TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2011, No. 1

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.omm.unam.mx

Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Impreso y hecho en México.
Enero de 2011.

Contenido

Presentación

Tzaloa, cuyo significado en Náhuatl es *aprender*, es una publicación periódica trimestral de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas y su objetivo es proporcionar materiales adecuados e información actualizada para estudiantes y profesores de nivel medio superior que se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que año con año se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Es así, que cada año se publican 4 números de Tzaloa y en cada uno de ellos aparecen: artículos de temas matemáticos útiles para la resolución de problemas, problemas nuevos y variados con sus correspondientes soluciones, problemas abiertos para que los lectores participen enviando sus soluciones, las preguntas y soluciones de los exámenes que se aplicaron en los últimos concursos internacionales donde México participó, así como la información siempre actualizada del calendario olímpico.

A pesar de que el objetivo principal de la revista es apoyar en la preparación de aquellos que participarán en concursos de matemáticas, consideramos que el contenido de Tzaloa es de interés para un público más amplio. Dado que la publicación se enfoca en la resolución de problemas y que concibe a la matemática como una disciplina creativa y dinámica, el material que contiene se distingue por fomentar el desarrollo del pensamiento lógico matemático. El enfoque centrado en los razonamientos, hace que el contenido presentado se exponga con todo rigor, pero al mismo tiempo de manera muy accesible, evitando siempre caer en formalismos excesivos o innecesarios. Debido a estas características y aunque no se tenga interés por participar en concursos, Tzaloa también ha mostrado ser valiosa tanto para profesores y estudiantes del nivel medio superior como para todo aquel interesado en el cultivo de esta apasionante disciplina.

Tzaloa, Año 2011, Número 1

Tzaloa cumple dos años y se renueva, para iniciar este 2011 damos la bienvenida a Marco Figueroa quien, a partir de ahora, se integra al comité editorial de la revista en sustitución de Ana Rechtman que, por motivos de formación profesional, ya no le es posible seguir trabajando de manera permanente con nosotros. Asimismo, queremos aprovechar la ocasión para agradecer a Ana por todo el entusiasmo y dedicación que siempre mostró, al mismo tiempo que le deseamos todo el éxito que se merece en su nueva empresa.

Con respecto al contenido de este primer número del año, destaca el artículo sobre *Cuadrados Mágicos* que preparó Radmila Bulajich. Aunque muchos de nosotros hemos tenido contacto con los cuadrados mágicos y a pesar de que estos se trabajan ocasionalmente en algunos textos, no existen muchas fuentes donde el tema se desarrolle con amplitud. En la mayoría de los textos los cuadrádos mágicos figuran como ejercicios ocasionales y suelen trabajarse tan sólo como curiosidades o divertimentos matemáticos. El artículo de Radmila, tiene la gran virtud de que en muy pocas páginas nos presenta un panorama muy completo del tema, mostrando cómo ha permeado a través de la historia y que, a pesar de que se ha estudiado desde épocas muy antiguas, hoy en día sigue teniendo muchas aspectos desonocidos y que son temas de investigación. Estamos seguros que nuestros lectores disfrutarán este material tanto como nosotoros lo hemos hecho.

Como siempre, en las diferentes secciones que integran la revista, podrás encontrar problemas interesantes y con disitntos niveles de dificultad, mismos que cuidadosamente hemos seleccionado. Asimismo, a través de sus notables contribuciones, la participación de nuestros lectores continua enriqueciendo esta publicación y cada día son más los trabajos que recibimos, destacándose todos ellos por su gran calidad. Esperamos que pronto podamos tener el gusto de publicar uno tuyo.

