 en la ciudad de San Salvador, El Salvador, con la participación de 12 países y un total de 36 estudiantes.

En esta ocasión, los tres alumnos que representaron a México fueron premiados, obteniendo dos medallas de oro y una de plata. En esta destacada participación, un alumno mexicano obtuvo examen perfecto y la delegación de México se colocó en el primer lugar general por países.

La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Luis Xavier Ramos Tormo (medalla de plata), Juan Carlos Ortiz Rhoton (medalla de oro) y Enrique Chiu Han (medalla de oro y examen perfecto). También asistieron los profesores Hugo Villanueva Méndez (líder de la delegación) y Luis Miguel García Velázquez (colíder de la delegación).

A continuación presentamos los problemas de la XIV Olimpiada de Centroamérica y el Caribe. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

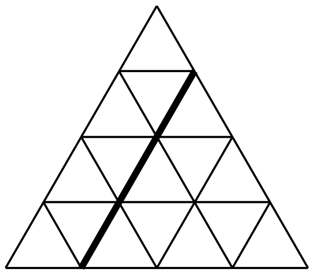
Problema 1. Hallar todos los enteros positivos que sean iguales a 700 veces la suma de sus dígitos.

Problema 2. Sea γ la circunferencia circunscrita al triángulo acutángulo ABC. Sea P el punto medio del menor arco BC. La paralela por P a la recta AB intersecta BC, AC y γ en los puntos R, S y T, respectivamente. Se definen los puntos K y L como las intersecciones de AP con BT y BS con AR. Demostrar que la recta KL pasa por el punto medio de AB si y sólo si $CS = PR$.

Problema 3. Sean a, b, c números reales que satisfacen $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 1$ y $ab + bc + ca > 0$. Demostrar que,

$$a + b + c - \frac{abc}{ab + bc + ca} \geq 4.$$

Problema 4. Trilandia es una ciudad muy peculiar. La ciudad tiene forma de triángulo equilátero de lado 2012. Las calles dividen la ciudad en varios bloques que tienen forma de triángulo equilátero de lado 1. También hay calles en el borde de Trilandia. En total hay 6036 calles. El alcalde quiere ubicar puestos de vigilancia en algunas esquinas de la ciudad, para vigilar las calles. Un puesto de vigilancia puede vigilar todas las calles en las que esté ubicado. ¿Cuál es la menor cantidad de puestos que se requieren para poder vigilar todas las calles de Trilandia?
En el siguiente modelo reducido se muestra una de las 12 calles.



Problema 5. Alejandro y Luisa son una pareja de ladrones. Cada día por la mañana, Luisa le roba a Alejandro un tercio de su dinero, pero por la tarde sufre de un inusual ataque de conciencia y le da la mitad de todo el dinero que ella tiene. Si Luisa roba por primera vez en el día 1, y antes de eso no tenía dinero, ¿cuál es la menor cantidad entera positiva de dinero que Alejandro debe tener para que al final del día 2012 ambos tengan una cantidad entera de dinero?

Problema 6. Sea ABC un triángulo con $AB < BC$, y sean E y F puntos en AC y AB, respectivamente, tales que $BF = BC = CE$, ambos ubicados en el mismo lado que A respecto de BC. Sea G la intersección de BE con CF. Se toma un punto H sobre la paralela a AC por G tal que $HG = AF$ (con H en distinto lado que C respecto de BG). Demostrar que $\angle EHG = \frac{\angle BAC}{2}$.

53ª Olimpiada Internacional de Matemáticas

La 53^a Olimpiada Internacional de Matemáticas se llevó a cabo del 4 al 16 de julio de 2012 en Mar del Plata, Argentina, con la participación de 100 países.

En esta ocasión, México obtuvo una medalla de oro, una de plata, dos de bronce y dos menciones honoríficas. Es la segunda vez en la historia de las participaciones de México que se obtiene una medalla de oro y la ganó Diego Alonso Roque Montoya. A continuación presentamos los resultados del equipo mexicano.

Diego Alonso Roque Montoya (medalla de oro).
Adán Medrano Martín del Campo (medalla de plata).
Jorge Garza Vargas (medalla de bronce).
Julio César Díaz Calderón (medalla de bronce).
Juan Carlos Ortiz Rhoton (mención honorífica).
Jorge Ignacio González Cázares (mención honorífica).

Acompañando a estos participantes asistieron Leonardo Ignacio Martínez Sandoval (líder de la delegación), Marco Antonio Figueroa Ibarra (colíder de la delegación) y María Luisa Pérez (observador).
Como delegación, México quedó en el lugar 31 de 100 países participantes.

A continuación presentamos los problemas de la 53^a Olimpiada Internacional de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Dado un triángulo ABC, el punto J es el centro del excírculo opuesto al vértice A. Este exírculo es tangente al lado BC en M, y a las rectas AB y AC en K y L, respectivamente. Las rectas LM y BJ se cortan en F, y las rectas KM y CJ se cortan en G. Sea S el punto de intersección de las rectas AF y BC, y sea T el punto de intersección de las rectas AG y BC. Demostrar que M es el punto medio de ST.
(El *exírculo* de ABC opuesto al vértice A es la circunferencia que es tangente al segmento BC, a la prolongación del lado AB más allá de B, y a la prolongación del lado AC más allá de C.)

(Problema sugerido por Grecia)

Problema 2. Sea $n \geq 3$ un entero, y sean $a_2, a_3, \ldots, a_n$ números reales positivos tales que $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Demostrar que,

$$(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

(Problema sugerido por Australia)

Problema 3. El *juego de la adivinanza del mentiroso* es un juego para dos jugadores A y B. Las reglas del juego dependen de dos enteros positivos k y n conocidos por

ambos jugadores.
Al principio del juego, el jugador A elige enteros x y N con $1 \leq x \leq N$. El jugador A mantiene x en secreto, y le dice a B el verdadero valor de N. A continuación, el jugador B intenta obtener información acerca de x formulando preguntas a A de la siguiente manera: en cada pregunta, B especifica un conjunto arbitrario S de enteros positivos (que puede ser uno de los especificados en alguna pregunta anterior), y pregunta a A si x pertenece a S. El jugador B puede hacer tantas preguntas de ese tipo como desee. Después de cada pregunta, el jugador A debe responderla inmediatamente con *sí* o *no*, pero puede mentir tantas veces como quiera. La única restricción es que entre cualesquiera $k+1$ respuestas consecutivas, al menos una debe ser verdadera.
Cuando B haya formulado tantas preguntas como haya deseado, debe especificar un conjunto X de a lo más n enteros positivos. Si x pertenece a X entonces gana B; en caso contrario, pierde.
Demostrar que:

1. Si $n \geq 2^k$, entonces B puede asegurarse la victoria.
2. Para todo k suficientemente grande, existe un entero $n \geq 1.99^k$ tal que B no puede asegurarse la victoria.

