TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2009, No. 1

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.omm.unam.mx

Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
Despacho: "Rayaenmedio"

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y 79-40

Impreso y hecho en México,
Enero de 2009.

En memoria de

Julieta del Carmen Verdugo Díaz

Contenido

Presentación

Tzaloa, que en náhuatl significa aprender, es una revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. El objetivo principal de esta publicación, es fomentar y estimular el estudio de las matemáticas como una disciplina del pensamiento que desarrolla la inteligencia del estudiante mediante métodos de razonamiento estructurados, deductivos y creativos.

Desde hace 22 años la Sociedad Matemática Mexicana, a través de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, ha detectado jóvenes con talento para las matemáticas y otras disciplinas afines. Muchos profesores y estudiantes que se han acercado a este programa han creado, de manera espontánea y altruista, innumerables talleres de resolución de problemas que han contribuido de manera sustancial a mejorar la enseñanza de las matemáticas en nuestro país. Asimismo, muchas universidades se han visto beneficiadas, no solamente por el ingreso de jóvenes con una excelente formación matemática, sino también por exolímpicos que desenvuelven su vida profesional en ellas.

El programa básico de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla anualmente en tres etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en olimpiadas internacionales.

23ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

En la 23ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1º de agosto de 1990. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2009-2010 y, para el 1º de julio de 2010, no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario. Para mayor información consulte la pagina:

http://www.omm.unam.mx

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente. Incluimos al final de esta revista el directorio de los delegados estatales.

El Concurso Nacional de la 23^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 8 al 13 de noviembre de 2009 en Campeche, Campeche. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2010: la XXII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, que se llevará a cabo en el mes de marzo; la XII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, que se celebrará en el mes de junio en Puerto Rico; la 51^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se llevará a cabo en julio en Kazajstan y la XXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en el mes de septiembre en Paraguay.

La Revista

Tzaloa, la revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, es una publicación dedicada principalmente a alumnos y profesores de secundaria y preparatoria. Será editada cuatro veces al año y tendrá básicamente la siguiente estructura:

1. En la sección "Artículos de matemáticas" encontrarán artículos de divulgación relacionados con algún teorema interesante y útil para los contenidos que se trabajan en la Olimpiada.

2. La sección "Problemas de práctica", contiene material que sirve como guía para los alumnos que deseen prepararse para las distintas etapas de la Olimpiada. En el primer trimestre del año aparecerán problemas del nivel de un Concurso Estatal. En el segundo y tercer trimestre el grado de dificultad de los problemas será mayor y estará enfocado a los diversos exámenes selectivos que realiza cada estado para conformar su delegación. En el cuarto trimestre los problemas serán del nivel de un Concurso Nacional. Al final de la sección podrán encontrar las soluciones.

3. La sección "Problemas propuestos", para que los lectores envíen al comité editorial sus soluciones, siendo las mejores publicadas en el siguiente número. Los problemas serán clasificados en *principiante*, si es del nivel de un examen estatal, *intermedio* si es del nivel de un examen nacional y *avanzado*, si su nivel corresponde a un examen internacional. Se invita a los lectores a participar en esta sección enviando problemas y soluciones a revistaomm@gmail.com

4. En el primer número de cada año habrá una sección que contendrá el examen del concurso nacional del año anterior, con sus respectivas soluciones. También incluirá los resultados de dicho concurso.

5. Habrá una sección en donde se publicarán los resultados y los exámenes de las diversas Olimpiadas Internacionales en las que México participa anualmente, y las soluciones se publicarán en números posteriores.

6. En la sección “Información Olímpica” se dará información de las diversas actividades programadas por la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

7. La sección “Directorio” contendrá la información de los delgados estatales y del comité nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Dedicatoria

El primer número de Tzaloa está dedicado a Julieta del Carmen Verdugo Díaz, quien fue una de las pioneras de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas donde ocupó diversos puestos. Por su gran entusiasmo y dedicación será recordada por muchos de sus alumnos y colegas que tuvimos la fortuna de conocerla.

Los paseos de Leonhard Euler

Por Ana Rechtman Bulajich

"Lean a Euler, lean a Euler, él es el maestro de todos nosotros"
Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827)

Leonhard Euler es considerado como uno de los principales matemáticos del siglo XVIII, y como uno de los más importantes de la historia de las matemáticas. Nació el 15 de abril de 1707 en Basilea, Suiza, y murió el 18 de septiembre de 1783 en San Petersburgo, Rusia. La mayor parte de su vida vivió en Rusia y Alemania. Sus aportaciones matemáticas abarcan distintas áreas, como el cálculo y la teoría de gráficas. En física, sus mayores aportaciones pertenecen a los campos de la mecánica, la óptica y la astronomía. Una de sus aportaciones a la teoría de gráficas, actualmente un campo activo de investigación, es de la que hablaremos en este artículo.

En 1736, Leonhard Euler resolvió el problema conocido como *problema de los puentes de Königsberg*. En esa época, la ciudad de Königsberg pertenecía a Prusia Oriental. Actualmente, se le conoce como Kaliningrado y pertenece a Rusia. El río Pregel atraviesa la ciudad formando dos islas, y en la época de Euler había siete puentes conectando las distintas partes de la ciudad, como se muestra en la figura 1.

Los habitantes de la ciudad se preguntaban si era posible encontrar un paseo que cruzara cada puente una sola vez. El río no podía ser cruzado por ningún otro medio, y el paseo tenía que comenzar y terminar en el mismo lugar. Esta pregunta es el problema de los puentes de Königsberg.

Euler respondió la pregunta, mostrando que es imposible encontrar un paseo con estas características. A esta solución se le considera el primer teorema de teoría de gráficas.

Sigamos el análisis de Euler: Lo primero que observó es que la trayectoria que se escoge entre dos puentes es irrelevante, lo único importante en la trayectoria es el orden en el cual se cruzan los puentes. Esta observación le permitió reformular el problema en términos más abstractos. Cada una de las cuatro partes de la ciudad puede ser representada por un punto y entre dos puntos se dibujan líneas para indicar los puentes, obteniendo el diagrama de la figura 2.

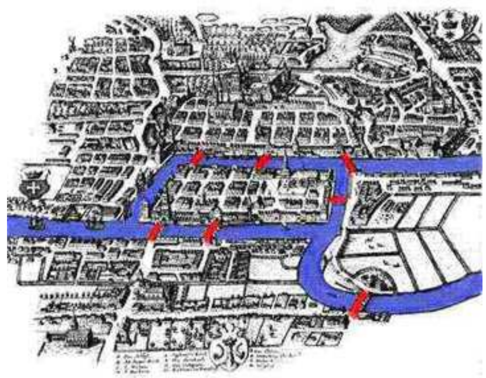


Figura 1: Disposición de los puentes de Königsberg en 1736

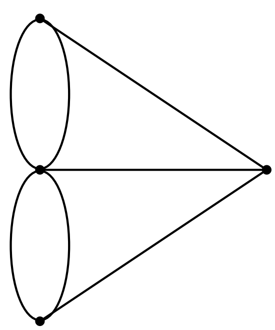


Figura 2: Gráfica asociada al problema de los puentes de Königsberg

En términos modernos, a los puntos se les llama *vértices*, a las líneas *aristas* y el diagrama es una *gráfica*. En estos términos, el problema es encontrar una forma de recorrer todas las aristas, pasando por cada una sólo una vez, y empezando y terminando el recorrido en el mismo vértice. Podemos expresar el problema en términos más sencillos aún: ¿se puede o no dibujar la gráfica de la figura 2 sin separar el lápiz de la hoja de papel y sin recorrer ninguna línea más de una vez?
Una vez simplificado el problema, Euler hizo la siguiente observación: cada vez que uno llega a un vértice por un puente (o arista), tiene que dejar dicho vértice por otro puente (o arista). En otras palabras, a lo largo del paseo el número de veces que uno llega a un vértice es igual al número de veces que uno se va de dicho vértice. Entonces, el número de aristas que tocan cada vértice tiene que ser un número par. Esta observación es suficiente para demostrar que el problema de los puentes de Königsberg no tiene solución: en la figura 2, a cada vértice de la gráfica lo tocan un número impar de aristas.
Regresando a los términos modernos, al número de aristas que convergen en un vértice se le conoce como la *valencia* del vértice. El hecho de que exista un paseo por la gráfica que recorra cada arista una sola vez, y que empiece y termine en el mismo vértice, depende únicamente de la valencia de los vértices de la gráfica. Puesto en otras palabras, todas la valencias tiene que ser pares. A un recorrido de este tipo se le llama un *paseo euleriano*, en honor a Leonhard Euler.
En teoría de gráficas se habla también de *caminos eulerianos*. La diferencia entre los caminos y los paseos eulerianos es que en los primeros no se pide que el vértice de inicio sea el vértice final. En este texto vamos a suponer que un camino euleriano siempre empieza y termina en vértices distintos.

¿Cómo saber si una gráfica puede ser recorrida a lo largo de un camino euleriano?

El análisis de Euler nos permite dar una respuesta a esta pregunta. Observemos primero que la valencia de los vértices intermedios, es decir los vértices que no son ni el inicial ni el final, tiene que ser un número par. La razón es que para cada vértice intermedio el número de veces que llegamos a él es igual al número de veces que nos vamos de él. El mismo argumento implica que las valencias de los vértices inicial y final tienen que ser números impares. Luego, concluímos que un gráfica tiene un camino euleriano si dos de sus vértices tiene valencia impar y el resto valencia par. Por lo tanto, la gráfica de la figura 2 tampoco puede ser recorrida a lo largo de un camino euleriano.
Veamos otro ejemplo. En la gráfica de la figura 3, no podemos encontrar un paseo euleriano que inicie en A, ya que la valencia de este vértice es impar. Sin embargo, como los vértices A y B son los únicos vértices con valencia impar, sí hay un camino euleriano por la gráfica (que tiene que ir de A a B, o viceversa).
Juguemos ahora con variantes del problema de los puentes de Königsberg. Supongamos además que en la isla central hay un cementerio (que en el diagrama 4 está marcado con †) y que los habitantes del pueblo A quieren encontrar un camino que los lleve al cementerio y recorra cada uno de los puentes una sola vez, es decir, quieren encontrar un camino euleriano que los lleve de A a †.
Después de analizar el problema, los habitantes de A llegaron a la conclusión de que para poder realizar un camino euleriano que los lleve al cementerio tienen que construir

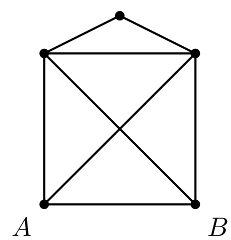


Figura 3: Otra gráfica

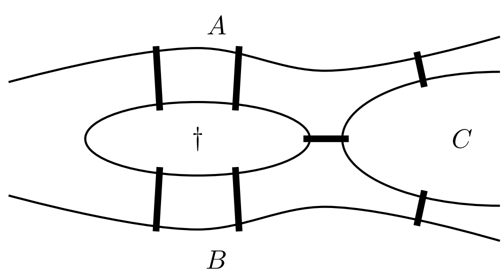


Figura 4: Los puentes entre los pueblos y el cementerio

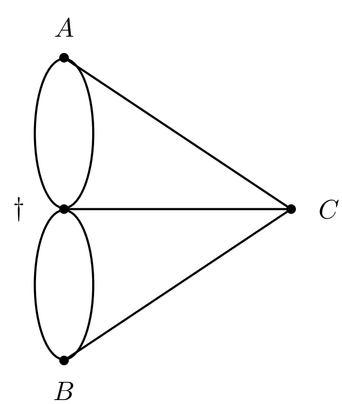


Figura 5: Gráfica asociada al problema de los dos pueblos y el cementerio

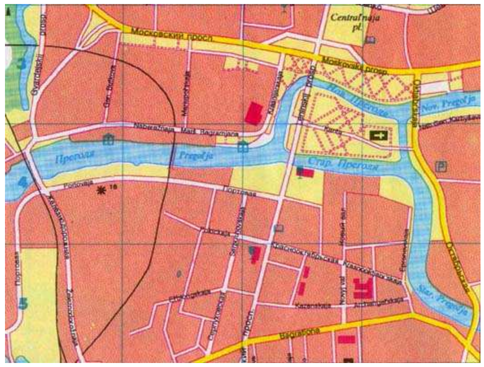


Figura 6: Disposición de los puentes de Königsberg actualmente

un octavo puente. ¿Dónde tiene que estar dicho puente?
Analicemos el problema en la gráfica de la figura 5. Para encontrar un camino euleriano, necesitamos que las valencias de los vértices A y † sean impares, y que las valencias de los vértices B y C sean pares. Es decir, tenemos que cambiar las valencias de los vértices B y C. Luego, los habitantes del pueblo A tienen que construir un puente que vaya del poblado B al C.