Por último, no omitimos mencionar que se han actualizado todas las secciones con información olímpica así como el directorio del Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Hace más de 24 años que la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Desde sus inicios, este programa se ha visto fortalecido gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

25ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 25^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1992. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2011-2012 y, para el 1° de julio de 2012, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.omm.unam.mx`

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

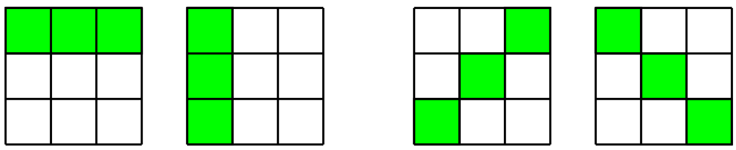
El Concurso Nacional de la 25^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 13 al 19 de noviembre de 2011 en San Luis Potosí, San Luis Potosí. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2012: la XXIV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, que se llevará a cabo en el mes de marzo; la XIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, que se celebrará en el mes de junio; la 53ª Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se llevará a cabo en julio en Argentina, y la XXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en el mes de septiembre en Bolivia.

Cuadrados Mágicos

Por Radmila Bulajich Manfrino

Nivel Básico

Un cuadrado mágico es una arreglo de N^2 casillas, donde N representa un entero positivo mayor o igual a 3, en el cual en cada una de las casillas encontramos un número entero distinto. La palabra mágico se refiere a que las sumas de los números en cada renglón, columna y diagonales (como se muestra en la figura), son las mismas.



Renglón Columna Diagonales

Aún cuando los números de un cuadrado mágico no son necesariamente números consecutivos, en este artículo únicamente trabajaremos con aquellos que tienen números consecutivos.
Si los números que acomodamos en el cuadrado mágico son los enteros positivos $1, 2 \ldots, N^2$, decimos que el cuadrado es de orden N, y su número mágico es igual a la suma de los números de cualquier renglón, columna o diagonal, es decir, es igual a

$$\frac{N(N^2+1)}{2}.$$

Este número lo podemos calcular fácilmente considerando la suma de todos los números y dividiéndolo entre el número de renglones o columnas, es decir,

$$\frac{1+2+\cdots+N^2}{N} = \frac{\frac{N^2(N^2+1)}{2}}{N} = \frac{N(N^2+1)}{2}.$$

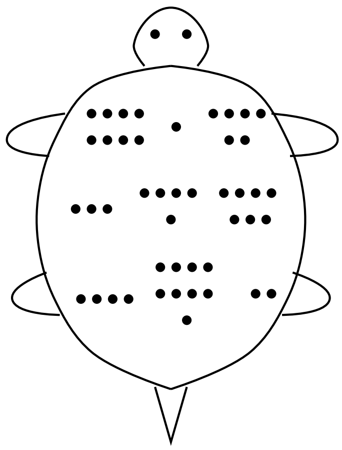
Por ejemplo, en el cuadrado de 3×3, el número mágico es $\frac{1+2+\cdots+9}{3} = \frac{3(9+1)}{2} = 15$.

Cuadrados mágicos de 3×3 tenemos solamente uno, si no contamos las rotaciones y reflexiones. Cuando N crece el número de cuadrados mágicos se incrementa rápidamente. En la siguiente tabla escribimos el número de cuadrados mágicos que se pueden construir dependiendo de N.

N	No. cuadrados mágicos distintos
3	1
4	808
5	$68,826,306$

En el año de 1693, los 808 cuadrados mágicos de 4×4 fueron publicados por el francés Bernard Frénicle de Bessy. En su estudio nunca utilizó métodos matemáticos propiamente dichos para crearlos sino que escribió la lista utilizando el "método de exhausión". No fue hasta 1973 que, gracias al desarrollo de las computadoras, Richard Shroeppel, matemático y programador, calculó que había $275,305,224$ cuadrados mágicos de 5×5. El número que aparece en la tabla difiere de éste ya que se eliminaron los cuadrados mágicos que son "iguales" por rotación o reflexión. No se tiene, siquiera, un número aproximado de cuántos cuadrados mágicos de 6×6 hay.