(Problema sugerido por Canadá)

Problema 4. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que cumplen la siguiente igualdad:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a),$$

para todos los enteros a, b, c que satisfacen $a + b + c = 0$.
($\mathbb{Z}$ denota el conjunto de los números enteros.)

(Problema sugerido por Sudáfrica)

Problema 5. Sea ABC un triángulo tal que $\angle BCA = 90°$, y sea D el pie de la altura desde C. Sea X un punto interior del segmento CD. Sea K el punto en el segmento AX tal que $BK = BC$. Análogamente, sea L el punto en el segmento BX tal que $AL = AC$. Sea M el punto de intersección de AL y BK. Demostrar que $MK = ML$.

(Problema sugerido por la República Checa)

Problema 6. Hallar todos los enteros positivos n para los cuales existen enteros no negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que,

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

(Problema sugerido por Serbia)

La matemática es un oficio que todos podemos aprender

Por Adolfo Sánchez Valenzuela[2]

A la memoria de mi padre

Con el propósito de promover la licenciatura en matemáticas de la Universidad de Guanajuato, he tenido ocasión de dar varias charlas a alumnos de bachillerato con la consigna de motivarlos para el estudio de las matemáticas. Entre las preguntas que hay que estar preparado para responder en una charla de ese tipo están las siguientes: ¿Qué hace un matemático? ¿Qué significa dedicarse profesionalmente a las matemáticas? ¿Cómo describiría un matemático su trabajo y cómo lo compararía con otros trabajos? Me he podido dar cuenta de que no es del todo sencillo pararse frente a un grupo de preparatorianos a hablar de la “asignatura tabú” y transmitir lo maravilloso y apasionante del tema. ¿Cómo puede uno explicarle a un alumno de preparatoria en qué consiste el trabajo de un matemático y hacerlo con absoluta transparencia y sencillez; sin intimidarlo, sin ahuyentarlo, sin provocar que desconecte sus sentidos del resto de su ser y terminemos sólo viendo como nos asiente con la cabeza por mero compromiso? ¿Cómo hacer que él pueda llevarse una respuesta concreta y descriptiva de las preguntas planteadas? En pocas palabras: ¿cómo transmitir motivación?

Mi propósito en este ensayo es comparar la actividad de un matemático con otros quehaceres humanos; deseo establecer relaciones entre la matemática y la poesía y la carpintería y la música, y la pintura. Trataré de evidenciar esas ideas hablando de artesanía y matemáticas; de estados de ánimo y conjeturas; de sentimientos y teoremas. Las principales posiciones que me propongo exponer (¿defender?) son las siguientes: 1) Que el ser matemático es un oficio que se puede aprender como el oficio de la carpintería o de la pintura. 2) Que hacer investigación científica dentro del terreno de la

[2]Este artículo es una reproducción de su publicación original en la “Revista de la Universidad de México”, Núms. 578-579, Marzo-Abril 1999, Pp.71-79, con el consentimiento del autor y solicitando el permiso correspondiente a la “Revista de la Universidad de México”

matemática es comparable, por un lado, al trabajo de un artesano en cuanto a la minuciosidad con la que hay que cuidar los detalles finos y, por otro lado, comparable al trabajo de un poeta al escribir poesía o al de un músico al componer una sinfonía en cuanto a la creatividad. 3) Que definitivamente sí hay detrás de los enunciados de muchos teoremas una buena cantidad de sentimientos y pasiones profundas, o por lo menos, reflejos muy elocuentes de la personalidad de los – ¿cómo les podríamos llamar?, ¿autores?, ¿compositores?, ¿demostradores? – ¿descubridores? de dichos teoremas.

En 1973, cuando estaba en el segundo año de la preparatoria, acudí por recomendación de Memo Portillo, mi mejor amigo de la prepa, a una institución de la Ciduad de México dedicada a hacer exámenes de orientación vocacional. Había que someterse a varias pruebas psicométricas durante tres días consecutivos y esperar unos pocos días más para conocer los resultados en una entrevista con la psicóloga del programa. El día que fui por mis resultados iba confiado en que que me dirían lo que yo quería escuchar. En ese entonces yo pensaba dedicarme a la ingeniería civil; de hecho, ya tenía trazado un futuro como ingeniero. Mi padre (un ingeniero civil) me había conseguido un trabajo de dibujante en la empresa Ingenieros Civiles Asociados. Pero aquel día la psicóloga me dijo que los *tests* habían puesto de manifiesto que yo no tenía aptitudes para carrera alguna que tuviera que ver con las matemáticas. Que yo podía ser un abogado, o un trabajador social, o un psicólogo; que definitiavmente yo debía emprender una carrera humanística, aunque no precisamente – dijo – letras, ni filosofía. *¿Podría ser músico?*, pensé tímidamente dándome en ese instante por derrotado para la ingeniería. Pero recuperé el aliento como pude y le dije que eso no podía ser. Alegué que quien explicaba los problemas de matemáticas a mis compañeros de la prepa era yo y que mis calificaciones en matemáticas habían sido excelentes toda la vida. Su sugerencia entonces fue que yo me sometiera a una serie de pruebas adicionales para estar seguros.
Salí destrozado de ese lugar. ¿Cómo podía ser posible? –me preguntaba. A Memo le habían resultado muy provechosos los mismos exámenes y le habían dicho que iba sobre el camino correcto: la música. A mí, en cambio, me estaban diciendo que iba tras la carrera equivocada y, además, el viraje que había que hacer para estar en armonía con mis aptitudes era de 180 grados. No sé de dónde saqué valor para presentarme a aquellos tests especiales de matemáticas, pero justo después de la primera prueba ya no tuve coraje alguno para ir a los siguientes. Uno sabe cuando uno sale mal en un examen y en aquel primero yo sentí que mi desempeño había sido bastante mediocre. Casi todas las preguntas eran contra reloj y yo no tuve tiempo suficiente para contestar a ninguna de ellas. Ya no volví jamás a aquel lugar y preferí mejor ya no darme permiso de escuchar el final de esa historia por boca de la psicóloga.
Al poco tiempo estaba yo, junto con Memo, haciendo un examen de admisión para ingresar a la Escuela Nacional de Música. Para preparar el examen de admisión tuvimos que empezar por aprender un poco de solfeo. Ninguno de los dos sabíamos leer las notas en un pentagrama. Un viejo amigo de la secundaria que tocaba el violín desde que era niño nos preparó para el examen introduciéndonos al fascinante mundo del solfeo. Un día me llamó Memo muy emocionado para decirme que había ido a buscar los resultados del examen de admisión y que él había sido admitido para estudiar flauta. Sin embargo, me dijo también, con cierto pesar, que yo había sido rechazado.
En el tercer año de la preparatoria decreté para mis adentros que los psicólogos se

habían equivocado: que mi futuro sí era la ingeniería y que yo debía apuntar mi vida directo hacia allá. Pero un buen día nuestro profesor de física, Mario Cruz Terán, se salió del guión en su clase y se puso a hablar sobre la paradoja de los gemelos planteada por la teoría de la relatividad de Einstein. Aquella sola clase fue detonante para mí. *¡Eso es lo que yo quiero estudiar!* –me dije. ¡Ciencia! ¡Física! Y en aquel momento decidí dejar el camino hacia la ingeniería y emprender uno completamente nuevo y, quizá ahora sí, uno propio.