Algunas preguntas

1. Si ahora los habitantes del pueblo B desean ir al cementerio recorriendo cada puente una sola vez, ¿tienen que construir algún puente? Si la respuesta es afirmativa, ¿dónde tienen que construir el puente?

2. En la gráfica de la figura 3, ¿cuántos caminos eulerianos hay que vayan del vértice A al vértice B?

3. Dos de los puentes de Königsberg fueron destruidos durante los bombardeos ingleses de la segunda guerra mundial. Otros dos fueron destruidos por el ejército ruso durante la batalla de Königsberg contra los alemanes. Esta batalla duró tres meses y la ganaron los rusos. Los últimos dos puentes fueron reemplazados y actualmente hay cinco puentes cuya disposición se puede ver en el plano de la figura 6. ¿Hay paseos eulerianos y/o caminos eulerianos en la Königsberg moderna?

4. Las aristas de un gráfica pueden estar dirigidas, como en las gráficas de la figura 7. ¿Puedes decir si las gráficas se pueden recorrer a lo largo de paseos y/o caminos eulerianos dirigidos? Encuentra un criterio para decidir rápidamente si una gráfica dirigida puede ser recorrida a lo largo de un paseo o un camino euleriano dirigido (piensa en definir una valencia de entrada y una valencia de salida para cada vértice).

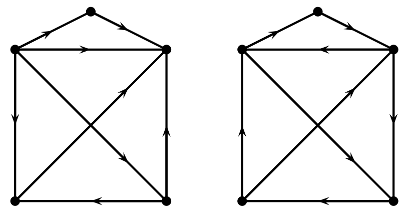


Figura 7: Gráficas dirigidas

Bibliografía

1. William Dunham. *Euler: The Master of Us All*. Mathematical Association of America, 1999.

2. L. Euler. *Cartas a una princesa de Alemania sobre diversos temas de física y filosofía*, traducción al español Carlos Mínguez Pérez. Universidad de Zaragoza, Prensas Universitarias, 1990.

3. P. Taylor. *What ever happened to those bridges?* Australian Mathematics Trust, 2000.
www.amt.canberra.edu.au/koenigs.html

Problemas de práctica

En esta ocasión el material que se presenta en esta sección pretende ser una guía del tipo de problemas que aparecen en los exámenes estatales de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Las soluciones que se presentan en la siguiente sección, no son necesariamente las únicas o las mejores y sólo deben tomarse como ejemplo hacia el tipo de razonamiento que estos problemas buscan estimular.

Problema 1. Consideremos una cinta a lo largo del ecuador. Si se corta dicha cinta en un punto y se intercala un metro adicional de cinta, ¿a qué distancia se separará la cinta de la superficie?

Problema 2. Las caras de un paralelepípedo tienen áreas $2x$, $\frac{y}{2}$ y xy. ¿Cuál es el volumen del sólido?

Problema 3. Un círculo cuyo radio mide 1 cm está inscrito en un cuadrado y éste a su vez, está inscrito en otro círculo. ¿Cuántos centímetros mide el radio del círculo mayor?

Problema 4. ¿Cuál es el último dígito de la suma:

$$(1^2+1)+(2^2+2)+\cdots+(2009^2+2009)?$$

Problema 5. Un conejo lleva una ventaja a un perro que lo persigue equivalente a 50 saltos de conejo. Si un salto de perro equivale a 3 saltos del conejo y el conejo da 8 saltos mientras que el perro da 3, ¿en cuántos saltos de perro alcanza el perro al conejo?

Problema 6. Catalina y Susana cortaron a la mitad dos rectángulos iguales pero lo hicieron de distinta forma, pues Catalina obtuvo dos rectángulos de 40 cm de perímetro cada uno y Susana obtuvo dos rectángulos de perímetro 50 cm cada uno. ¿Cuál era el perímetro de los rectángulos originales?

Problema 7. ¿Cuántos enteros positivos de tres dígitos abc con $a \neq 0$, cumplen que $a + 3b + c$ es múltiplo de 3?

Problema 8. Se tienen ocho piezas de ajedrez: 2 torres, 2 alfiles, 2 caballos y 2 peones. De cada uno de los cuatro tipos de piezas, una es blanca y la otra es negra. ¿De cuántas formas se pueden acomodar las ocho piezas en una columna del tablero, de manera que no queden dos piezas del mismo color juntas?

Problema 9. Si m y n son enteros positivos y $m^n + m^{n+1} + m^{n+2} = 39$, ¿cuánto vale n^m?

Problema 10. ¿Cuántos números de seis dígitos que son múltiplos de 164 terminan en 164?

Problema 11. En un triángulo acutángulo isósceles ABC, sean B_1 y C_1 los pies de las alturas trazadas desde B y C, respectivamente y B_2 y C_2 los puntos medios de los lados AC y AB, respectivamente. Si O es el punto de intersección de los segmentos B_1C_2 y B_2C_1, y $\angle CAB = 30°$, ¿cuánto mide $\angle C_2OB_2$?

Problema 12. En un rancho Juan le dice a Pedro: "Hay que trasquilar estas 30 ovejas en 15 días, trasquilando al menos una por día y siempre un número impar de ovejas". ¿Puede Pedro cumplir la orden de Juan?

Problema 13. Encuentra el valor de la siguiente suma:

$$\frac{2009}{7 \cdot 8} + \frac{2009}{8 \cdot 9} + \frac{2009}{9 \cdot 10} + \cdots + \frac{2009}{2008 \cdot 2009}.$$

Problema 14. Si $0 < x < y$, ¿cuántas soluciones enteras (x, y) tiene la ecuación $2x + 3y = 50$?

Problema 15. Se marcaron en una recta 2009 puntos y se pintaron de rojo o de azul. A continuación se pintaron los segmentos entre puntos consecutivos siguiendo las siguientes reglas:

- si los dos extremos son rojos, el segmento se pintó de rojo;
- si los dos extremos son azules, el segmento se pintó de azul;
- si los extremos son de colores distintos, el segmento se pintó de blanco.

Al finalizar hay 100 segmentos blancos y se sabe que el primer punto es rojo. Determina el color del último punto.

Problema 16. En un triángulo ABC, D es el punto medio de BC, E es el punto medio de AC y F es el punto medio de AB. Si AD, BE y CF miden 144 cm, 90 cm y 90 cm, respectivamente, ¿cuál es el área del triángulo DEF?

Problema 17. En una mesa hay 5 montones de fichas, cada uno con 5 fichas. Dos personas A y B van a jugar un juego por turnos. Empieza A. En cada turno el jugador debe retirar el número de fichas que quiera pero sólo de uno de los montones (por lo menos debe retirar una ficha). Pierde el primero que ya no pueda jugar. ¿Cuál de los dos jugadores puede asegurar su triunfo y cómo debe jugar para lograrlo?

Problema 18. ¿De cuántas maneras se pueden elegir dos fichas de las 28 de un dominó, de manera que se puedan acomodar una seguida de la otra en el juego? (Dos fichas de dominó $\boxed{a \mid b}$ y $\boxed{c \mid d}$ se acomodan una seguida de la otra en el juego si $a = c$ ó $a = d$ ó $b = c$ ó $b = d$. Los números del dominó son $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.)

Problema 19. ¿Será posible que el mínimo común múltiplo de los números $1, 2, \ldots, n$ sea 2008 veces el mínimo común múltiplo de los números $1, 2, \ldots, m$ para algunos enteros positivos m y n?

Problema 20. En un triángulo ABC, $AB = AC$ y $\angle CAB = 100°$. Sea D el punto en BC tal que $AC = DC$ y sea F el punto en AB tal que DF es paralela a AC. Determina la medida del ángulo DCF.

Soluciones a los problemas de práctica

Solución del problema 1. Suponiendo que la Tierra tiene forma esférica de radio R, la longitud de la cinta, al intercalar el metro adicional, está dada por:

$$l = 2\pi R + 1 \tag{1}$$

Por otra parte, si dicha cinta se separa una distancia d de la superficie terrestre, se tiene:

$$l = 2\pi(R + d) \tag{2}$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2), y despejando d tenemos:

$$\begin{aligned} 2\pi R + 1 &= 2\pi(R + d) \\ 2\pi R + 1 &= 2\pi R + 2\pi d \\ 1 &= 2\pi d \\ d &= \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

Observemos que la distancia a la cual se separa la cinta, no depende del radio de la Tierra, es decir, la separación $\frac{1}{2\pi}$ es la misma en una peque na pelota que en la Tierra.

Solución del problema 2. Sea a, b y c las medidas del largo, el ancho y el alto del paralelepípedo, respectivamente. Las caras tienen áreas:

$$ab = xy \tag{3}$$

$$ac = \frac{y}{2} \tag{4}$$

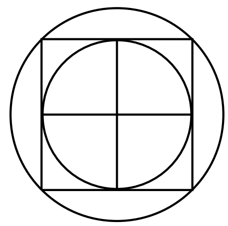
$$bc = 2x \tag{5}$$

Si despejamos a de la ecuación (3), la sustituimos en la ecuación (4) y despejamos b, obtenemos:

$$\begin{aligned} b &= \frac{2xyc}{y} \\ b &= 2xc. \end{aligned}$$

Sustituyendo b en la ecuación (5) obtenemos $c^2 = 1$, lo cual implica que $c = \pm 1$. Como $c > 0$, tenemos que $c = 1$, de donde $a = \frac{y}{2}$ y $b = 2x$. Por lo tanto, el volumen es xy.

Solución del problema 3. Observemos que si del centro de los círculos trazamos segmentos a los puntos de tangencia del círculo menor con el cuadrado, el cuadrado quedará dividido en cuatro cuadrados de lado 1 cm y el radio del círculo mayor será igual a la diagonal de ellos. Luego, usando el teorema de Pitágoras (ver Teorema 2 del apéndice) tenemos que el radio mide $\sqrt{2}$ cm.