La historia de los cuadrados mágicos es muy antigua. Algunos de los cuadrados mágicos de 3×3 los podemos encontrar grabados en piedra o metal y fueron encontrados en India y China, alrededor del siglo III a.n.e. En un manuscrito, que data de 2200 a.n.e. en tiempos del Emperador Yu en China, hay una leyenda que dice que un día el Emperador paseando por el río encontró una tortuga nadando en el río y en su caparazón tenía una serie de puntos distribuidos de la siguiente manera



es decir, representando los puntos en el cuadrado mágico tenemos

8	1	6
3	5	7
4	9	2

La tortuga fue llevada al palacio y se convirtió en la tortuga más famosa de aquellos tiempos. Incluso esta historia fue conocida en Europa y muchas personas famosas la visitaron, matemáticos, reyes, filósofos etc.
No fue hasta el primer milenio de nuestra era que los cuadrados mágicos de 4×4 empiezan a ser conocidos por la sociedad en general. El primer registro que se tiene de cuadrado mágico de 4×4 es el que aparece en una inscripción, en el friso de una puerta, en Khajuraho, India y data del año 1100 d.n.e. Este cuadrado mágico además de cumplir que todos los renglones, columnas y diagonales suman lo mismo también sus diagonales cortadas suman lo mismo.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Estos cuadrados mágicos se conocen también con el nombre de diabólicos. Este cuadrado mágico tiene también otros patrones, por ejemplo, si sumamos los primeros dos renglones y los últimos dos renglones, o las primeras dos columnas y las últimas dos columnas obtenemos

9	25	9	25
25	9	25	9

19	15
15	19
19	15
15	19

Cornelius Agrippa (1486-1535) físico, astrólogo y teólogo, relacionó los cuadrados mágicos de 4×4 con Júpiter y se creía que estos cuadrados combatían la melancolía, probablemente esta es la razón por la cual Durero lo integró a su grabado.

Cuadrado mágico de Alberto Durero

Alberto Durero (1471-1528) de padres húngaros, nació en Nuremberg, Alemania, en una familia de dieciocho hermanos, y estaba destinado a seguir los pasos de su padre en el negocio de la joyería. A los trece años, en contra de la voluntad de su padre, decidió dedicarse a la pintura y poco después se convirtió en aprendiz de pintor. En 1490, Durero se dedicó a viajar y a desarrollar la idea de un arte basado en las matemáticas.

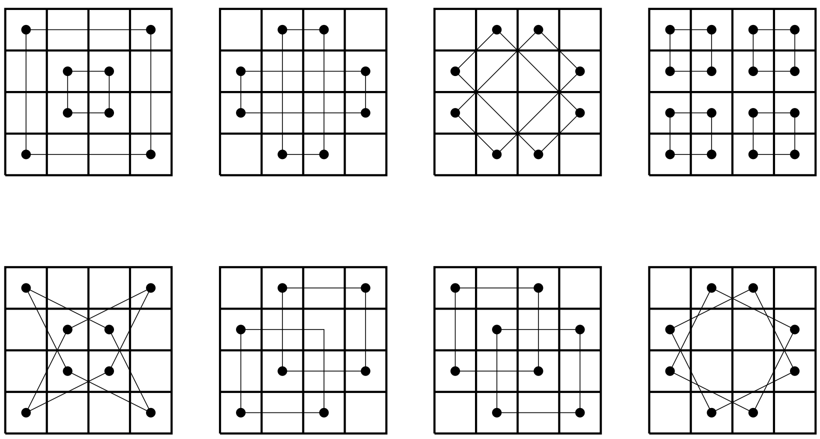
De regreso, en Nuremberg, estudió obras de matemáticos y artistas: Euclides, Vitruvio, Pacioli, Alberti entre otros. Alberto Durero es considerado por mucho el mejor de los artistas alemanes del Renacimiento, además, en 1523, finalizó su “Tratado de las proporciones”, pero el contenido matemático era demasiado elevado para los lectores, lo que le llevó a editar (1525) una obra más accesible, “Tratado sobre el medir”. Aparte de las primeras obras sobre aritmética comercial, éste fue el primer libro de matemáticas impreso en Alemania, por lo que Durero se convirtió en uno de los matemáticos más importantes del Renacimiento. La obra se centra en la geometría plana y en la descripción de objetos sólidos.