En 1975 ingresé a la Facultad de Ciencias de la UNAM para estudiar la carrera de física. Ahí tuve oportunidad de ver cómo, casi todos mis compañeros hablaban con mucha propiedad y facilidad acerca de los conceptos de la física. Ahí entendí por primera vez el significado de la palabra vocación. El primer amigo que tuve en la facultad fue Ernesto Rivera, quien podía resolver con un ingenio enorme *todos* los problemas que nos dejaban en el curso de física general del primer semestre. Un día lo pasó el profesor al pizarrón para que nos explicara a todos cómo es que él había conseguido resolver cierto problema de gravitación. Ernesto escribió con soltura y rapidez sobre el pizarrón y al cabo de muy poco tiempo el maestro lo detuvo diciéndole *¡momento que soy lento!* Ernesto era sin duda brillante y talentoso, pero estuvo menos de un año en la Facultad de Ciencias; consiguió una beca y prefirió irse a estudiar a Alemania.

Una aptitud semejante la encontré en otro amigo entrañable: Gustavo Espinosa. En el segundo semestre de la carrera llevamos un curso de mecánica clásica donde debíamos resolver problemas cada semana y él podía bosquejar la solución en su cabeza – ¡sin tener la necesidad de escribir las ecuaciones! – mientras hilaba varias carambolas en la mesa de billar que tenía en su casa. Yo me pasaba la mayor parte del tiempo sentado por un lado de la mesa de billar, anotando lo que Gustavo decía acerca de la solución de los problemas. Para ello tenía un cuaderno que en lugar de “Mecánica” debía tener en la portada el nombre de “Gustavo”; era el cuaderno que siempre llevaba a su casa cuando él y yo “jugábamos” billar. Tras tomar nota, yo trataba de llenar los detalles, resolver las ecuaciones y poner todo en orden, pero lo impresionante era que los problemas salían como las carambolas: por donde Gustavo los veía y como él decía que iban a salir.

Años más adelante, para mi gran fortuna fui admitido al doctorado en el departamento de matemáticas de Harvard y ahí me encontré con muchos chicos como Ernesto y Gustavo: con matemática dentro de su DNA, con gran habilidad para resolver problemas, con mucho ingenio para demostrar proposiciones, con gran aplomo para sostener discusiones con los profesores, con una enorme capacidad para argumentar y exponer con soltura sus ideas y con la claridad necesaria para transmitir las “imágenes” formadas en sus cerebros aún tratándose de conceptos sumamente abstractos. ¡Sí! ¡En Harvard había muchos estudiantes que eran así!

Hoy me digo a mí mismo que lo que tenían en común todos ellos era que brillaban sus rostros de emoción al hablar de física o de matemáticas. Los problemas de tarea nunca eran para padecerlos, no se sentían jamás agobiados por ellos, sino todo lo contrario: los disfrutaban y gozaban al máximo. Por lo demás, pienso que casi todos (y la unica razón por la que no digo *todos* es por culpa de uno o dos *virtuosos* que “vi pasar”), eran personas completamente normales. Por ejemplo, los amigos que mencioné tenían y padecían problemas personales normales, diría yo, de los que todos tenemos; provenían de familias más o menos comunes y corrientes para los estándares de los estudiantes universitarios; eran gente igual a toda la gente y lo único que sucedió en el caso de cada uno de ellos fue que desde antes de ingresar a la facultad ya habían leído, estudiado, practicado, indagado, etc., acerca de algunos temas de matemáticas y física. ¿Por qué tenían este cúmulo de experiencias previas? Quizá sólo porque les gustó, lo reconocieron para sí mismos y tuvieron la voluntad de estudiar y aprender antes que esperar a entrar a una facultad. Lo hicieron quizá desde que eran niños y conjeturo que la característica común y fundamental fue que nunca eludieron el desafío que les imponía ver un problema sin intentar, por ellos mismos, darle solución.

¿Pero no es acaso esto muy similar a lo que sucede con los chicos que estudian música o pintura? Hay padres que llevan a sus hijos a tomar clases de piano desde que éstos son muy pequeños. Y entonces, el ejecutar una obra al piano, el desarrollar gusto y sensibilidad por la música, el aprender a leer las notas, etc., son habilidades que, por haber sido estimuladas intensamente con método y disciplina desde una edad temprana, se manifiestan más adelante ante los ojos de quienes no tuvieron este tipo de formación como un *talento especial*. ¿Cuántos niños tienen la oportunidad de tomar clases de música? (piénsese también en las clases de inglés y de natación, que tienen tanta popularidad). Y a manera de contraste, ¿cuántos niños tienen una estimulación temprana en las ciencias y cuándo ha sido ésta fomentada por sus padres? Hace muchos años conocí a un niño que me decía con mucha desesperación y frustración que él no entendía por qué a sus padres no les gustaba que él aprendiera cosas interesantes, a lo que yo le pregunté: *¿por qué piensas que ellos no quieren que tú aprendas cosas interesantes?* y su respuesta fue que porque a él le gustaba pedir como regalo de cumpleaños, o de navidad, libros; en particular, ¡libros de paleontología, de aviones, de astronomía! y que lo que le decían sus padres era: *¿para qué quieres tener tantos libros?*

Afortunadamente, la voluntad del niño fue lo suficientemente grande para conseguir satisfacer su deseo de aprender y de leer los libros que quería leer. Sin embargo, no puedo dejar de notar la gran diferencia que hay entre este niño, que muy bien pudo haber sido el hijo de Homer Simpson y, digamos, Richard Feynman (Premio Nobel de física en 1965), quien en una entrevista que concedió para la televisión pública de Estados Unidos al inicio de la década de los ochenta, contó que su padre le leía muchos libros de ciencias desde que él era muy pequeño y que además lo hizo con gran sabiduría porque le enseñó a comparar unas cosas con otras y a entender el significado de los números. El ejemplo que daba era que cuando su padre leía de un libro que el Tiranosaurio Rex medía hasta seis metros de altura, éste hacía una pausa y le preguntaba a su hijo: *¿Sabes lo que esto significa? Significa que si el animal estuviera parado aquí en el jardín y te asomaras por esta ventana del segundo piso, tendrías aún que voltear un poco más hacia arriba tu cabeza para ver hasta dónde llega y comprobarías que su cabeza estaría un poco más arriba que la chimenea*. Hasta donde recuerdo de aquella entrevista y hasta donde recuerdo de su libro (*Surely you're joking Mr. Feynman!*), él no menciona haber tomado clases de piano, ni de natación, ni de pintura. Sólo recuerdo haberlo visto en la televisión hablar muy emocionado de ciencias y de las cosas que su padre le enseñó respecto a ellas. Con estos antecedentes, ¿nos puede sorprender mucho que Feynman haya recibido el Premio Nobel de física?