Solución del problema 4. Tenemos que los dígitos de las unidades de los primeros sumandos son: $2, 6, 2, 0, 0, 2, 6, 2, 0, 0, 2, \ldots$.
Observemos que cada 5 sumandos los dígitos de las unidades se repiten y el último dígito de su suma es 0. Como 2005 es múltiplo de 5, tenemos que el dígito de las unidades de la suma hasta $2005^2 + 2005$ es 0. Luego, si aumentamos los 4 sumandos que faltan tendremos que el dígito de las unidades de la suma es 0.

Solución del problema 5. Mientras que el perro da 3 saltos, el conejo da 8, pero los 3 saltos del perro equivalen a 9 saltos del conejo, luego cada vez que el perro da tres saltos, le descuenta un salto al conejo. Por consiguiente, para descontar la ventaja de 50 saltos que le lleva el conejo, el perro tendrá que dar $3 \times 50 = 150$ saltos, mientras el conejo da $9 \times 50 = 450$.

Solución del problema 6. Supongamos que los rectángulos originales medían a cm de largo y b cm de ancho, con $a > b$. Entonces, al cortarlos, los perímetros obtenidos son $2(\frac{b}{2} + a) = 50$ y $2(\frac{a}{2} + b) = 40$. Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos que $a = 20$ y $b = 10$. Por lo tanto, el perímetro de los rectángulos originales era de $2(20) + 2(10) = 60$ cm.

Solución del problema 7. Como $3b$ es múltiplo de 3, entonces $a + c$ debe ser múltiplo de 3. Aplicando el criterio de divisibilidad entre 3 (ver Teorema 1 del apéndice) deducimos que el número de dos dígitos ac debe ser también múltiplo de 3. Hay 90 números de dos dígitos y $\frac{1}{3}$ de ellos son múltiplos de 3, es decir, 30. Como hay 10 posibilidades para elegir el dígito b, en total hay $30 \times 10 = 300$ números que cumplen la condición.

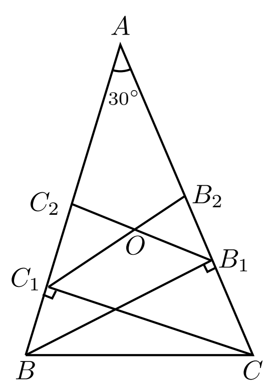
Solución del problema 8. Tenemos 8 maneras de elegir una pieza para la primera casilla, 4 para la segunda (pues debe ser del color opuesto a la de la primera casilla), 3 para la tercera (pues debe tener el mismo color que la primera pieza elegida y no puede ser esa), y así sucesivamente. Luego, hay $8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 1,152$ formas de acomodar las piezas.

Solución alternativa. Como tenemos cuatro piezas de cada color, tenemos que alternar piezas blancas y negras en la columna. El orden de las piezas negras se puede elegir de $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ formas y también el orden de las piezas blancas. Como tenemos dos opciones para elegir el color de la pieza en la primera casilla de la columna, tenemos $2(24)^2 = 1,152$ formas de acomodar las piezas.

Solución del problema 9. La ecuación $m^n + m^{n+1} + m^{n+2} = 39$ se puede reescribir como $m^n(1 + m + m^2) = 3 \cdot 13$. Luego, m^n es un divisor de $3 \cdot 13$. Si $m^n = 1$, entonces $m = n = 1$ y $1 + m + m^2 = 3$, lo cual no puede ser. Si $m^n = 3$, entonces $m = 3$ y $n = 1$, de modo que $1 + m + m^2 = 1 + 3 + 3^2 = 13$ es una solución de la ecuación. Si $m^n = 13$, entonces $m = 13$, $n = 1$ y $m^n(1 + m + m^2) > 39$. Si $m^n = 39$, entonces $1 + m + m^2 = 1$, de donde $m + m^2 = 0$, lo cual no puede ser. Por lo tanto, la única posibilidad es $n = 1$ y $m = 3$, de donde $n^m = 1^3 = 1$.

Solución del problema 10. Un número de seis dígitos que termina en 164 lo podemos escribir de la forma $10^3 n + 164$, en el que n es un número de tres dígitos. Como también queremos que el número sea múltiplo de 164 tenemos que $10^3 n + 164 = 164k$, es decir, $10^3 n = 164(k-1)$. Como $164 = 2^2 \times 41$, tenemos que el número n de tres dígitos debe ser múltiplo de 41, luego $n = 41t$, con $3 \leq t \leq 24$. Por lo tanto, existen $22 = 24-3+1$ números de seis dígtos que son múltiplos de 164 y terminan en 164.

Solución del problema 11. El segmento B_1C_2 es una mediana del triángulo rectángulo ABB_1. Luego, C_2 es el centro de la circunferencia circunscrita a este triángulo (ver Teorema 5 del apéndice). Entonces, $AC_2 = B_1C_2$ y $\angle C_2B_1A = \angle CAB = 30°$.



Por lo tanto, $\angle AC_2B_1 = 180° - 60° = 120°$. Análogamente, si nos fijamos en el triángulo AC_1B_2 tenemos que $\angle AC_1B_2 = 30°$ y $C_1B_2A = 120°$. Luego, en el cuadrilátero AC_2OB_2, tenemos que:

$$\angle C_2OB_2 = 360° - \angle AC_2B_1 - \angle C_1B_2A - \angle B_2AC_2 = 90°.$$

Solución del problema 12. Veamos por qué Pedro no puede cumplir la orden de Juan. Como es necesario trasquilar al menos una oveja por día, en 15 días se trasquilarían al menos 15 ovejas y quedarían otras 15 que también es necesario trasquilar. Si en un día cualquiera se trasquilan x ovejas en vez de una, siendo x un número impar, el número total de ovejas trasquiladas aumenta en un número par. Como no se puede llegar a 15 sumando números pares, no se pueden trasquilar las 15 ovejas restantes aumentando un número par de ovejas por día.

Solución del problema 13. Observemos que:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Luego:

$$\begin{aligned} \frac{2009}{7\cdot 8} + \frac{2009}{8\cdot 9} + \cdots + \frac{2009}{2008\cdot 2009} &= 2009\left[\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{2008}-\frac{1}{2009}\right)\right] \\ &= 2009\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{2009}\right) \\ &= 287-1 = 286. \end{aligned}$$

Solución del problema 14. Si despejamos x de la ecuación $2x+3y=50$, obtenemos $x = 25 - \frac{3y}{2}$. Luego, para que x sea entero y debe ser par, es decir, $y = 2n$ con n entero. Como x es positivo, tenemos que $25-3n > 0$, de donde $n < 9$. Como $x < y$, debemos tener que $25 - 3n < 2n$ lo que implica que $n > 5$. Por lo tanto, $5 < n < 9$ y los valores de n son 6, 7 y 8. Es decir, la ecuación tiene tres soluciones enteras (x, y): $(7, 12)$, $(4, 14)$ y $(1, 16)$.

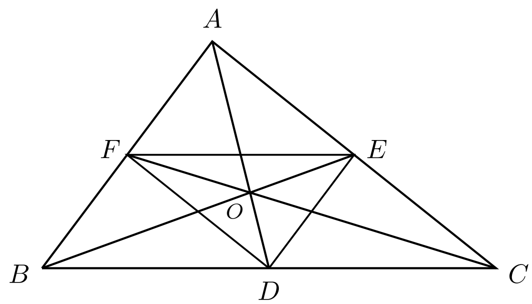
Solución del problema 15. Si no hubiera ningún segmento blanco sabríamos que el último punto es rojo. Si recorremos la recta, cada vez que encontramos un segmento blanco cambiamos de puntos rojos a azules, o viceversa. Por lo tanto, si hay un número impar de segmentos blancos el último punto es azul, y si hay un número par de segmentos blancos el último punto es rojo. Por lo tanto, sabemos que bajo las condiciones del problema el último punto es rojo.

Solución del problema 16. Las rectas AD, BE y CF son las medianas del triángulo ABC (ver Definición 4 del apéndice) y se intersectan en el centroide que llamaremos O. Tenemos que:

$$\frac{OD}{AD} = \frac{OE}{BE} = \frac{OF}{CF} = \frac{1}{3},$$

(ver Teorema 6 del apéndice). Como $BE = CF = 90$ cm, tenemos que los triángulos FBO y ECO son congruentes ya que tienen un ángulo igual, $OF = OE = 30$ cm y

$BO = CO = 60$ cm. También los triángulos OBD y ODC son congruentes (ver Teorema 8 del apéndice) ya que todos sus lados son iguales. Luego, AD es perpendicular a BC.



Utilizando el teorema de Pitágoras (ver Teorema 2 del apéndice) en el triángulo ODC tenemos que:

$$DC = \sqrt{60^2 - 48^2} = \sqrt{1296} = 36 \text{ cm}.$$

Observemos que como E y F son puntos medios, EF es paralela a BC y mide $\frac{BC}{2} = 36$ cm (ver Teorema 3 del apéndice). Por otro lado, AD es perpendicular a BC y por lo tanto es perpendicular a EF. Luego, el área del triángulo DEF es igual a

$$\frac{EF \cdot \frac{1}{2}AD}{2} = 18 \cdot 72 = 1,296 \text{ cm}^2.$$

Solución del problema 17. A puede asegurar su triunfo jugando como sigue: en el primer turno quita uno de los montones e imagina que numera los cuatro montones que quedan usando los números $-2, -1, 1$ y 2. Después juega imitando lo que B haga pero en el montón que lleva el signo contrario al que B escogió.

Solución del problema 18. Para cada número hay 7 fichas que tienen a ese mismo número. Tomemos un conjunto de 7 fichas que tengan en común a un mismo número. Las parejas que se formen con fichas de este conjunto se podrán poner una seguida de la otra (empatándose con el número común). La cantidad de parejas que se pueden formar en este conjunto es de $\binom{7}{2} = 21$ (ver Teorema 9 del apéndice). De este tipo de conjuntos hay 7, uno por cada uno de los números del dominó. Afirmamos que las parejas que se formen en dos conjuntos distintos, son distintas (como parejas). En efecto, supongamos que hay dos fichas del conjunto que tienen al número a en común y que también pertenecen al conjunto que tienen al número b en común. Entonces, ambas fichas tienen al número a y al número b, es decir, son la misma ficha, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, las parejas que se formen en cada uno de los conjuntos son distintas. Como las parejas no se repiten entre conjuntos, todas las maneras en que podemos formar parejas que cumplan que las fichas se pueden acomodar una después de la otra, van a ser el número de parejas en cada conjunto, es decir $7 \cdot \binom{7}{2} = 7(21) = 147$.

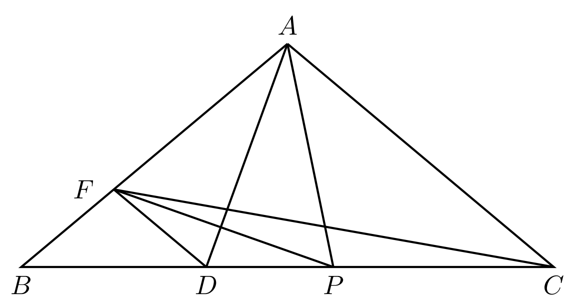
Solución alternativa. Hay dos tipos de fichas: las dobles (donde sus dos números son iguales) y las otras (donde sus dos números son distintos). De las dobles hay 7 y de las otras hay 21. Para una ficha doble, hay 6 fichas que sirven para hacer pareja. Y para cada una de las otras fichas, hay 12 fichas que sirven para hacer pareja. Como no importa el orden en que tomamos las fichas, debemos dividir entre 2 en cada caso. Luego, hay $\frac{7(6)}{2} + \frac{21(12)}{2} = 21 + 126 = 147$ maneras de elegir dos fichas de manera que se acomoden una seguida de la otra.

