UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Teoría de números

Divisibilidad, MCD, MCM, Primos y TFA

Olimpiada de Matemáticas en Chiapas

Julio del 2018

Divisibilidad

El conjunto de los números naturales es $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ y el conjunto de los números enteros es $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$.

Definición. *Decimos que un entero b es divisible por un entero a (diferente de cero), si existe un entero x tal que $b = a \cdot x$. Que b sea divisible por a, se denotará por $a|b$, que b no es divisible por a, lo denotamos por $a \nmid b$.*

Propiedades básicas de divisibilidad:

1.- Si $a|b$, entonces $a|bc$ para cualquier entero c.

2.- Si $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$.

3.- Si $a|b$ y $a|c$ entonces $a|(bx + cy)$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Z}$.

4.- Si $a|b$ y $b|a$ entonces $a = \pm b$.

5.- Si $a|b$, $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a \leq b$.

6.- $m \neq 0$ y $a|b$ si y sólo si $ma|mb$.

Lema 1. *Si cualesquiera dos términos en $a + b = c$ son divisibles por d, entonces el tercer término también es divisible por d.*

Algunas factorizaciones útiles son las siguientes:

$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ para n entero positivo.

$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1})$ para n entero positivo impar.

Ejemplo 1. *Demuestre que si $(a - c)|(ab + cd)$ entonces $(a - c)|(ad + bc)$*

Solución. Es claro que $(a - c)|(a - c)(d - b)$ y por la propiedad 3 tenemos que $(a - c)|[(ab + cd) \cdot 1 + (a - c)(d - b) \cdot 1] = ad + bc$.

Ejemplo 2. *Demostrar el criterio de divisibilidad de 2, es decir, demostrar que un número n es divisible por 2 si y sólo si la útima cifra de n es par.*

Algoritmo de la división

Teorema 1. *Sean a y $b > 0$ enteros, entonces existen unicos enteros q y r tal que*

$$a = bq + r \quad 0 \leq r < b$$

Observar que el cociente de la división (q) es precisamente $\left[\frac{a}{b}\right]$, donde $[x]$ es la función que nos da el mayor entero no excediendo a x.

Ejemplo 3. *Demuestra que el producto de 3 enteros consecutivos siempre es divisible entre 6*

Ejemplo 4. *Demuestra que si x y y son impares, entonces $x^2 + y^2$ no es divisible entre 4.*

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Definición. *Sean a, b enteros, no ambos cero. El máximo común divisor de a y b, denotado por (a, b), es el mayor entero que divide a ambos números. Si $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a, b) = 1$, decimos que a y b son primos relativos o primos entre si.*

Teorema 2. *El máximo común divisor g de a y b puede ser caracterizado de las siguientes formas:*

- *Es la mínima combinación lineal positiva de a y b.*
- *Es el divisor común positivo de a y b que es divisible por cualquier divisor común de a y b.*

A continuación presentamos algunas **propiedades del máximo común divisor**.

Si $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $n \in \mathbb{Z}$, entonces:

1. $(a, b) = (a, b \pm an)$. Esta propiedad nos da el algoritmo de Euclides.
2. $(ma, mb) = m(a, b)$
3. Si $d|a$ y $d|b$ y $d > 0$, entonces $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{1}{d}(a, b)$
4. Si $(a, n) = (b, n) = 1$, entonces $(ab, n) = 1$
5. Si $c|ab$ y $(b, c) = 1$, entonces $c|a$.

Ejemplo 5. *Calcular* $(1763, 4343)$

Ejemplo 6. *Demuestre que para todo $n \in \mathbb{Z}$ la fracción $\frac{21n+4}{14n+3}$ es irreducible.*

Definición. *Sean a y b enteros diferentes de cero. El mínimo común múltiplo de a y b denotado por $[a, b]$ es el menor entero positivo que es múltiplo de a y de b.*

Teorema 3.