Imaginemos una fiesta de jóvenes bachilleres: hay música muy bailable, ruido, risas, relajo y buen ambiente. Por allá en un rincón hay un chico que se ve un poco tímido frente a una linda muchacha que comienza a hacerle plática: *¿Y a ti qué materia te gusta más?* –pregunta la chica y él responde: *Matemáticas*,... (no debe costarnos trabajo imaginar el brillo en sus ojos al responder). *¡Uy! ¡Has de ser un geniecito! ¿No? Y ¿qué quieres estudiar después? –¡Matemáticas!* responde nuevamente él. *¡Qué padre!* dice la chica con un tono que marca de facto el fin de la conversación. Interviene un gran silencio (el típico silencio después del típico tono de exclamación) y la chica dice: *Bueno, yo quiero bailar ¡Nos vemos después! ¿eh?* y se va a buscar con quien bailar aunque en realidad parece huir. Esta historia es típica. Es muy posible que al chico le gustara bailar y que sólo estuviera esperando una oportunidad para hacerlo. Él habría bailado gustoso con ella, pero la conversación tomó demasiado pronto un rumbo muy escabroso. Podían haber platicado de muchas otras cosas, pero,... ¿Por qué es tan complicado continuar una conversación que ha empezado así? ¿Por qué es tan raro que a alguien le gusten las matemáticas? ¡A uno le pueden gustar y no saber nada de ellas! Es como cuando nos gusta la música y no sabemos gran cosa de música. No es difícil imaginar que, en la misma fiesta, la chica que abandonó en el rincón al "matematiquito", se incorpore a un grupo donde alguien habla sobre la discografía de un grupo de rock muy popular y de pronto alguien más hace el comentario de que la pieza fulana estaba inspirada en uno de los conciertos de Brandemburgo de J. S. Bach. Y entonces la plática se orienta hacia Bach y luego hacia la música clásica y alguien en el grupo puede decir que la música clásica le fascina; que siempre trae sintonizada la estación de radio de música clásica en su automóvil. ¿Por qué no podemos hablar igual –con la misma soltura y con la misma ligereza– acerca de las matemáticas? ¿Cuál sería una manifestación análoga en el contexto de la fiesta que imaginamos? Quizá que justo cuando la chica hizo la pregunta *¿Y a ti, que materia te gusta más?*, y se oyera por respuesta *las matemáticas*, alguien que pasara cerca dijera con emoción: *¡Ah! a mí también me encantan las matemáticas. Yo siempre compro la revista "Muy Interesante" sólo para leer la sección "el rincón del teorema"*.

En la misma fiesta podemos imaginar a otro grupo de chicos y chicas hojeando un libro con fotografás del *Louvre* con el que se toparon en un librero de la casa. Y al mirar las fotografías de un libro así están a la merced de sus sentidos; como al leer un poema. ¿Cómo al mirar las ecuaciones de un libro de matemáticas? Hay pinturas que nos conmueven; hay poemas que nos emocionan y hay símbolos matemáticos y ecuaciones que nos seducen e invitan a entender de lo que tratan.

Dentro de la matemática hay varios géneros: álgebra, análisis, geometría computación, estadística, etc. Al hojear (y ojear) un libro de matemáticas uno puede sentirse atraído o repelido por la sola apariencia de las ecuaciones que en él se encuentran. Muchas veces he tenido alumnos que no tienen muy claro cuál de varios temas les gusta más como para embarcarse en la aventura de escribir una tesis de licenciatura y lo que hago es "recetarles" una lista de varios libros con la "prescripción" de que los hojeen y se dejen seducir o distanciar por la sola apariencia de las ecuaciones: *¿con qué clase de ecuaciones quieren estar trabajando?* –les pregunto. Y hasta he recomendado literalmente mirar esos libros como si fueran libros de arte. Lo que intento con ello es apelar a un cierto gusto y a una cierta preferencia que después de muy poco tiempo sí se desarrolla en un aprendiz de la matemática (¡como en un aprendiz de lo que sea!). ¿Podría ser comparable –en cuanto a sensualidad– a los gustos y preferencias que una persona podría sentir respecto a ciertas características de otra para buscar compañía, para hacer el amor, para compartir una vida? En realidad lo que busco con esa prescripción es que los alumnos *sientan* el "flechazo".

Aunque tratemos de ver las cosas con lógica, con rigor, con método, con objetividad y aunque le tratemos de dar una demostración a todas nuestras proposiciones, los matemáticos también tenemos intuición, sensaciones y corazonadas. Tenemos un corazón que se puede romper, un corazón que a menudo no entiende las razones de la razón. Con toda la lógica y el rigor del mundo, el corazón nos puede explotar para destrozarse en mil pedazos cuando ya no le cabe ni una sola gota más de tristeza, o descocierto, o aflicción; o puede latir con profunda emoción cuando alguien lo acaricia con bellas palabras, con sentimientos profundos y conmovedores. Sus fibras pueden vibrar y resonar en armonía cuando puede hablar con alguien que habla el mismo lenguaje. Por ejemplo, cuando habla de amor, o cuando habla de matemáticas. ¡Cierto! Son tipos de vibración muy distintos, pero son vibraciones bellas. Es como cuando se emocionan hasta el éxtasis un saxofonista, un flautista, un baterista y un pianista al improvisar juntos y abundar sobre un tema o idea musical; es como cuando en una tertulia literaria nuestros amigos lloran, ríen y se emocionan mientras leen los cuentos, o poemas, o fragmentos de ensayos y novelas que han escrito. El común denominador es que en estas situaciones se habla, se entiende y se pueden comunicar ideas con un mismo lenguaje.