Solución del problema 19. Supongamos que sí es posible. Sea 2^r la mayor potencia de 2 menor o igual que m. Como $2008 = 2^3 \times 251$, la mayor potencia de 2 menor o igual que n debe ser 2^{r+3}. De aquí se sigue que $n > 4m$. Supongamos ahora que 3^s es la mayor potencia de 3 menor o igual que m. Entonces, la mayor potencia de 3 menor o igual que n debe ser también 3^s, ya que 3 no divide a 2008. Sin embargo, $n > 4m \geq 4 \times 3^s > 3^{s+1}$, que es una contradicción. Por lo tanto, no existen tales enteros positivos m y n.

Solución del problema 20. Como $AB = AC$ y $\angle CAB = 100°$, tenemos que:

$$\angle ABC = \angle BCA = 40°.$$

Ahora, $\angle CAD = \angle CDA = 70°$ ya que $AC = DC$, de modo que $\angle BAD = 30°$. Como FD es paralela a AC, tenemos que $\angle FDA = 70°$ y $\angle BDF = 40°$. Sea P el punto en el segmento CD tal que $\angle PAD = \angle FAD = 30°$. Entonces, $\angle PAC = 40°$ y de aquí $PA = PC$. Luego, los triángulos PAD y FAD son congruentes (ver Teorema 8 del apéndice), de modo que $AP = AF$. Como $\angle PAF = 60°$, tenemos que el triángulo PAF es equilátero. Luego, $\angle APF = 60°$ y $\angle FPD = 20°$. Además, $PF = PA = PC$. Por lo tanto, $\angle DCF = \angle PCF = \angle PFC = 10°$.



Problemas propuestos

En esta sección proponemos a los lectores los siguientes cinco problemas. Se clasificaron en *principiante* e *intermedio* porque se considera que son del nivel de un examen estatal y nacional, respectivamente. Invitamos a nuestros lectores a que nos envíen sus soluciones y nuevos problemas a la dirección `revistaomm@gmail.com`. Las mejores soluciones se publicarán en el siguiente número.

Problema 1. (Principiante) Determine el menor entero positivo que no se puede escribir en la forma:

$$\frac{2^a - 2^b}{2^c - 2^d}$$

para algunos enteros positivos a, b, c y d.

Problema 2. (Principiante) Determine todos los enteros positivos n que cumplan, para alguna elección adecuada de los signos, la igualdad:

$$n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm n^2.$$

Por ejemplo, $4 = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$ cumple. Pero 3 no, pues no hay manera de elegir los signos en $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2$ para obtener 3.

Problema 3. (Principiante) Sea ABC un triángulo con incentro I. La recta AI corta a BC en L y al circuncírculo del triángulo ABC en L'. Demuestre que los triángulos BLI y $L'IB$ son semejantes si y sólo si $AC = AB + BL$.

Problema 4. (Intermedio) Determine todos los enteros positivos t, x, y, z que satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} z + t &= xy, \\ zt &= x + y. \end{aligned}$$

Problema 5. (Intermedio) Considere un conjunto finito de n puntos en el plano tales que la distancia entre cualesquiera dos de ellos es al menos 1. Demuestre que hay a lo más $3n$ parejas de puntos a distancia 1.

Concurso Nacional 2008
22ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Del 16 al 22 de noviembre de 2008 se llevó a cabo en San Carlos, Sonora, el Concurso Nacional de la 22ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de todos los estados de la República. Los 16 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Hernández González Flavio (Aguascalientes)
Arreola Gutiérrez Fernando Ignacio (Aguascalientes)
López Buenfil Manuel Guillermo (Chihuahua)
Dosal Bustillos Manuel Enrique (Chihuahua)
Vázquez García Josué Isaí (Chihuahua)
Isaías Castellanos Luis Ángel (Colima)
Nicolás Cardona Francisco Manuel (Distrito Federal)
Rodríguez Angón César Ernesto (Distrito Federal)
Blanco Sandoval Bruno (Morelos)
Bibiano Velasco César (Morelos)
Carvantes Barrera Nestor (Morelos)
Perales Anaya Daniel (Morelos)
Vera Garza José Carlos (Nuevo León)
Gallegos Baños Erik Alejandro (Oaxaca)
Castro Ramírez Raúl Arcadio (San Luis Potosí)
Perera Angulo Jhonatan (Yucatán)

Los 10 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Hernández González Flavio (Aguascalientes)

Dosal Bustillos Manuel Enrique (Chihuahua)
De la Torre Sáenz Karina Patricia (Chihuahua)
Garza Vargas Jorge (Distrito Federal)
Perales Anaya Daniel (Morelos)
Vera Garza José Carlos (Nuevo León)
Roque Montoya Diego Alonso (Nuevo León)
Ríos Velázquez Mónica del Carmen (Nuevo León)
Añorve López Fernando Josafath (Nuevo León)
Guardiola Espinosa José Ramón (San Luis Potosí)

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el Concurso Nacional de la 22^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

1. Morelos
2. Chihuahua
3. Yucatán
4. Nuevo León
5. Sonora
6. San Luis Potosí
7. Tamaulipas
8. Colima
9. Baja California
10. Jalisco

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó Copa "Maaso yeye'eme" y fue ganado por Chihuahua. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, Baja California Sur y Campeche, respectivamente.

A continuación presentamos los problemas del Concurso Nacional 2008. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Examen del Concurso Nacional 2008

Problema 1. Sean $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \cdots < d_k = n$ los divisores del entero positivo n. Encuentra todos los números n tales que $n = d_2^2 + d_3^3$.

(Sugerido por Fernando Campos García)

Problema 2. Considera una circunferencia Γ, un punto A fuera de Γ y las tangentes AB, AC a Γ desde A, con B y C los puntos de tangencia. Sea P un punto sobre el segmento AB, distinto de A y de B. Considera el punto Q sobre el segmento AC tal que PQ es tangente a Γ, y a los puntos R y S que están sobre las rectas AB y AC, respectivamente, de manera que RS es paralela a PQ y tangente a Γ. Muestra que el producto de las áreas de los triángulos APQ y ARS no depende de la elección del punto P.

(Sugerido por Jesús Jerónimo Castro)

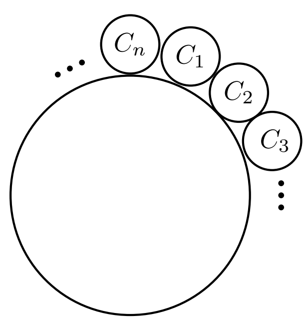
Problema 3. Considera un tablero de ajedrez. Los números del 1 al 64 se escriben en las casillas del tablero como en la figura:

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Se disponen de suficientes caballos de ajedrez para colocarlos en las casillas del tablero de manera que no se ataquen entre sí. Calcula la suma de los números de las casillas donde están colocados los caballos. ¿Cuál es la suma máxima que puedes obtener?
Nota. Dos caballos se atacan entre sí, cuando se encuentran en 2 esquinas opuestas de un rectángulo de 2×3 ó de 3×2.

(Sugerido por Efrén Pérez Terrazas y Juan Diego López Magaña)

Problema 4. Los caballeros del Rey Arturo $C_1, C_2, \ldots, C_n$ se sientan en una mesa redonda de la siguiente manera:



El rey decide realizar un juego para premiar a uno de sus caballeros. Iniciando con C_1 y avanzando en el sentido de las manecillas del reloj, los caballeros irán diciendo los números $1, 2, 3$, luego $1, 2, 3$ y así sucesivamente (cada caballero dice un número). Cada caballero que diga 2 ó 3 se levanta inmediatamente y el juego continúa hasta que

queda un sólo caballero, *el ganador*.
Por ejemplo, si $n = 7$, los caballeros dirán $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1$ en la primera vuelta, después C_1 dirá 2 y C_4 dirá 3 y gana entonces el caballero C_7.
Encuentra todos los valores de n de tal manera que *el ganador* sea el caballero C_{2008}.

(Sugerido por Fernando Campos García)

Problema 5. En los vértices de un cubo están escritos 8 enteros positivos distintos, uno en cada vértice, y en cada una de las aristas del cubo está escrito el máximo común divisor de los números que están en los 2 vértices que forman la arista. Sean A la suma de los números escritos en las aristas y V la suma de los números escritos en los vértices.
(a) Muestra que $\frac{2}{3}A \leq V$.
(b) ¿Es posible que $A = V$?

(Sugerido por Juan Antonio Ríos Briceño)

Problema 6. Las bisectrices internas de los ángulos A, B y C de un triángulo ABC concurren en I y cortan al circuncírculo de ABC en L, M y N, respectivamente. La circunferencia de diámetro IL, corta al lado BC, en D y E; la circunferencia de diámetro IM corta al lado CA en F y G; la circunferencia de diámetro IN corta al lado AB en H y J. Muestra que D, E, F, G, H, J están sobre una misma circunferencia.

(Sugerido por José Antonio Gómez Ortega)

Solución del Examen del Concurso Nacional 2008

Solución del problema 1. Como $d_2 \mid n$ y $d_2 \mid d_2^2$ entonces $d_2 \mid d_3^3$, pero d_2 es primo ya que es el divisor más pequeño de n distinto de 1. Entonces $d_2 \mid d_3$, por lo que $d_3 = kd_2$ para algún entero $k > 1$. Como $kd_2 \mid n$ entonces $k \mid n$. Si $k > d_2$ entonces hay un divisor de n entre d_2 y d_3, una contradicción y si $k < d_2$ entonces hay un divisor de n entre d_1 y d_2 también una contradicción. Por lo tanto $k = d_2$, de donde $d_3 = d_2^2$ y entonces $n = d_2^2 + d_2^6 = d_3(1 + d_3^2)$. Pero como d_3 y $d_3^2 + 1$ son de distinta paridad resulta que n es par. Luego $d_2 = 2$ y entonces $n = 2^2 + 2^6 = 68$. Desde luego $n = 68$ satisface las condiciones, ya que para 68 se tiene que $d_2 = 2$ y $d_3 = 4$.

Solución alternativa. Supongamos que n es impar. Entonces cada uno de sus divisores debe ser impar. En particular d_2 y d_3, pero entonces $n = d_2^2 + d_3^3$ es par, una contradicción. Luego n es par y entonces $d_2 = 2$. Como n es par y d_2 también, d_3 debe ser par. Luego $4 \mid d_2^2$ y $4 \mid d_3^3$ y entonces $4 \mid n$. Pero como d_3 es el siguiente divisor de n más pequeño, d_3 es menor o igual a 4. Pero d_3 no puede ser 3 ya que d_3 es par. Luego $d_3 = 4$. Por lo tanto $n = 2^2 + 4^3 = 68$.