- *Si $l = [a, b]$ y m es un múltiplo común de a y b, entonces $l|m$.*
- *Si $m > 0$, entonces $[ma, mb] = m[a, b]$*
- *Se tiene que $[a, b](a, b) = ab$*

Ejemplo 7. *Hallar el menor entero mayor que 1 tal que al dividirlo entre 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, o 9 deja residuo 1.*

Ejemplo 8. *Hallar $(n, n + 1)$ y $[n, n + 1]]$.*

Primos y Teorema fundamental de la aritmética

Definición. *Un entero $p > 1$ es llamado número primo si no existen divisores d de p tales que $1 < d < p$. Si un entero mayor que uno no es primo, le llamaremos compuesto.*

Teorema 4. *Para todo entero $n > 1$ existe al menos un primo que divide a n*

Lema 2. *(Lema de Euclides) Si p es un primo y $p|ab$, entonces $p|a$ o $p|b$. Esta afirmación se puede exteneder a un producto finito, es decir, si $p|a_1a_2 \cdots a_n$, entonces p divide a al menos un factor a_i del producto.*

Teorema 5. *Existen una infinidad de primos.*

Teorema 6. *(Teorema fundamental de la aritmética) Todo entero $n > 1$ es primo o se puede escribir como producto de números primos. Dicha factorización es única, es decir, si $n = p_1p_2 \cdots p_r = q_1q_2 \cdots q_s$, donde los p_i y los q_i son primos, entonces $r = s$ y los primos p_i son los primos q_i en algún orden.*

Ejemplo 9. *Si $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ DEMUESTRA que todos los divisores d de n son de la forma $n = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ con $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.*

Ejemplo 10. *Calcula todas las soluciones enteras positivas de $x^2 - y^2 = 2019$*

Problema 1. ¿Cuántas cifras tiene el número $999,999,999,999^2 - 1$

Problema 2. Demuestre que $1\underbrace{0\cdots0}_{200}1$ es divisible por 1001.

Problema 3. Se dice que el número $n = 12345679012345679$ es mágico. Se dice esto ya que si se toma una cifra del 1 al 9, por ejemplo el 7, y se multiplica n por 63 (en el caso de haber tomado el dígito 7) el resultado es 777777777777777777. ¿Por qué es mágico el número?, es decir, ¿si se hubiera tomado la cifra 3, por qué número hay que multiplicar a n para obtener un resultado ”sorprendente¿.

Problema 4. Sea $m > n \geq 0$, demuestre que $(2^{2^n} + 1)|(2^{2^m} - 1)$.

Problema 5. El siguiente juego se efectúa entre dos jugadores: Se colocan 19 fichas sobre la mesa y los jugadores tiran en forma alternada; cada tirada consiste en tomar 1, 2, 3 o 4 fichas, y gana el que se quede con la última ficha. ¿Cuántas fichas debe tomar el primer jugador en la primera tirada para asegurar su triunfo?.

Problema 6. Demuestra que para todo entero n, $6|(n^3 - n)$.

Problema 7. Encuentre los enteros positivos n tales que $n^2 + 1$ es un múltiplo entero de $n + 1$.

Problema 8. Juan tiene 5 tarjetas con el número 2, 8 tarjetas con el número 3, 10 tarjetas con el número 7 y 20 tarjetas con el número 8, y las usa para formar números de varias cifras, colocandolas en fila. ¿Puede formar un número que sea un cuadrado perfecto?.

Problema 9. Una fabrica produjo 8,000 vasos para cumplir los pedidos de tres distribuidores, los cuales solicitaban los artículos en cajas de la siguiente manera: el primero en cajas de 36 vasos, el segundo en cajas de 24 vasos y el tercero en cajas de 20 vasos. Sabiendo que a todos les envió la misma cantidad de vasos y que envió la mayor cantidad de vasos que pudo, ¿con cuántos vasos se quedó el fabricante?.

Problema 10. Sean $a = \underbrace{999\cdots99}_{\text{40 cifras}}$ y $b = \underbrace{999999999999}_{\text{12 cifras}}$. Halle mcd(a, b).

Problema 11. ¿Cuántos divisores positivos tiene 2016?

Problema 12. Encuentra si es que existe el menor número entero que al multiplicar sus dígitos el resultado sea 1890, y haz lo mismo con 1995.

Problema 13. ¿Cuál es el menor entero positivo tal que al multiplicarlo por 2016 nos da un cuadrádo perfecto?.