En la matemática hay alfabetos y reglas gramaticales que se pueden aprender. El conocimiento del lenguaje persigue un fin: dominar la comunicación y ésto, en sí representa la solución a muchos problemas inmediatos, entre otras cosas, porque sabremos "pedir lo que necesitamos". En el amor se aprende a pedir lo que se necesita, en la ejecución musical se aprende a pedir *la primera voz*, en la poesía se aprende a comunicar una idea o una emoción, en la matemática se aprende a pedir o a dar una demostración. Pero hay otros usos para el lenguaje. Quizá el ejemplo con el que estemos más familiarizados sea el del lenguaje escrito: aí existe la poesía. La poesía inventa, compone, impacta nuestros sentidos y nos produce emociones. La poesía crea un mundo que es tangible sólo desde dentro del universo poético que ella misma ha generado. ¿No es acaso como la matemática? La matemática también inventa, compone e impresiona y muchas de sus realidades son tangibles sólo desde dentro de un universo *ad hoc*. Ante esta comparación se puede argumentar que la matemática está sujeta a una estructura muy rígida y que sus razonamientos están soldados a una estructura inamovible, pero ¿acaso no se puede decir lo mismo de la poesía? La poesía misma, con todo y su frescura y su libertad, también tiene estructuras, también obedece a sus "propias leyes" (*eg, not law at all!*), también tiene una historia y una teoría –como la tienen la música, la pintura y la carpintería.
Los matemáticos han usado la lógica como la infraestructura principal que subyace a todas sus teorías. Pero incluso la lógica misma ha sido estudiada desde el punto de vista riguroso de la matemática. Los matemáticos se han dado cuenta de que existen "otras lógicas", de la misma manera que en el siglo pasado se reconoció que eran posibles "otras geometrías" diferentes a la de Euclides. ¿Cómo explicarle al no versado

qué quiere decir que hay "otras lógicas"? ¡Hay que darle un ejemplo concreto! Y lo que se viene a la mente es señalar una de las diferencias fundamentales entre una lógica y la otra: en la lógica a la que estamos acostumbrados, se pueden distribuir los conectivos *y* y *o*, como en la siguiente proposición:

$$A \,\mathrm{y}\, (B \,\mathrm{o}\, C) = (A \,\mathrm{y}\, B) \,\mathrm{o}\, (A \,\mathrm{y}\, C)$$

Esto dice que, lógicamente, la proposición del lado izquierdo es la misma que la del lado derecho. Por ejemplo:

$$\mathrm{Salud\,y}\,(\mathrm{Dinero\,o\,Amor}) = (\mathrm{Salud\,y\,Dinero})\,\mathrm{o}\,(\mathrm{Salud\,y\,Amor})$$

Sin embargo, las reglas de la lógica cuántica no permiten, en general, establecer una equivalencia entre estas dos proposiciones y sólo se puede afirmar lo siguiente: *si Dinero implica Salud, o si Amor implica Salud, entonces las proposiciones "Salud y (Dinero o Amor)" y "(Salud y Dinero) o (Salud y Amor)" son lógicamente equivalentes*.
Nos preguntamos si, entonces, apreciar estas exquisiteces es semejante a apreciar la poesía o la música, o la pintura. Imaginemos a un músico que va "leyendo" la partitura de una sinfonía al tiempo que va escuchando una grabación de la misma. Y detiene la cinta en algún pasaje que le conmueve muchísimo y lo repite. . . y lo repite. . . ¿no es como cuando leemos un poema y volvemos a leer y cada vez parece que entendemos mejor el mensaje del poeta? ¿no es como cuando regresamos sobre las líneas de la demostración en un teorema? ¡Casi nunca leemos poesía ni matemáticas "de corrido"! De manera semejante, ir a una conferencia de matemáticas podría ser como ir a un concierto. Podríamos no toser ni interrumpir. Podríamos sólo escuchar atónitos, emocionados, pero cuidándonos de no hacer preguntas sino hasta el final porque así lo pidió el conferencista. Pero hay conferencias que, al contrario, piden ser interrumpidas y admiten una interacción más inmediata. Es claro que interactuar directamente con el conferenciante, en la analogía del concierto, sería como detener al director para que repita un trozo de la ejecución y volver a entender o a apreciar los que hay en el fondo de un pasaje de la sinfonía que interpreta. La música nos fluirá en un concierto, pero no así si la estamos trabajando o si estamos sintiendo su estructura desde la plataforma de un compositor o de un crítico. Lo mismo sucede cuando estamos tratando de entender las emociones y sentimientos que nos trata de comunicar un poeta cuando leemos poesía,. . . y lo mismo es cierto al hacer el amor cuando entregamos y recibimos ese amor en la más delicada y sublime armonía Y es que cuando la interacción es intensa y uno está metido de lleno en ella, cuando uno quiere entender, apreciar, componer, aportar, etc., la obra debe detenerse, el pasaje debe repetirse, debe repasarse. . . y hay pasajes donde se puede dejar fluir y uno puede sólo sentir y emocionarse libremente. Y hay otros donde nuestra aportación es importante para entender, para sentir mejor, para apreciar mejor y hay entonces un éxtasis, como al leer un poema, al escuchar un pasaje musical, al sentirse conmovido por tanto amor y ¿por qué no? al ver finalmente demostrado un teorema tras el que hemos ido durante una buena parte de nuestra vida.