Solución del problema 2. Denotemos por (XYZ) al área del triángulo XYZ. Sea P un punto arbitrario sobre el segmento AB, y sean $\angle PAQ = 2\alpha$, $\angle APQ = 2\beta$ y $\angle AQP = 2\theta$. Sean O y r el centro y el radio, respectivamente, de la circunferencia dada. Sabemos que $\angle ARO = \beta$, además, como $\angle PQO = \alpha + \beta$ tenemos que $\angle AOQ = \beta$. Con esto, hemos obtenido que los triángulos ARO y AOQ son semejantes. De aquí se sigue que:

$$\frac{AR}{AO} = \frac{AO}{AQ},$$

lo que a su vez implica que $AR \cdot AQ = AO^2$. Análogamente, obtenemos que $AS \cdot AP = AO^2$. Multiplicando estas dos expresiones tenemos:

$$AR \cdot AQ \cdot AS \cdot AP = AO^4.$$

Si ahora, multiplicamos ambos lados por $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2(2\alpha)$ tenemos:

$$\frac{1}{2}AP\cdot AQ\cdot \operatorname{sen}(2\alpha)\cdot \frac{1}{2}AR\cdot AS\cdot \operatorname{sen}(2\alpha)=\frac{1}{4}AO^4\cdot \operatorname{sen}^2(2\alpha),$$

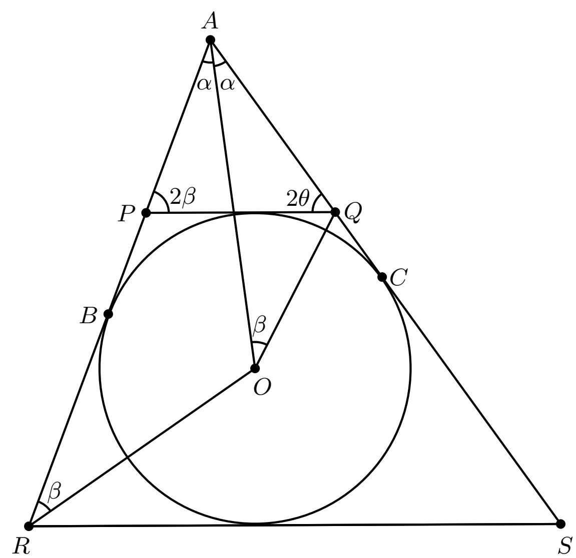
es decir:

$$(APQ)\cdot(ARS)=\frac{1}{4}AO^4\cdot \operatorname{sen}^2(2\alpha).$$

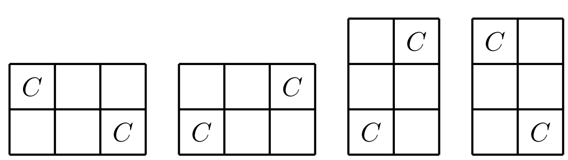
Como el ángulo 2α y AO son valores constantes, tenemos que:

$$(APQ)\cdot(ARS)$$

es constante, es decir, no depende de la elección del punto P.



Solución del problema 3. Dos caballos se atacan si están dispuestos de alguna de las cuatro maneras siguientes:



Consideremos la cuarta parte del tablero, la superior izquierda:

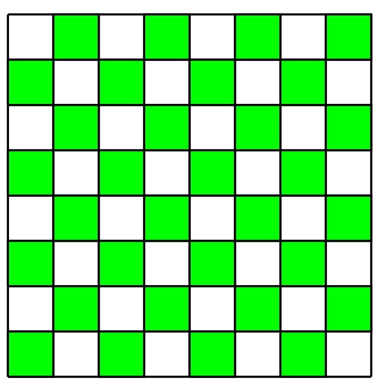
1	2	3	4
9	10	11	12
17	18	19	20
25	26	27	28

En ella cada caballo que esté en alguna casilla 1_a ataca a cualquier caballo que esté en alguna casilla 1_b y viceversa. Análogamente, cada caballo que esté en alguna casilla 2_a, 3_a, 4_a ataca a cualquier caballo que esté en alguna casilla 2_b, 3_b, 4_b, respectivamente y viceversa.

1_a	4_b	2_a	3_b
2_b	3_a	1_b	4_a
4_a	1_b	3_a	2_b
3_b	2_a	4_b	1_a

1	2	3	4
9	10	11	12
17	18	19	20
25	26	27	28

Además la suma de los dos números en casillas con el mismo número y la misma letra, es la misma, 29 y dos caballos en casillas a no se atacan entre sí, ni dos caballos en casillas b, por lo que para lograr la suma mayor hay que colocar caballos en todas las casillas a (o b). Lo mismo pasa en las otras cuartas partes. Note que las casillas a son las blancas y las b son las negras y que dos caballos en casillas del mismo color no se atacan entre sí:



Por lo tanto, la suma máxima es:

$$\frac{1}{2}(1+2+\cdots+64)=\frac{1}{2}\left(\frac{64\cdot 65}{2}\right)=16\cdot 65=1040.$$

Aproximaciones: Los siguientes acomodos en un cuadrado de 4×4 (y sus girados en $90°$) sirven para tener 8 caballos que no se atacan y con suma máxima, pero estos no se "pegan bien" en el tablero completo.

1	2	3	4
25	26	27	28

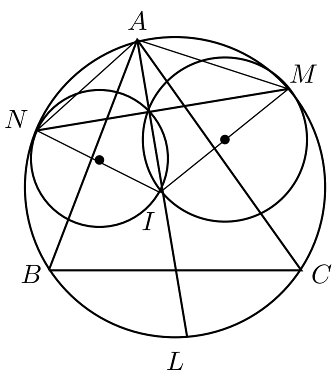
1	2		4
9			
			20
25		27	28

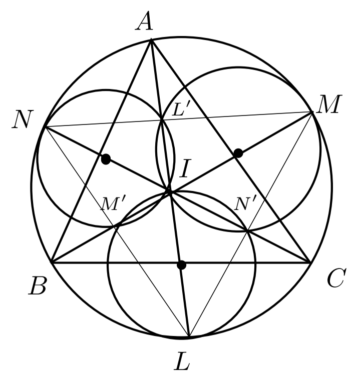
Solución del problema 4. El caballero que gana debe decir 1 en todos sus turnos, hasta que quede solo. La primera vez que le toca decir un número, para que pueda decir 1, tiene que estar en un lugar de la forma $3m+1$ y como $2008 = 3(669)+1$, tenemos que el caballero que está en el lugar 2008 sí dice 1 la primera vez. La segunda vez puede volver a decir 1, si cuando dijo 1 la primera vez quedaban un múltiplo de 3 de caballeros sentados. En general puede decir 1 si al decir 1 la vez anterior quedaban un múltiplo de 3 de caballeros sentados. Por tanto gana el caballero que ocupa el lugar 2008, si y sólo si, al decir la primera vez 1, quedan 3^k o $2(3^k)$ caballeros sentados, donde $k \geq 1$. Como antes de decir 1 el caballero del lugar 2008 se han retirado $2\frac{2007}{3} = 1338$ caballeros, para que gane dicho caballero, si inicialmente había n caballeros, debe suceder que $n - 1338$ sea igual a 3^k o a $2 \cdot 3^k$ para algún entero positivo k; por lo que n es de la forma $1338 + 3^k$ con $k \geq 6$ o de la forma $1338 + 2 \cdot 3^k$ con $k \geq 6$, ya que hay que garantizar que $n > 2008$.

Solución del problema 5. (a) Como $(a, b) \leq a$ y $(a, b) \leq b$, se tiene que $2(a, b) \leq a + b$, y como cada vértice es extremo de 3 aristas (o cada vértice es adyacente a otros 3) se tiene que $2A \leq 3V$.
(b) Si a y b, con $a < b$, son dos de los números escritos en vértices adyacentes del cubo, se tiene que, $(a, b) \leq a$ y $(a, b) \leq \frac{b}{2}$ ($b = (a, b)k$ con $k \geq 1$, pero $k = 1$ no es posible por ser $a < b$, luego $k \geq 2$), por lo que $3(a, b) \leq a + b$. Sumando estas 12 desigualdades obtenemos que $A \leq V$ y la igualdad se da si y sólo si $(a, b) = \frac{a+b}{3}$, para cada par de números a, b que estén en los vértices de una arista del cubo. Pero entonces el mayor de entre a y b es el doble del menor. Supongamos que $a = 2b$. Si c y d son los números en los otros dos vértices adyacentes al que se encuentra b, tenemos también que c y d son el doble de b o la mitad de b. Si ambos c y d son la mitad de b o el doble de b, entonces $c = d$; y si uno de ellos es igual al doble de b, digamos c, y d es igual a la mitad de b, entonces $d = a$. En cualquier caso tenemos una contradicción al hecho de que los números son diferentes. Por lo tanto, no es posible que $A = V$.

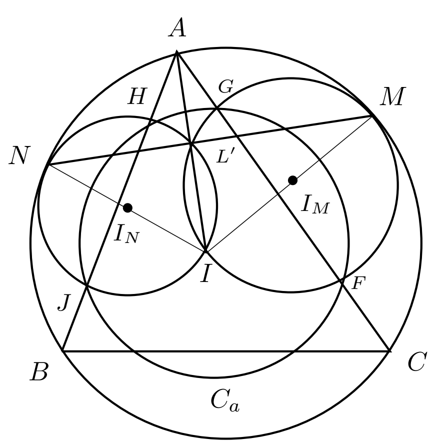
Solución del problema 6. Primero notemos que el triángulo AIM es isósceles, el ángulo $\angle IAM = \frac{A+B}{2}$, por abrir el arco $\widehat{LM} = \frac{\widehat{BC}}{2} + \frac{\widehat{CA}}{2}$ y $\angle AIM = \frac{A+B}{2}$ por ser ángulo externo en el vértice I del triángulo AIB. Análogamente AIN es isósceles con $AN = NI$. Por lo que MN es la mediatriz de AI. Luego si L' es el otro punto común de las circunferencias de diámetros IM e IN, se tiene que $\angle IL'M = \angle IL'N = 90°$, por lo que M, L' y N son colineales, MN es perpendicular a AI en L' y L' es el punto medio de AI.

Análogamente N, M' y L son colineales, NL es perpendicular a BI en M' y M' es el punto medio de BI y también L, N' y M son colineales, LM es perpendicular a CI en N' y N' es el punto medio de CI.



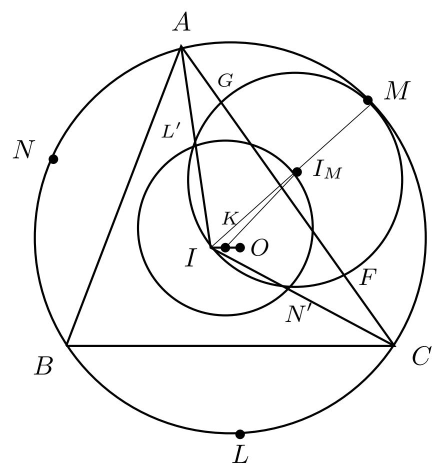


Esto muestra que AI es el eje radical de las circunferencias (I_M) e (I_N), luego $AF \cdot AG = AH \cdot AJ$, por lo que F, G, H, J están en una circunferencia C_a. Análogamente H, J, D, E están en una circunferencia C_b y D, E, F, G están en una circunferencia C_c.