Problema 14. Encontrar el menor número natural n tal que $n!$ es divisible por 990.

Problema 15. ¿Cuántos enteros positivos dividen a 20!?.

Problema 16. Encuentre todos los números enteros positivos que son múltiplos de 210 y tienen 1998 divisores positivos.

Problema 17. Demuestre que para cualesquiera a y b números naturales mayores a 1 se tiene que $a^4 + 4b^4$ no es un número primo.

Problema 18. Determine si el número $4^{545} + 545^4$ es primo.

Problema 19. Demuestra que:

a) Si n no es primo entonces $2^n - 1$ no es primo.
b) Si n tiene un divisor impar entonces $2^n + 1$ es compuesto.

Problema 20. Demuestre que existe un natural n tal que los numeros $n+1, n+2, \ldots, n+2016$ son todos compuestos.

Problema 21. Coloca, sin repetir, siete de los diez dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ en lugar de las letras de la siguiente figura, de manera que los productos de los númerosque están en A, B, C, en B, G, E y en D, E, F, sean iguales, es decir $ABC = BGE = DEF$.

A		D
B	G	E
C		F

Problema 22. Si m y n son enteros positivos que satisfacen $m^n + m^{n+1} + m^{n+2} = 39$, entonces, ¿cuánto vale n^m?.

Problema 23. Si A es un conjunto de úmeros enteros del 1 al 10, llamemos p_A al producto de todos los elementos de A, y llamemos q_A al producto de todos los enteros del 1 al 10 que no están en A. Encuentra el menor entero que puedo obtenerse como resultado de dividir p_A entre q_A.

Problema 24. Si $56a = 65b$, pruebe que $a + b$ es compuesto.

Problema 25. ¿Existe polinomio $p(x)$ con coeficientes enteros tal que $p(7) = 11$ y $p(11) = 13$?.

Problema 26. Demuestre que $6|(a + b + c)$ si y sólo si $6|(a^3 + b^3 + c^3)$

Problema 27. Sea $k \geq 1$ impar. Demuestra que para cualquier entero positivo n, $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ no es divisible por $n + 2$

Problema 28. Halle todos los enteros positivios que son menores a 1000 y cumplen que el cubo de la suma de sus dígitos es igual al cuadrado de dicho entero.

Problema 29. Demuestra que $(n! + 1, (n + 1)! + 1) = 1$.

Problema 30. Sea $n \geq 2$ y k un entero positivo. Demuestre que $(n-1)^2|(n^k - 1)$ si y sólo si $(n-1)|k$.

Problema 31. Sean m y n enteros positivos con $m > 2$. Demuestra que $(2^m - 1) \nmid (2^n + 1)$

Problema 32. Sea $F_k = 2^{2^k} + 1$, $k \geq 0$. Demuestra que si $m \neq n$, entonces $(F_m, F_n) = 1$.

Problema 33. Sean $m, n > 0$, demuestra que si $mn|(m^2 + n^2)$, entonces $m = n$.

Problema 34. Sea k un impar positivo. Demuestra que $1 + 2 + \cdots + n$ divide a $1^k + 2^k + \cdots + n^k$.

Problema 35. Suponga que $(a, b, c) = 1$ y que $\frac{ab}{a-b} = c$. Demuestra que $a - b$ es un cuadrado perfecto.

Problema 36. Sean a y b enteros positivos tales que $a = bq + r$ con $0 \leq r < b$. Demuestre que $(2^a - 1, 2^b - 1) = (2^b - 1, 2^r - 1) = 2^{(a,b)} - 1$.

Problema 37. Demuestre que si a, m, n son enteros positivos con $m \neq n$, entonces

$$(a^{2^m} + 1, a^{2^n} + 1) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \text{ es par} \\ 2 \text{ si } a \text{ es impar} \end{cases}$$

Problema 38. Mostrar que si $(a, b) = 1$ y p es un primo impar, entonces

$$\left(a + b, \frac{a^p + b^p}{a + b}\right) = 1 \text{ o } p.$$

Problema 39. Sea B un entero mayor que 10 tal que cada uno de sus dígitos pertenece al conjunto $\{1, 3, 7, 9\}$. Demuestra que B tiene un factor primo mayor o igual que 11.