¿Y cómo fue que Usted llegó a Harvard? me preguntó un chico de preparatoria en una de las conferencias que mencioné. Y después de que algunos de sus compañeros presentes exclamaron –¡en avión!– y tuvimos un espacio para reírnos un poco, contesté que por una gran fortuna. Es cierto: durante mis estudios de licenciatura en física siempre me sentí muy obligado a no dejar de estudiar intensamente porque desde que ingresé a la facultad me di cuenta de mi enorme desventaja en cuanto a aptitudes se refiere. Honestamente, quería estar a la altura de mis amigos. No estar en ese nivel me parecía simplemente, no estar haciéndolo bien. Debo reconocer que mi desempeño en mis primeros exámenes de la facultad, sobre todo los de los cursos elementales de matemáticas, evidenciaba un entendimiento bastante mediocre de los conceptos. En los primeros semestres de la carrera, en el primer examen de cada curso, casi siempre salía muy mal. Lo que sí sucedía después era que trataba de superarlo y al final siempre conseguía salir del curso con una buena calificación. Conforme fui avanzando en la licenciatura, fui desarrollando gusto por la teoría de la relatividad y fui aprendiendo todo lo que podía para entenderla mejor. Mis intereses se orientaron entonces hacia la geometría diferencial con el unico propósito de comprender la teoría relativista de la gravitación. Tuve dos profesores cuyos cursos de geometría diferencial me marcaron fuertemente: Charles Boyer y Héctor Vázquez Briones. Hubo también dos libros muy importantes en esta historia con los que yo me ayudaba y aprendía las lecciones de geometría diferencial: *Advanced Calculus* de L. Loomis y S. Sternberg y *Lectures on Differential Geometry* de S. Sternberg, ambos escritos por profesores del departamento de matemáticas de Harvard. Hacia el final de la licenciatura yo no soñaba siquiera que algún día estaría cursando análisis funcional con Lynn Loomis, ni que estaría escribiendo una tesis doctoral bajo la supervisión de Shlomo Sternberg. Lo único que me pasaba por la cabeza entre 1978 y 1979 era aprender geometría diferencial para comprender la gravitación y tratar de conectarme cuanto antes con Jerzy Plebanski quien era, en ese momento, uno de los personajes más famosos con quien uno podía doctorarse en México fructíferamente dentro del singular tema. En este estado concluí la licenciatura en física escribiendo una tesis de geometría diferencial (dirigida por Charles Boyer) y me inscribí casi inmediatamente a la maestría en física. Para entonces, yo ya había llevado más cursos de geometría diferencial y de relatividad con J. Plebanski y me había convencido de que tenía que reforzar mi preparación matemática. En algún momento me cruzó por la cabeza la idea de estudiar un doctorado en matemáticas, pero sólo para ser después un físico teórico "mejor preparado". Escribí a Harvard y seguramente las cartas de recomendación que escribieron mis profesores fueron generosísimas porque resulté admitido sin problemas. Mi llegada a Harvard fue como tenía que ser: arrogante. Llegué comiéndome al mundo y pensando que lo que vendría por delante sería "cuesta abajo" porque ya tenía bajo el brazo un doctorado en física casi concluido. ¿Qué resistencia podían ofrecerme los matemáticos? ¡Toda la resistencia del mundo! como no me costó trabajo comprobar al cabo de la primera semana de clases. Por un lado, casi todos los estudiantes que uno se encuentra por ahí han sido durante algún tiempo "el estudiante número uno" en las escuelas de las que provienen. Es claro que en un salón con veinticuatro estudiantes de éstos, uno de ellos tendría que ser el número veinticuatro y que eso no sería fácil. Yo de plano fui el cabús durante mucho tiempo. Era evidente que me había hecho falta cursar las materias básicas de matemáticas de la licenciatura con el espíritu de un matemático y no con el de un físico para haber podido tener un mejor desempeño al llegar a Harvard. Y es que a veces, los "argumentos físicos que uno puede usar para evidenciar alguna afirmación de la física teórica, no se parecen en nada a las demostraciones que los matemáticos están acostumbrados a dar a sus teoremas. Mis "demostraciones" rápidamente me pusieron en evidencia en el curso de álgebra al que me inscribí en el primer semestre en calidad de aspirante al doctorado y después de mi segunda tarea, el profesor me sugirió que mejor me inscribiera al curso básico de álgebra (¡el curso para los *undergraduates*!) porque el suyo obviamente me estaba quedando grande. O sea que no sólo estaba siendo el cabús de mi clase, sino que de plano me cortaban por incapaz, arrojándome al curso elemental. Ese fue mi *welcome to Harvard, my friend!* El golpe al orgullo fue duro otra vez, pero hoy me siento muy contento por haberme sabido tomar la lección con humildad, por haber reconocido que me faltaban las buenas bases y que éstas uno las puede aprender. Creo que lo más afortunado de aquellos dás difíciles en los que perdí tan de golpe mis asumidas seguridad y confianza fue: 1) haber asistido al curso de los *undergraduates* aceptando que ése era precisamente mi nivel y que tenía que aprender "desde cero" y 2) haber estado con mi esposa Tatiana quien, en los momentos en los que yo más me desesperaba y me cuestionaba seriamente qué demonios estaba haciendo allí, ella estuvo allí para recordarme los argumentos y motivos correctos y no dejarme claudicar. Hacia la segunda mitad del segundo año, habiendo aprobado los muy temidos exámenes generales, hablé con el buen Shlomo para que me dirigiera una tesis y a partir del momento en el que él me dio su *sí, acepto!* conocí facetas de mí mismo que yo ni sospechaba que existieran y conocí también los encantos y frustraciones de la investigación científica. Y otra vez, hoy, me siento muy afortunado de haber sido conducido a lo largo de mi trabajo de tesis doctoral por un personaje como S. Sternberg. Sin duda fue duro en su momento aguantarle el paso, pero estoy convencido de que él, más que nadie, fue quien me formó como matemático, además de que siempre me trató como a un colaborador, él me enseñó con su ejemplo a confiar en mi trabajo. Discutíamos a todas horas; nos desesperábamos juntos cuando los resultados no salían. Un día, cuando recién comenzaba a trabajar bajo su dirección, nos encontrábamos "prendidos de la greña frente a un pizarron reconociendo que no estábamos entendiendo lo que estábamos viendo al tiempo que pasaba por ahí Don Raoul Bott y preguntó que qué nos pasaba. Sternberg le contestó algo del estilo *we don't understand this shit!*, a lo que Don Raoul observó: *if your student can't help you, who can?*. A partir de ese momento supe que se esperaba mucho más de mí y en verdad siento que encaminé mi esfuerzo a satisfacer las demandas de mi asesor. Ciertamente siempre me sentí con la responsabilidad de darle respuesta a sus preguntas y de avanzar en la dirección en la que él sugería avanzar. En el proceso aprendí que uno puede hacer cálculos complicados, conjeturar resultados, ir tras ellos y sus demostraciones y que después de algunas semanas y varios kilos de papel apilado (pero organizado), las cosas pueden no ir bien y entonces hay que tirar todo ese papel y volver a empezar el problema manera diferente. Cuesta mucho trabajo deshacerse de todo ese papel y la razón es que esa puede ser la única prueba tangible de que se ha trabajado duro, pero si las cosas van mal, simplemente van mal y hay que volver por otro camino. La ciencia es así y en particular la matemática es así.

Conforme han ido pasando los años he ido apreciando mucho más el trabajo que Shlomo hizo conmigo como estudiante y le he agradecido infinitamente el haberme dejado conocer y sentir tan de cerca lo que hoy entiendo como la verdadera esencia del quehacer científico en matemáticas. Hoy lo veo así: el descubrimiento científico es un