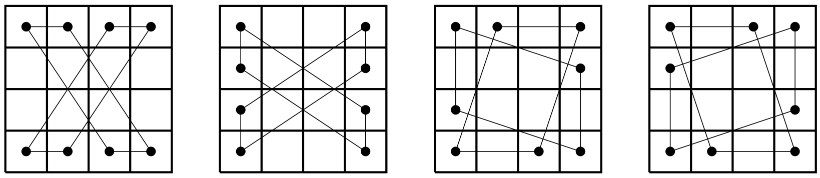
Ya siendo una persona con un gran reconocimiento, hizo su enigmático grabado “Melancolía I” (1514). En la parte superior derecha encontramos uno de los cuadrados mágicos de 4×4 más sorprendentes. Los dos números centrales en el último renglón son 15 y 14, si los juntamos 1514 nos indican el año en que Durero terminó su obra.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Los renglones, columnas y diagonales suman 34, además 34 es la suma de los números que están en las esquinas $(16 + 13 + 4 + 1)$ y del cuadrado central $(10 + 11 + 6 + 7)$. La suma de los números restantes es: $68 = 2 \times 34 = 12 + 8 + 3 + 2 + 5 + 9 + 15 + 14$.

Si dibujamos sobre el cuadrado mágico de Durero los siguientes cuadriláteros y sumamos los números que aparecen en los vértices de los mismos, marcados por puntos, podemos comprobar que todas las sumas son iguales a 34.





Otras características interesantes del cuadrado mágico de Durero que conviene resaltar son, por ejemplo: la suma de los cuadrados de los enteros en el primer y segundo renglón es igual a la suma de los cuadrados de los enteros en el tercer y cuarto renglón, es decir,

$$256+9+4+169+25+100+121+64 = 81+36+49+144+16+225+196+1 = 748.$$

Este número, 748, también es igual a

- la suma de los cuadrados de los enteros en el primer y tercer renglón,
- la suma de los cuadrados de los enteros en el segundo y cuarto renglón,
- la suma de los cuadrados de los enteros en las dos diagonales.

Todo esto también es cierto si intercambiamos los renglones por columnas.

Ahora bien, en este cuadrado también se observa otra bella simetría que consiste en sumar los números que aparecen en los primeros dos renglones y escribirlos en en el primer renglón y, sumar los números de los dos últimos renglones y colocarlos en el siguiente renglón, lo mismo hacemos con las columnas, y obtenemos

21	13	13	21
13	21	21	13

19	15
15	19
15	19
19	15

Existen otras simetrías en este cuadrado que no describiremos aquí, pero es interesante estudiarlas. Lo que varios historiadores se han preguntado es si Durero se dio cuenta de toda la belleza que había generado en su cuadrado.

¿Cómo construir cuadrados mágicos?

A lo largo de la historia se han elaborado varios métodos para construir cuadrados mágicos. Para utilizar estos métodos es importante ver los distintos tipos de cuadrados mágicos que podemos hacer:

- Cuadrados mágicos de orden impar, son los cuadrados mágicos donde N es un número impar, es decir, de la forma $2m+1$, con m un entero positivo.

- Cuadrados mágicos de orden par, que llamamos par sencillo, donde N es de la forma $2(2m+1)$, con m un entero mayor o igual a 0, es decir, el doble de un número impar. Observemos que los números que generamos aquí son los números pares que son divisibles entre 2 pero no entre 4.

- Cuadrados mágicos cuyo orden es doblemente par, que llamamos doble par, donde N es de la forma $2(2m)$, para m un entero, es decir, el doble de un número par. El número de cuadraditos en cada uno de los lados de los cuadrados se puede dividir entre 2 y 4.