Primera forma de terminar. Claramente si dos de las tres circunferencias C_a, C_b, C_c coinciden entonces coinciden las tres y terminaríamos. Ahora, las tres circunferencias deben coincidir ya que si por ejemplo $C_a \neq C_b$, entonces el eje radical de ellas es AB, si $C_b \neq C_c$ su eje radical es BC y si $C_c \neq C_a$ su eje radical es CA, pero estos tres ejes radicales no son concurrentes, lo que es una contradicción a la existencia del centro radical.

Segunda forma de terminar. Fijémonos en el triángulo LMN, éste queda inscrito en la misma circunferencia que ABC. Como L', M', N' son los pies de las alturas, el punto I es el ortocentro de LMN, además los centros I_L, I_M, I_N de las circunferencias que determinan los 6 puntos del problema son los puntos medios de IL, IM, IN. Luego la circunferencia por L', M', N' es la circunferencia de los 9 puntos para LMN y ésta tiene centro en K el punto medio de IO. Veremos que K es el centro de una circunferencia que pasa por $DEFGHJ$, al comprobar que las mediatrices de DE, FG y HJ pasan todas por K.



La recta que une los centros K e I_M es perpendicular a $L'N'$ (ya que L' y N' son los puntos de intersección de las dos circunferencias) y como $L'N'$ es paralela a CA (por ser L' y N' puntos medios de AI y CI) se tiene que KI_M es perpendicular a CA y como I_M es punto de la mediatriz de FG se tiene KI_M es mediatriz de FG. Análogamente KI_N es mediatriz de HJ y KI_L es mediatriz de DE, por lo que D, E, F, G, H, J están en una circunferencia de centro K.

México en las Olimpiadas Internacionales de 2008

XX Olimpiada de la Cuenca del Pacífico

Desde 1991, los ganadores del Concurso Nacional participan anualmente en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico.
Durante el mes de marzo de 2008 se aplicó el examen de la XX Olimpiada de la Cuenca del Pacífico a todos los alumnos que en ese momento se encontraban en los entrenamientos nacionales. Dicho examen llega por correo, se aplica y se califica en México. Los mejores exámenes se enviaron a Corea para ser evaluados por el comité coreano. Los alumnos que obtuvieron medalla fueron: Aldo Pacchiano Camacho (Morelos), obtuvo medalla de oro; Eduardo Velasco Barreras (Sonora), Manuel Guillermo López Buenfil (Chihuahua), Marcelino Anguiano Chávez (Chihuahua) y Malors Emilio Espinoza Lara (Jalisco), obtuvieron medalla de bronce. México ocupó el lugar número 14 de 28 países participantes.

A continuación presentamos los problemas de la XX Olimpiada de la Cuenca del Pacífico. Los alumnos tuvieron 5 horas para resolverlos.

Problemas de la XX Olimpiada de la Cuenca del Pacífico

Problema 1. Sea ABC un triángulo con $\angle A < 60°$. Sean X y Y puntos en los lados AB y AC, respectivamente, tales que $CA + AX = CB + BX$ y $BA + AY = BC + CY$. Sea P un punto tal que las rectas PX y PY son perpendiculares a AB y AC, respectivamente. Muestra que $\angle BPC < 120°$.

Problema 2. Los estudiantes de una clase forman grupos de exactamente tres alumnos cada uno, tal que cualesquiera dos grupos distintos tienen a lo más un miembro en común. Muestra que, cuando hay 46 estudiantes en la clase, existe un conjunto de 10 estudiantes que no contiene algún grupo de los anteriores.

Problema 3. Sea Γ el circuncírculo del triángulo ABC. Una circunferencia que pasa por los puntos A y C intersecta a los lados BC y BA en D y E, respectivamente. Las rectas AD y CE intersectan a Γ nuevamente en G y H, respectivamente. Las rectas tangentes a Γ en A y C intersectan a la recta DE en L y M, respectivamente. Muestra que las rectas LH y MG se intersectan en Γ.

Problema 4. Considera la función $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, donde $\mathbb{N}_0$ es el conjunto de todos los enteros no negativos, definida por las siguientes condiciones:

(i) $f(0) = 0$, (ii) $f(2n) = 2f(n)$, (iii) $f(2n+1) = n + 2f(n)$ para toda $n \geq 0$.

(a) Encuentra los conjuntos $L = \{n|f(n) < f(n+1)\}$, $E = \{n|f(n) = f(n+1)\}$ y $G = \{n|f(n) > f(n+1)\}$.
(b) Para cada $k \geq 0$, encuentra una fórmula para $a_k = \text{máx}\{f(n)|0 \leq n \leq 2^k\}$ en términos de k.

Problema 5. Sean a, b, c enteros que satisfacen $0 < a < c - 1$ y $1 < b < c$. Para cada k, con $0 \leq k \leq a$, sea r_k, con $0 \leq r_k < c$, el residuo de kb al dividirlo entre c. Muestra que los dos conjuntos $\{r_0, r_1, r_2, \ldots, r_a\}$ y $\{0, 1, 2, \ldots, a\}$ son diferentes.

X Olimpiada Centroamericana y del Caribe

Del 4 al 9 de junio de 2008, se celebró en San Pedro Sula, Honduras, la X Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos:

- Fernando Ignacio Arreola Gutiérrez (Aguascalientes)
- Flavio Hernández González (Aguascalientes)
- Manuel Enrique Dosal Bustillos (Chihuahua)

Flavio obtuvo medalla de oro, Manuel Enrique obtuvo medalla de plata, y Fernando Ignacio obtuvo medalla de bronce. México ocupó el segundo lugar de 12 países participantes.

A continuación presentamos los problemas de la X Olimpiada Centroamericana y del Caribe. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problemas de la X Olimpiada Centroamericana y del Caribe

Problema 1. Determine el menor entero positivo N tal que la suma de sus dígitos sea 100 y la suma de los dígitos de $2N$ sea 110.

Problema 2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de centro O, tal que AC es diámetro, y al construir los paralelogramos $ABEO$ y $OCDF$, los puntos E y F tambien pertenecen a la circunferencia. Demuestre que $ABCD$ es un rectángulo.

Problema 3. Se tienen 2008 bolsas rotuladas del 1 al 2008, con 2008 ranas en cada una. Dos personas juegan alternadamente. Una jugada consiste en seleccionar una bolsa y sacar de ella la cantidad de ranas que se deseen (al menos 1), quedando en esta x ranas ($x \geq 0$). Después de cada jugada, de cada bolsa con número de rótulo mayor al de la bolsa seleccionada y que contenga más de x ranas, se escapan algunas hasta que queden x en la bolsa. Pierde el jugador que saque la última rana de la bolsa uno. Pruebe que uno de los jugadores tiene una estrategia ganadora y explíquela.

Problema 4. Cinco amigas tienen una peque na tienda que abre de lunes a viernes. Como cada día son suficientes dos personas para atenderla, deciden hacer un plan de trabajo para la semana, que especifique quienes trabajarán cada día, y que cumpla las dos condiciones siguientes: a) Cada persona trabajará exactamente dos días de la semana. b) Las 5 parejas asignadas para la semana deben ser todas diferentes. ¿De cuántas maneras se puede hacer el plan de trabajo? Ejemplo: Si las amigas son A, B, C, D y E un posible plan de trabajo sería: lunes A y B, martes A y D, miércoles B y E, jueves C y E, viernes C y D.

Problema 5. Halle un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales tal que $p(1) = 210$ y $(x + 10)p(2x) = (8x - 32)p(x + 6)$ para todo x real.

Problema 6. Sea ABC un triángulo. Se toman P en AB y Q en AC tal que $BPQC$ es cíclico. La circunferencia circunscrita al triángulo ABQ corta a BC de nuevo en S y la circunferencia circunscrita al triángulo APC corta a BC de nuevo en R, PR y QS se intersecan en L. Demuestre que la intersección de AL y BC no depende de la elección de P y Q.

XXIII Olimpiada Iberoamericana

Del 18 al 28 de septiembre de 2008 se llevó a cabo la XXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas en Salvador de Bahía, Brasil. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos:

- Luis Ángel Isaías Castellanos (Colima)
- Manuel Guillermo López Buenfil (Chihuahua)
- José Luis Alvarez Rebollar (Michoacán)
- Eduardo Velasco Barreras (Sonora)

Eduardo obtuvo medalla de oro, y Luis Ángel, Manuel Guillermo y José Luis obtuvieron medalla de bronce. México ocupó el sexto lugar de 21 países participantes.

A continuación presentamos los problemas de la XXIII Olimpiada Iberoamericana. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problemas de la XXIII Olimpiada Iberoamericana

Problema 1. Se distribuyen los números $1, 2, 3, \ldots, 2008^2$ en un tablero de 2008×2008, de modo que en cada casilla haya un número distinto. Para cada fila y cada columna del tablero se calcula la diferencia entre el mayor y el menor de sus elementos. Sea S la suma de los 4016 números obtenidos. Determine el mayor valor posible de S.

Problema 2. Sean ABC un triángulo escaleno y r la bisectriz externa del ángulo $\angle ABC$. Se consideran P y Q los pies de las perpendiculales a la recta r que pasa por A y C, respectivamente. Las rectas CP y AB se intersectan en M y las rectas AQ y BC se intersectan en N. Demuestre que las rectas AC, MN y r tienen un punto en común.

Problema 3. Sean m y n enteros tales que el polinomio $P(x) = x^3 + mx + n$ tiene la siguiente propiedad: si x e y son enteros y 107 divide a $P(x) - P(y)$, entonces 107 divide a $x - y$. Demuestre que 107 divide a m.

Problema 4. Demuestre que no existen enteros positivos x e y tales que:

$$x^{2008} + 2008! = 21^y.$$

Problema 5. Sean ABC un triángulo y X, Y, Z puntos interiores de los lados BC, AC, AB respectivamente. Sean A', B', C' los circuncentros correspondientes a los triángulos AZY, BXZ, CYX. Demuestre que:

$$(A'B'C') \geq \frac{(ABC)}{4}$$

y que la igualdad se cumple si y sólo si las rectas AA', BB', CC' tienen un punto en común.
Observación: Para un triángulo cualquiera RST, denotamos su área por (RST).

Problema 6. En un partido de *biribol* se enfrentan dos equipos de cuatro jugadores cada uno. Se organiza un torneo de biribol en el que participan n personas, que forman equipos para cada partido (los equipos no son fijos). Al final del torneo se observó que cada dos personas disputaron exactamente un partido en equipos rivales. ¿Para qué valores de n es posible organizar un torneo con tales características?

49ª Olimpiada Internacional

Del 10 al 19 de julio de 2008 se llevó a cabo la 49^a Olimpiada Internacional de Matemáticas en Madrid, España, con la participación de 97 países. La delegación que representó a México estuvo integrada por los alumnos:

- Manuel Guillermo López Buenfil (Chihuahua)
- Malors Emilio Espinoza Lara (Jalisco)
- Rodrigo Mendoza Orozco (Jalisco)
- Aldo Pacchiano Camacho (Morelos)
- Andrés Campero Nuñez (Morelos)
- Manuel Novelo Puc (Yucatán)

Aldo obtuvo medalla de plata, Manuel Guillermo obtuvo medalla de bronce, y Malors Emilio, Rodrigo, Andrés y Manuel obtuvieron mención honorífica. México ocupó el lugar número 37.