producto de la interacción humana. Los matemáticos, por ejemplo, llegan a conjeturar sus resultados y teoremas luego de muchas discusiones, de horas en seminarios, de demostraciones fallidas, etc., pero ante todo, lo verdaderamente importante en el camino a un descubrimiento científico, por modesto que éste sea, es la comunicación oral.
Los artículos donde se reportan los descubrimientos científicos varían en estilo de ciencia a ciencia. En matemáticas la gran mayoría de los artículos son muy áridos. El "reportaje matemático" ha de ser riguroso y estricto. Idealmente no se debe "despeinar ni un sólo pelo" en ninguna demostración. Pero entonces, con esta manera tan lógica y tan depurada de reportar un resultado se pierde el sabor de lo que generó las ideas. Se pierden también los andamios que se pusieron para soportar la estructura de las demostraciones. Se pierde mucho del estilo artesanal de la matemática y queda solamente al final un edificio sólido pero sin adornos y sin vestigios de las motivaciones para haber conducido la investigación precisamente por el camino por el que se llevó. De ahí que la metodología del matemático descanse muy fuertemente en sus seminarios y en invitar a dichos seminarios a los autores de los teoremas sobre los que está descansando su investigación del momento. La razón fundamental es tener al fulano enfrente para poderle preguntar ¿por qué su artículo quedó como quedó y por qué las demostraciones han quedado como quedaron?
También es cierto que una parte importante del entendimiento matemático se consigue estando a solas. Casi siempre la versión final de una demostración se logra después de comenzar a escribir con sumo cuidado todos los detalles y casi nunca queda perfectamente "bien sellada" en los primeros intentos. Muchas veces hay que pulir mucho los argumentos y limpiar con esmero los detalles. A pesar de que ya se está casi seguro de la validez del teorema, uno no se pone completamente feliz por la demostración sino sólo hasta que de verdad la ha visto herméticamente cerrada y acabada.
Se puede caricaturizar al matemático como un tipo al que se le ve por los pasillos del instituto o de la facultad caminando un poco cabizbajo. Si uno se le acerca a preguntarle qué es lo que le aflije tanto, él responderá sencillamente que no termina de salir la demostración de su teorema. Pero un buen día después de tantos seminarios y discusiones e intentos de limpiar las demostraciones, se va a la cama y no puede dormir porque le comienza a revolotear una idea de cómo puede conseguir que la demostración funcione bien. Se levanta de la cama y aunque en la mayoría de estos casos la idea era un espejismo, habrá una noche en la que sí, todo funciona, todo sale bien, todo se entiende perfectamente, todo cae por su propio peso en su lugar y se organiza casi por sí sola la estructura de la presentación final. El personaje se pone feliz y se siente montado en la cima del universo. La adrenalina corre por su cuerpo y cada linfocito de su ser se ve invadido por la droga del descubrimiento que acaba de hacer. Se olvida de la hora que es. No tiene sueño, no tiene hambre y sólo tiene este impulso grande por terminar de escribir en limpio todos los detalles del artículo. Ridículamente se piensa en ese momento que alguien puede adelantarse en el mundo con la demostración. Se pasa la noche en vela escribiendo el *paper* y como no puede esperar, se va a su oficina a imprimir la versión final y lo deja, con el primer rayo de sol, dentro de un sobre rotulado, sobre el escritorio de la secretaria, con una nota donde le pide enviarlo por mensajería cuanto antes y él se va, entonces sí, a dormir. Al día siguiente se le vuelve a ver preocupado y cabizbajo porque ahora anda en busca de un nuevo teorema qué demostrar. Parecería como una vida un poco aburrida ante los ojos de quien no ha sentido

esa droga de la “noche anterior”, pero una sola noche de esas al año vale por todo el año para alimentar al espíritu del matemático que todos llevamos dentro.

Desde cierto punto de vista, la caricatura es más o menos aplicable a casi todos los matemáticos. Sin embargo, el matiz o “personalidad de los resultados” demostrados es una cosa un poco aparte. No puedo dejar de mencionar que hay teoremas pesimistas y teoremas optimistas. Hay teoremas importantes –normalmente contraejemplos– que dicen: “no existe X alguno para el que…”, o “la construcción Y no se puede realizar…”. Éstos, me aventuro a catalogarlos como resultados pesimistas y casi siempre reflejan un poco el carácter del matemático que los demostró o descubrió. También los hay del tipo optimista que normalmente dicen: “para cada Z existe un único W tal que…” Quizá cueste trabajo pensar que un artículo en matemáticas presente matices personales dentro de los crípticos enunciados de sus proposiciones y teoremas, pero yo, mientras más artículos veo, más me convenzo de que se pueden decir muchas cosas acerca de la personalidad del autor. Los hay osados, arrogantes, tímidos, mojigatos, etc.

He aquí un ejemplo de una idea osada y optimista:

La supersimetría. El Lema de Schur dice que es imposible establecer una transformación lineal equivariante diferente de cero entre dos espacios vectoriales donde un grupo actúa irreduciblemente. En la física existen dos tipos muy diferentes de partículas elementales; los bosones y los fermiones. Cada tipo de partícula elemental se entiende, desde el punto de vista de la matemática, como un vector en un espacio donde el grupo de simetrías de la naturaleza actúa irreduciblemente. La idea de la supersimetría es hacer posible la existencia de transformaciones distintas de cero, equivariantes, entre espacios vectoriales distintos donde el grupo actúa irreduciblemente. Luego, el escenario donde está planteado el lema de Schur resulta estrecho. El nuevo resultado podrá ser posible solamente sobre bases completamente distintas.

Cuando pensamos, parece ser que lo hacemos con palabras. Las palabras son manifestaciones de nuestras ideas y la matemática ha de transmitirse con palabras –las del idioma que hablamos todos– y otras palabras más: las del idioma matemático; éstas son, las que tenemos que aprender para saber de qué objetos hablamos. Pero dado que un tema central de este ensayo ha sido el de comunicar, quisiera terminar con un par de reflexiones acerca de la comunicación del pensamiento y en particular, este ensayo entero podría juzgarse e iluminarse bajo la luz de los siguientes argumentos: si el pensamiento son palabras, uno puede valerse del lenguaje escrito para comunicarlo. Por ejemplo, yo escribo para ordenar mis ideas –para “verlas” estáticas por un momento, aunque éste sea pequeñito–. Es como tomarles una fotograía. Pero las ideas se están moviendo constantemente. Recuerdo que las fotos se llaman también “instantáneas” y pienso que ese nombre describe y se apega mejor a lo que quiero decir: si escribo para ordenar mis ideas, puede ser que éstas salgan en su forma “instantánea”, pero puede ser también que salgan “muy movidas”, que no se vean bien y hasta pierdan totalmente su definición. En este caso, he tratado de mover algunas ideas en forma helicoidal alrededor de un eje central: ¿cómo motivar a los jóvenes para que abran sus ojos y que por lo menos consideren dentro del abanico de sus alternativas, la posibilidad de estudiar alguna carrera científica como la matemática? El propósito era dar elementos de juicio y fundamentar las posiciones de que ésto es un oficio muy comparable a muchos otros y que se puede aprender y llegar lejos. Pero ahora, en las postrimerás de este escrito

tampoco puedo dejar de mencionar que un propósito más ambicioso sería tomar como pretexto las preguntas iniciales (¿qué hace un matemático?; ¿qué significa dedicarse a las matemáticas profesionalmente?; ¿cómo describiría un matemático su trabajo y cómo lo compararía con otros trabajos?) y con base en ellas generar algo así como una declaración de principios respecto a la propia profesión. Sin embargo, la tarea de apuntar la brújula hacia la dirección ideal y darse argumentos y estrategias para avanzar sobre el camino planeado es una tarea muy íntima; es algo que cada uno debe hacer para sí mismo y puede no tener mucho sentido el esfuerzo de ponerse a escribir algo así para el público a la luz de la pregunta ¿por qué ha de hacerse pública una disertación sobre asuntos tan personales? Y como no tengo una respuesta razonable y sensata para esta pregunta, prefiero dejar el ensayo en un nivel independiente del terreno idealista.
De hecho, desde hace unos días me viene dando vueltas en la cabeza la idea de las románticas líneas de Antonio Machado –en la canción de Joan Manuel Serrat– "caminante, ¡no hay camino! Se hace camino al andar. . . " y esta misma idea la he contrapuesto al *sueño imposible* que dice: "con fe lo imposible soñar,. . . buscar la verdad o el error,. . . ese es mi ideal: la estrella alcanzar, no importa cuán lejos se pueda encontrar". Observo que la primera canción nos invita un poco a vagar sin rumbo, a movernos en cualquier dirección sin importar el final. La canción es exquisitamente romántica porque tiene mucho de verdad y de encanto. La segunda es el ideal. Es localizar la estrella polar y orientar la brújula hacia allá; es determinar cuál es la dirección óptima para moverse y darse al propósito de llegar al final de ese camino con la fe y la convicción de que lo que hay al final es *lo mejor*.