Los métodos para construir cuadrados mágicos varían en complejidad. Los cuadrados mágicos más difíciles de construir son los de orden par sencillo. Empecemos construyendo cuadrados mágicos de orden impar. El método que se describe a continuación no funciona para construir los cuadrados mágicos de orden doblemente par o par sencillo.

Método de Loubère

En 1693, Simon de la Loubère sugirió un método para crear cuadrados de orden impar. Veamos por ejemplo una cuadrado mágico de orden 5.

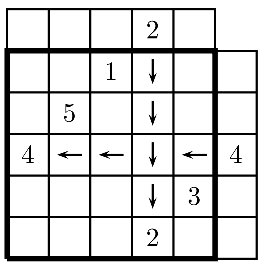
- Empezamos con el 1 en el cuadradito central superior.

- Colocamos números consecutivos en forma diagonal, avanzando hacia arriba y hacia la derecha, pero apenas alcanzamos el borde superior, escribimos el número en esa misma columna hasta abajo y continuamos llenando en diagonal.

- Cuando alcanzamos el borde derecho, los números se escriben en el mismo renglón pero en la parte izquierda.

- Cuando llegamos a un cuadradito que está ocupado, el número que corresponde se escribe debajo del último número que habíamos escrito.

- Por último cuando llegamos a la esquina superior derecha, hacemos lo mismo que en el paso anterior.



	18	25	2	9	
17	24	1	8	15	17
23	5	7	14	16	23
4	6	13	20	22	4
10	12	19	21	3	10
11	18	25	2	9	

Si rotamos el cuadrado o lo reflejamos respecto a una recta que lo divida en dos por su parte central, podemos generar 7 cuadrados mágicos más. Si el 1 lo colocamos en cualquier otro cuadradito se generan cuadrados que suman lo mismo en los renglones y columnas pero no en la diagonal.

Ahora describimos algunos métodos que se utilizan para llenar cuadrados de orden par sencillo o doblemente par, los cuales fueron desarrollados por Philippe La Hire y Alberto Durero.

Método de Philippe La Hire

El matemático francés Philippe La Hire (1640-1719) creó el método para llenar cuadrados mágicos de orden par sencillo. Él hace uso de dos cuadrados, que llamaremos A y B, y al sumar el número de cada uno de los cuadraditos respectivos obtenemos el cuadrado mágico.

Veamos cómo construir un cuadrado mágico de orden 6. En el cuadrado A llenamos la diagonal con los números del 1 al $N = 6$ empezando para una diagonal en el cuadradito superior derecho y para la otra en el cuadradito inferior derecho, es decir, empezamos a llenar las diagonales iniciando en el lado derecho del cuadrado. Todos los cuadraditos que quedan vacíos en la primera columna se llenan con el 6 o su "complemento" el número 1, como queramos. Aquí, la palabra complemento de un número se refiere al número $N - x + 1$, así por ejemplo, el complemento del 6 es $6 - 6 + 1 = 1$, el complemento del 5 es el $6 - 5 + 1 = 2$. Lo que tenemos que cuidar es que siempre haya la misma cantidad de dígitos 1 y de dígitos 6.

Ya que llenamos la primera columna, llenamos la sexta con el complemento de lo que tenemos en la primera. Para completar la segunda y quinta columnas colocamos números 5 o su complemento (el 2) respetando la misma regla, y así sucesivamente.

Llenamos el cuadrado B de forma análoga solamente que ahora los enteros que colocamos son $0, N, 2N, 3N, \ldots, (N-1)N$. Primero llenamos las dos diagonales con estos números pero ahora iniciando en los extremos superior izquierdo y derecho, es decir, llenamos las diagonales iniciando en el lado superior del cuadrado. En los cuadraditos que quedan, acomodamos estos números utilizando las mismas reglas que para el cuadrado A, pero ahora iniciamos con el renglón superior e inferior. Luego, el segundo renglón y el penúltimo, y así sucesivamente. Observemos, que aquí los números que colocamos son de la forma $x = (N-1)N - j \cdot N$, donde $j = 1, 2, \ldots, (N-1)$.