A continuación presentamos los problemas de la 49^a Olimpiada Internacional. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problemas de la 49ª Olimpiada Internacional

Problema 1. Un triángulo acutángulo ABC tiene ortocentro H. La circunferencia con centro en el punto medio de BC que pasa por H corta a la recta BC en A_1 y A_2. La circunferencia con centro en el punto medio de CA que pasa por H corta a la recta CA en B_1 y B_2. La circunferencia con centro en el punto medio de AB que pasa por H corta a la recta AB en C_1 y C_2. Demostrar que $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ están sobre una misma circunferencia.

Problema 2. (a) Demostrar que:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1 \tag{6}$$

para todos los números reales x, y, z, distintos de 1, con $xyz = 1$.
(b) Demostrar que existen infinitas ternas de números racionales x, y, z, distintos de 1, con $xyz = 1$ para los cuales la expresión (6) es una igualdad.

Problema 3. Demostrar que existen infinitos números enteros positivos n tales que $n^2 + 1$ tiene un divisor primo mayor que $2n + \sqrt{2n}$.

Problema 4. Hallar todas las funciones $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ (es decir, las funciones f de los números reales positivos en los números reales positivos) tales que:

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

para todos los números reales positivos w, x, y, z, que satisfacen $wx = yz$.

Problema 5. Sean n y k enteros positivos tales que $k \geq n$ y $k - n$ es par. Se tienen $2n$ lámparas numeradas $1, 2, \ldots, 2n$, cada una de las cuales puede estar encendida o apagada. Inicialmente todas las lámparas están apagadas. Se consideran sucesiones de *pasos*: en cada paso se selecciona exactamente una lámpara y se cambia su estado (si está apagada se enciende, si está encendida se apaga).
Sea N el número de sucesiones de k pasos al cabo de los cuales las lámparas $1, 2, \ldots, n$ quedan todas encendidas, y las lámparas $n + 1, \ldots, 2n$ quedan todas apagadas.
Sea M el número de sucesiones de k pasos al cabo de los cuales las lámparas $1, 2, \ldots, n$ quedan todas encendidas, y las lámparas $n+1, \ldots, 2n$ quedan todas apagadas sin haber sido nunca encendidas.
Calcular la razón $\frac{N}{M}$.

Problema 6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que las longitudes de los lados BA y BC son diferentes. Sean ω_1 y ω_2 las circunferencias inscritas dentro de los triángulos ABC y ADC respectivamente. Se supone que existe una circunferencia ω tangente a la prolongación del segmento BA a continuación de A y tangente a la prolongación del segmento BC a continuación de C, la cual también es tangente a las rectas AD y CD. Demostrar que el punto de intersección de las tangentes comunes exteriores de ω_1 y ω_2 está sobre ω.

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas para el primer trimestre del año 2009.

Del 5 al 15 de febrero de 2009 en Morelia, Michoacán

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes de entrenamiento.

Primera quincena de febrero

Envío de material a los estados: primer número de la revista Tzaloa, convocatoria, tríptico y nombramiento de delegado.

Primera quincena de marzo

Envío a los estados del primer examen de práctica propuesto por el Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Del 19 al 29 de marzo en el Distrito Federal

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de dos exámenes de entrenamiento y del examen de la XXII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

20 y 21 de marzo

Aplicación, en los estados resgistrados con este propósito, del primer examen de práctica propuesto por el Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Apéndice

Teorema 1 (Criterios de divisibilidad) *Un número entero es divisible:*

- *entre 2, si el dígito de sus unidades es un número par.*
- *entre 3, si la suma de sus dígitos es divisible entre 3.*
- *entre 4, si el número formado por los dos últimos dígitos (el de las unidades y el de las decenas) es divisible entre 4.*
- *entre 5, si el dígito de las unidades es 5 ó 0.*
- *entre 6, si es divisible entre 2 y 3.*
- *entre 7, si lo es también el número de dos dígitos que obtengamos con el siguiente proceso: tomamos el dígito de las unidades y lo duplicamos; el resultado se lo restamos al número original sin el dígito de las unidades; repetimos el proceso hasta obtener un número de dos dígitos.*
- *entre 8, si el número formado por sus tres últimos dígitos es divisible entre 8.*
- *entre 9, si la suma de sus dígitos es divisible entre 9.*
- *entre 10, si el dígito de sus unidades es 0.*
- *entre 11, si obtenemos 0 o un múltiplo de 11 con el siguiente proceso: numeramos todos los dígitos del número de izquierda a derecha. Sumamos todos los dígitos que ocupan un lugar par en el número y le restamos la suma de todos los dígitos que ocupan una posición impar en el número.*

Teorema 2 (Teorema de Pitágoras) *Si ABC es un triángulo rectángulo con ángulo recto en C, entonces $AB^2 = BC^2 + CA^2$. El recíproco del Teorema de Pitágoras también es cierto, es decir, si en un triángulo ABC se cumple que $AB^2 = BC^2 + CA^2$, entonces el triángulo es rectángulo con ángulo recto en C.*

Teorema 3 (Teorema de Thales) *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre AB y CA respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y sólo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$. En particular, la recta que une los puntos medios de los lados de un triángulo, es paralela al lado opuesto y mide la mitad de ese lado.*

Definición 4 (Puntos y rectas notables de un triángulo) *Mediana. Recta que une un vértice y el punto medio del lado opuesto.*
Centroide. Punto donde concurren las medianas. También se le llama gravicentro o baricentro.
Mediatriz. Recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.
Circuncentro. Punto donde concurren las mediatrices.
Bisectriz interna. Recta que divide a un ángulo interior de un triángulo en dos ángulos de la misma medida.
Incentro. Punto donde concurren las bisectrices internas.
Altura. Recta trazada desde un vértice que es perpendicular al lado opuesto de dicho vértice.
Ortocentro. Punto donde concurren las alturas.

Teorema 5 (Circuncentro de un triángulo rectángulo) *El circuncentro de un triángulo rectángulo es el punto medio de su hipotenusa.*

Teorema 6 (Teorema de las Medianas) *Sea ABC un triángulo cuyas medianas son AD, BE y CF que se intersectan en el centroide O. Entonces,*

$$\frac{AO}{AD} = \frac{BO}{BE} = \frac{CO}{CF} = \frac{1}{3}.$$

Definición 7 (Triángulos congruentes) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si tienen sus tres ángulos iguales y sus tres lados iguales.*

Teorema 8 (Criterios de congruencia) *Dos triángulos son congruentes si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones:*
(1) (LAL) Tienen dos lados correspondientes iguales y el ángulo comprendido entre ellos igual.
(2) (ALA) Tienen dos ángulos correspondientes iguales y el lado comprendido entre ellos igual.
(3) (LLL) Tienen los tres lados correspondientes iguales.

Teorema 9 (Combinaciones) *Las formas de escoger k elementos de un conjunto de n elementos distintos, se llaman las combinaciones de n en k y es igual a:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, es el factorial de n.

Bibliografía

[1] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, *Geometría, ejercicios y problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[3] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Las Olimpiadas Matemáticas en San Luis Potosí 1987-2005*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2008.

[4] E. Gentile, *Aritmética Elemental*. Monografía No. 25 de la Serie de Matemáticas del Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico de la OEA. Ediciones de la OEA, 1988.

[5] R. Grimaldi, *Matemáticas Discretas y Combinatoria*. Addison-Wesley Iberoamericana, México 1989.

[6] V. Gusiev, V. Litvinenko, A. Mordkovich, *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Geometría)*. Editorial Mir, Moscú 1969.

[7] A. Illanes Mejía, *Principios de Olimpiada* en la colección *Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas*. Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2001.

[8] V. Litvinenko, A. Mordkovich, *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Algebra y Trigonometría)*. Editorial Mir, Moscú 1989.

[9] I. Niven, H. Zuckerman, *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[10] M. L. Pérez Seguí, *Combinatoria*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2000.

[11] M. L. Pérez Seguí, *Teoría de Números*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2003.

[12] H. Shariguin, *Problemas de Geometría*, Colección Ciencia Popular. Editorial Mir, Moscú 1989.

[13] N. Vilenkin, *¿De cúantas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Directorio

Directorio de los delegados estatales

Aguascalientes–*Laura Soledad Casillas Serna*

CECYTEA, Plantel Morelos,
Área de Matemáticas y Física de Ingeniería
Chichen-Itzá s/n, Cd. Satélite Morelos,
Rincón 505, Colonia Guadalupe,
C.P. 20059, Aguascalientes, Aguascalientes.
Tel. (449) 918 46 67
Cel. (449) 414 13 85
lscasillass@yahoo.com.mx
www.ommags.com

Baja California–*Carlos Yee Romero*

Universidad Autónoma de Baja California,
Facultad de Ciencias
Km. 103 Carretera de Tijuana-Ensenada,
Unidad Universitaria,
C.P. 22860, Ensenada, Baja California.
Tel. (646) 174 59 25, ext. 116
Fax (646) 174 45 60
cyeer@uabc.mx

Baja California Sur–*Edgar Netzahualcóyotl Soriano Arellano*

Instituto Mar de Cortés
Márquez de León 666, entre Altamirano y Gómez Farías, Col. Centro,
C.P. 23000, La Paz, Baja California Sur.
Tel. y Fax (612) 123 22 02
netza_soriano@hotmail.com
direccion@institutomardecortes.edu.mx

Campeche–*Javier Gan Torres*

Centro Tecnológico del Mar 02, Campeche
Antigua Carretera a Campeche-Hampolol, km 1.0
C.P. 24085, Campeche, Campeche.
Tel. (981) 815 39 78 y Tel. casa (981) 817 08 37
keroto@prodigy.net.mx

Chiapas–*María del Rosario Soler Zapata*

Universidad Autónoma de Chiapas,
Facultad de Ingeniería,
Boulevard Belisario Domínguez km 1081,
C.P. 29000, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.
Tel. (961) 615 05 27
msolerza@unach.mx mrsolerz@yahoo.com.mx

Chihuahua–*David Cossío Ruiz*

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
Instituto de Ingeniería y Tecnología
Av. del Charro 450 Norte
C.P. 32310, Cd. Juárez, Chihuahua.
Tel. (656) 688 48 87
Fax (656) 688 48 13
sirio11@gmail.com
www.ommch.org

Coahuila–*Silvia del Carmen Morelos Escobar*

Universidad Autónoma de Coahuila,
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Edif. D, Unidad Camporredondo,
C.P. 25000, Saltillo, Coahuila.
Tel. (844) 414 47 39 y (844) 411 82 57
Fax (844) 411 82 57
Tel. casa (844) 431 34 85 y Tel. cel. (844) 437 72 19
smorelos@mate.uadec.mx
smorelos2002@yahoo.com.mx

Colima–*Ing. Martín Eliseo Isaías Ramírez*

Universidad de Colima, Facultad de Ciencias de la Educación,
Bernal Díaz del Castillo 340,
Col. Villa San Sebastián,
C.P. 28045, Colima, Colima.
Tel. (312) 316 11 35, ext. 47058
http://ommcolima.ucol.mx
ommcol@ucol.mx
martin_isaias@ucol.mx

Distrito Federal–*Luis Alberto Briseño Aguirre*

Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, cubículo 236,
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria,
C.P. 04510, México D.F.
Tel. (55) 56 22 48 68
Fax (55) 56 22 48 69
lba@hp.fciencias.unam.mx

Durango–*Armando Mata Romero*

Universidad Juárez del Estado de Durango,
Escuela de Matemáticas,
Av. Veterinaria 210, Col. Valle del Sur,
C.P. 34120, Durango, Durango.
Tel. y Fax (618) 130 11 39
armando@linux.ujed.mx