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas de noviembre de 2012 a enero de 2013.

Del 11 al 16 de noviembre en Guanajuato, Guanajuato

26° Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Del 9 al 15 de diciembre en Guanajuato, Guanajuato

Entrenamiento para los seleccionados nacionales.

Enero de 2013

Publicación del décimo séptimo número de la revista "Tzaloa".

Apéndice

Criterios 1 (Criterios de divisibilidad) *Un número entero es divisible,*

- *entre* 2*, si el dígito de las unidades es un número par.*
- *entre* 3*, si la suma de sus dígitos es divisible entre* 3*.*
- *entre* 4*, si el número formado por los dos últimos dígitos (el de las unidades y el de las decenas) es divisible entre* 4*.*
- *entre* 5*, si el dígito de las unidades es* 5 *ó* 0*.*
- *entre* 6*, si es divisible entre* 2 *y* 3*.*
- *entre* 8*, si el número formado por sus últimos tres dígitos es divisible entre* 8*.*
- *entre* 9*, si la suma de sus dígitos es divisible entre* 9*.*

Definición 2 (Congruencias) *Dados dos números enteros* a*,* b*, y un entero positivo* m*, decimos que* a *es congruente con* b *módulo* m*, si* $a - b$ *es múltiplo de* m*. En este caso, escribimos* $a \equiv b \pmod{m}$*.*

Teorema 3 (Pequeño teorema de Fermat) *Si* a *es un entero y* p *es un número primo, entonces* $a^p \equiv a \pmod{p}$*. En particular, si* $p \nmid a$*, entonces* $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$*.*

Teorema 4 (Método de Inducción) *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición* $P(n)$ *es verdadera para todo entero* $n \geq k_0$*, donde* k_0 *es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que* $P(k_0)$ *es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición* $P(k)$ *para algún entero* $k \geq k_0$*.*
3. *Se demuestra que* $P(k+1)$ *es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ *es verdadera para todo entero* $n \geq k_0$*.*

Teorema 5 (Suma de los ángulos internos de un triángulo) *La suma de los ángulos internos de un triángulo es* $180°$.

Teorema 6 (Teorema de Pitágoras) *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 7 (Congruencia de triángulos) *Los triángulos* ABC *y* $A'B'C'$ *son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo* ABC *son iguales a los ángulos y los lados del triángulo* $A'B'C'$.

Criterio 8 (Criterio de congruencia LLL) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama 'lado-lado-lado'y lo denotamos como LLL.*

Criterio 9 (Criterio de congruencia LAL) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con dos lados correspondientes iguales y el ángulo comprendido entre ellos igual, entonces son congruentes. A este criterio se le llama 'lado-ángulo-lado'y lo denotamos como LAL.*

Definición 10 (Semejanza de triángulos) *Los triángulos* ABC *y* $A'B'C'$ *son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir,*

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$
$$\angle ACB = \angle A'C'B'$$
$$\angle BAC = \angle B'A'C'$$

y sus lados homólogos son proporcionales, esto es,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Criterio 11 (Criterio de semejanza AAA) *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos* ABC *y* $A'B'C'$ *son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo-ángulo y la denotamos como AAA.*

Teorema 12 (Teorema de la bisectriz) *Dado un triángulo* ABC *y un punto* D *sobre el lado* BC*, se tiene que* $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.

Teorema 13 (Medida del ángulo inscrito) *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco.*

Definición 14 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 15 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero convexo* $ABCD$ *es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a* $180°$*, es decir,*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Bibliografía

[1] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[2] I. Niven, H. Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[3] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[4] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna*. Compañía editorial continental. México, 1972.

[5] N. Vilenkin. *¿De cuántas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Directorio

Directorio del Comité Organizador de la OMM

José Antonio Gómez Ortega (presidente)
Facultad de Ciencias, UNAM
jago@ciencias.unam.mx

Ignacio Barradas Bibriesca
Universidad de Guanajuato
barradas@quijote.ugto.mx

Irving Daniel Calderón Camacho
Facultad de Ciencias, UNAM,
irvingdanielc@ciencias.unam.mx

Fernando Campos García
Facultad de Ciencias, UNAM
fermexico89@hotmail.com

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
cobian@ciencias.unam.mx

David Cossío Ruiz
ITESM, Campus Ciudad Juárez
sirio11@gmail.com

Luis Cruz Romo
Sistemas de Inteligencia Territorial Estrátegica
lcruzromo@gmail.com

José Antonio Climent Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
antoniocliment@ciencias.unam.mx

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Guanajuato
fuerunt@gmail.com

Samantha Lizette Flores López
Instituto Tecnológico de Colima
samflo_12@hotmail.com

Luis Miguel García Velázquez
Instituto de Matemáticas, UNAM
garcia.lm@gmail.com

María Eugenia Guzmán Flores
CUCEI, Universidad de Guadalajara
marugeniag@gmail.com

Jesús Jerónimo Castro
Facultad de Ingeniería,
Universidad Autónoma de Querétaro
jesusjero@hotmail.com

Eréndira Jiménez Zamora
Instituto Superior de Educación
Normal de Colima
ere_sweet@hotmail.com

Leonardo Martínez Sandoval
Facultad de Ciencias, UNAM
ssbmplayer@gmail.com

María Luisa Pérez Seguí
Facultad de Ciencias Fis-Mat,
Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo
psegui19@gmail.com

Miguel Raggi Pérez
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Universidad Michoacana de San Nicolás
de Hidalgo
mraggi@gmail.com

Olga Rivera Bobadilla
Facultad de Ciencias,
Universidad Autónoma del
Estado de México
olgarb@yahoo.com

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas,
Universidad Autónoma de Yucatán
carlos.rubio@uady.mx

Elena Ruiz Velázquez
eleniux@gmail.com

David Guadalupe Torres Flores
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Guanajuato
ddtorresf@gmail.com

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias,
Universidad Autónoma del Estado
de Morelos
valdez@uaem.mx

Rita Vázquez Padilla
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
ritavz14@gmail.com

Eduardo Velasco Barreras
Universidad de Sonora
hamsteritokeweb@hotmail.com

Hugo Villanueva Méndez
Instituto de Matemáticas, UNAM
hvillan@matem.unam.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior s/n, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@ciencias.unam.mx`

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

`http://www.omm.unam.mx/`