Guanajuato–*Ignacio Barradas Bribiesca*

Universidad de Guanajuato, CIMAT,
Lascuráin de Retana 5,
C.P. 36000, Guanajuato, Guanajuato.
Tel. (473) 732 00 06 ext. 2006
Fax (473) 732 57 49
barradas@cimat.mx

Guerrero–*Gonzalo Delgado Espinoza*

Universidad Autónoma de Guerrero,
Facultad de Matemáticas,
Calle Carlos E. Adame 54, Col. Garita,
C.P. 39650, Acapulco, Guerrero.
Tel. y Fax (744) 487 25 00
Tel. cel. (744) 430 92 54
deg_gonzalo@yahoo.com.mx

Hidalgo–*Anna Tarasenko*

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo,
Edif. Centro de Investigación en Matemáticas, Instituto de Ciencias Básicas,
Carretera Pachuca Tulancingo km. 4.5,
C.P. 42074, Mineral de la Reforma, Hidalgo.
Tel. (771) 717 21 58
Fax (771) 717 21 58
anataras@uaeh.edu.mx

Jalisco–*María Eugenia Guzmán Flores*

Universidad de Guadalajara
Centro Univ. de Ciencias Exactas e Ingeniería, Departamento de Matemáticas,
Av. Revolución 1500, Edificio V, planta baja,
C.P. 44420, Guadalajara, Jalisco.
Tel. y Fax (33) 36 19 95 52
floresguz55@yahoo.com.mx

Estado de México–*Olga Rivera Bobadilla*

Universidad Autónoma del Estado de México,
Facultad de Ciencias,
Instituto Literario No. 100, Col. Centro,
C.P. 50000, Toluca, Estado de México.
Tel. (722) 296 55 56
Fax (722) 296 55 54
orb@uaemex.mx
matematicas_olimpiada@yahoo.com.mx

Michoacán–*Armando Sepúlveda López*

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo,
Departamento de Matemática Educativa,
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Ciudad Universitaria,
C.P. 58060, Morelia, Michoacán.
Tel. (443) 326 21 46, ext. 130
Fax (443) 322 35 00, ext. 3063
asepulve@umich.mx

Morelos–*Larissa Sbitneva*

Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Facultad de Ciencias,
Av. Universidad 1001, Col. Chamilpa,
C.P. 62209, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
larissa@buzon.uaem.mx

Nayarit–*Francisco Javier Jara Ulloa*

Universidad Autónoma de Nayarit,
Secretaría de Educación Media y Superior,
Cd. de la Cultura, Amado Nervo,
C.P. 63157, Tepic, Nayarit.
Tel. (311) 211 88 00 ext. 8809 y (311) 214 21 45
jaraulloa@gmail.com

Nuevo León–*Alfredo Alanís Durán*

Universidad Autónoma de Nuevo León,
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas,
Del Colegio 1077,
Col. Valle de las Flores,
C.P. 66450, San Nicolás, Nuevo León.
Tel. (81) 83 29 40 30, ext. 6130 y (81) 83 13 16 26
Fax (81) 83 52 29 54
aalanis56@hotmail.com

Oaxaca–*Sara Carrillo Uribe*

Universidad Autónoma Benito Juárez de Oaxaca,
5 de mayo 111, esq. Morelos, Col. Centro,
C.P. 68000, Oaxaca, Oaxaca.
Tel. (951) 514 37 94 y (951) 514 87 50
mushe_wini@hotmail.com

Puebla–*María Araceli Juárez Ramírez*

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
San Claudio y Río Verde, Ciudad Universitaria,
C.P. 72570, Puebla, Puebla.
Tel. (222) 229 55 00 ext. 7578
Fax (222) 229 56 36
arjuarez@fcfm.buap.mx

Querétaro–*Patricia Isabel Spíndola Yañez*

Universidad Autónoma de Querétaro, Facultad de Ingeniería,
Cerro de las Campanas s/n,
Centro Universitario,
C.P. 76010, Querétaro, Querétaro.
Tel. (442) 192 12 00, ext. 6015
Fax (442) 192 12 00, ext. 6005
spindola@uaq.mx

Quintana Roo–*Alicia Ramón Barrios*

Colegio de Bachilleres,
Planteles Cancún 2 y Colegio Británico,
Región 236, Manzana 24, Lote 5
C.P. 77500, Cancún, Quintana Roo.
Tel. (998) 174 01 56
Fax (998) 888 72 04 y (998) 884 12 95
olimpiadasquintanaroo@hotmail.com

San Luis Potosí–*Eugenio Daniel Flores Alatorre*

Universidad Autónoma de San Luis Potosí,
Instituto de Física,
Av. Salvador Nava 6, Zona Universitaria,
C.P 78290, San Luis Potosí, San Luis Potosí.
Tel. (444) 826 23 62 al 65,
Fax (444) 813 38 74
floreseugenio@hotmail.com

Sinaloa–*Nicolás Pardo Viera*

Universidad Autónoma de Sinaloa,
Escuela de Ciencias Físico-Matemáticas,
Ciudad Universitaria,
C.P. 80010, Culiacán, Sinaloa.
Tel. y Fax (667) 716 11 54
pardo@uas.uasnet.mx

Sonora–*José María Bravo Tapia*

Universidad de Sonora,
Departamento de Matemáticas,
Av. Rosales y Boulevard Domínguez s/n, Col. Centro,
C.P. 83000, Hermosillo, Sonora.
Tel. (662) 259 21 55
Fax (662) 259 22 19
jmbravo@gauss.mat.uson.mx

Tabasco–*Antonio Guzmán Martínez*

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Unidad Chontalpa,
Km. 1 Carretera Cunduacán, Jalpa de Méndez,
C.P. 86690, Cunduacán, Tabasco.
Tel. y Fax (914) 336 09 28 y (914) 336 03 00
antonio.guzman@dacb.ujat.mx

Tamaulipas–*José Muñoz Delgado*

Universidad Autónoma de Tamaulipas,
Unidad Académica Multidisciplinaria de Ciencias, Educación y Humanidades,
Academia de Matemáticas,
Centro Universitario Adolfo López Mateos,
C.P. 871490, Cd. Victoria, Tamaulipas.
Tel. (834) 318 17 23
Cel. (899) 873 96 22
k5sur523@hotmail.com
k5sur523jmd@gmail.com

Tlaxcala–*José Erasmo Pérez Vázquez*

Universidad Autónoma de Tlaxcala,
Facultad de Ciencias Básicas,
Calzada a Apizaquito Km 1.5,
Apartado Postal 140,
C.P. 90300, Apizaco, Tlaxcala.
Tel. (241) 417 25 44,
Fax (241) 417 25 44 y (241) 417 58 44
erasmo@ingenieria.uatx.mx
joserasmo25@gmail.com

Veracruz–*Raquiel Rufino López Martínez*

Universidad Veracruzana, Facultad de Matemáticas,
Circuito Gonzalo Aguirre Beltrán s/n, Lomas del Estadio,
Zona Universitaria, Col. Centro,
Apartado Postal 270,
C.P. 91090, Xalapa, Veracruz.
Tel. (228) 818 24 53 y (228) 842 17 45
Fax (228) 818 24 53
ralopez@uv.mx
raquiel1971@yahoo.com.mx

Yucatán–*Didier Adán Solís Gamboa*

Universidad Autónoma de Yucatán,
Facultad de Matemáticas,
Periférico Norte Tablaje 13615,
Parque industrial, junto al local del FUTV,
C.P. 97110, Mérida, Yucatán.
Tel. (999) 942 31 47, ext 1102
Fax (999) 942 31 40
didier.solis@uady.mx
ommyuc@tunku.uady.mx

Zacatecas–*Alberto García Aguilar*

Universidad Autónoma de Zacatecas,
Unidad Académica de Matemáticas,
Camino a la Bufa s/n, intersección con Calzada Solidaridad,
C.P. 98068, Zacatecas, Zacatecas.
Tel. y Fax (492) 922 99 75 ext. 24
agarcia@mate.reduaz.mx
www.matematicas.reduaz.mx

Directorio del Comité Organizador de la OMM

Anne Alberro Semerena
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (777) 3 81 03 80
Fax (777) 3 29 70 40
aalberro@buzon.uaem.mx

Alejandro Bravo Mojica
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 48 68
Fax (55) 56 22 48 64
abm@hp.fciencias.unam.mx

Radmila Bulajich Manfrino
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
bulajich@servm.fc.uaem.mx

Gabriela Campero Arena
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 48 67
Fax (55) 56 22 48 66
gabriela@matematicas.unam.mx

José Antonio Climent Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 24 59 22
Fax (55) 56 22 48 59
jach@fciencias.unam.mx

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 49 25
Fax (55) 56 22 48 59
cobian@matematicas.unam.mx

Luis Cruz Romo
UPIITA, IPN
Av. Instituto Politécnico Nacional 2580
Col. Barrio la Laguna Ticomán
07340, México, D.F.
lucruz@ipn.mx

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Facultad de Matemáticas,
Universidad de Guanajuato,
Callejón Jalisco s/n,
Mineral de Valencia,
36240, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 01 40
marcant@cimat.mx

Jesús Jerónimo Castro
CIMAT
Apartado Postal 402,
36000, Guanajuato, Guanajuato.
Tel. (473) 7 32 71 55
Fax (473) 7 32 57 49
jeronimo@cimat.mx

Antonio Olivas Martínez
Magnolias no. 9
Col. Fuentes del Mezquital
83240, Hermosillo, Son.
Tel. Casa (662) 212 53 31
Cel. (662) 124 81 93
antonio_olivas_mtz@yahoo.com.mx
antoniolivas@correoa.uson.mx

Carlos Jacob Rubio Barrios
Universidad Autónoma de Yucatán
Periférico norte tablaje 13615
97119, Mérida, Yucatán
Tel. (999) 942-3140 al 49
Fax (999) 942-31-40
carlos.rubio@uady.mx
carlos.rubio@gmail.com

Pablo Soberón Bravo
Circuito Interior no. 830
Fracc. La Herradura
Col. La Herradura
62303, Cuernavaca, Morelos
Cel. (777) 134 55 49
bandrak@hotmail.com

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
rogelio@matcuer.unam.mx

Hugo Villanueva Méndez
Instituto de Matemáticas, UNAM
Cub. 4 de Becarios,
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria
Coyoacán 04510,
México, D.F.
Tel (55) 56 22 45 32
vill_hugo@hotmail.com
hvillan@matem.unam.mx

Elena Ruiz Velázquez
Altair no. 12
Col. Lomas de Palmira
62550, Cuernavaca, Mor.
Tel. (777) 320 54 39
Cel. (777) 133 39 83
eleniux@gmail.com
A00375640@itesm.mx

Carmen Sosa Garza
Facultad de Ingeniería, UAQ
Cerro de las Campanas s/n
Querétaro, Querétaro
Tel. (442) 1 92 12 64 ext. 121 ó 136
Fax (442) 1 92 12 646
carsg@uaq.mx

Carlos Vargas Obieta
Facultad de Matemáticas,
Universidad de Guanajuato
Callejón Jalisco s/n, Mineral de Valencia
36240, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 01 40
carlosv@cimat.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: omm@ciencias.unam.mx

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

http://www.omm.unam.mx/