Finalmente sumamos los cuadrados A y B para obtener el cuadrado mágico C. Observemos que aquí el número mágico es $\frac{1+2+\cdots+36}{6} = \frac{6(36+1)}{2} = 111$.

6	2	3	4	5	1
1	5	3	4	2	6
1	2	4	3	5	6
6	2	4	3	5	1
1	5	4	3	2	6
6	5	3	4	2	1

A

0	30	0	30	30	0
6	6	24	24	6	24
18	12	12	12	18	18
12	18	18	18	12	12
24	24	6	6	24	6
30	0	30	0	0	30

B

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

C

El método de La Hire se puede utilizar para construir cuadrados que sean doblemente pares, veamos un ejemplo de un cuadrado mágico de 4×4.

4	2	3	1
1	3	2	4
1	3	2	4
4	2	3	1

A

0	12	12	0
8	4	4	8
4	8	8	4
12	0	0	12

B

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

C

Algunos autores han utilizado variaciones de este método para llenar cuadrados de cualquier orden, pero para llenar cuadrados de orden impar se tiene que cambiar la forma de llenar los cuadrados A y B, ya que este método no funciona.

Método de Alberto Durero

El cuadrado mágico de Alberto Durero se puede llenar utilizando el método que acabamos de describir, sin embargo no fue el que usó el autor. Alberto Durero creó su propio método para construir cuadrados mágicos doblemente pares.

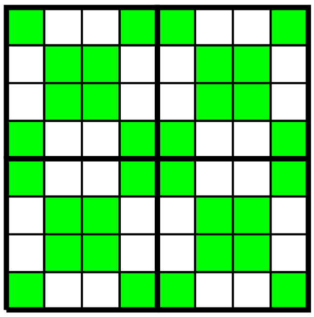
Veamos como construir el cuadrado 4×4, una variación de esta forma de llenar cuadrados funciona para cualquier cuadrado doblemente par. Colocamos el número 1 en el cuadradito inferior izquierdo. Ahora, imaginamos que vamos colocando los números consecutivos en el renglón inferior pero únicamente escribimos los números que ocupan un cuadradito de la diagonal, así en el renglón inferior tendremos únicamente el 1 y el 4. Continuamos al siguiente renglón de abajo hacia arriba, y podemos iniciar en el lado izquierdo o derecho del cuadrado como queramos, sin embargo tenemos que seguir la misma regla que escojamos para colocar el resto de los números. El primer número debería ser un 5 (que no escribimos) y el siguiente (que pertenece a la diagonal) es el 6, y así sucesivamente, hasta que lleguemos al renglón superior. El último cuadradito que llenamos tiene el número 16 en la esquina superior derecha.

Para terminar de construir el cuadrado mágico haremos lo mismo pero ahora iniciando, en el último cuadradito que llenamos, en este caso la esquina superior derecha con el número 1 (que no escribimos) y escribiendo únicamente los números que no pertenecen a la diagonal. Así colocamos el 2, junto al 16, el 5 junto al 11 y así sucesivamente, como se muestra en la figura.

13			16
	10	11	
	6	7	
1			4

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

Una variación de este método se puede utilizar para llenar todos los cuadrados doblemente pares. Sin embargo, el método no se aplica directamente, sino que hay que dividir el cuadrado en subcuadrados de 4×4 cuadraditos y marcar la diagonal de cada uno de estos subcuadrados, como se muestra en la figura.



Una vez hecho esto, se empiezan a distribuir los números igual que antes pero se escriben todos aquellos números que pertenezcan a alguna de las diagonales de un subcuadrado de 4×4 (los cuadraditos coloreados). Una vez que llegamos a una de las esquinas del cuadrado, iniciamos el proceso en sentido inverso, en ese mismo cuadradito, pero ahora llenando todos los cuadraditos que no pertenecen a ninguna de las diagonales de los subcuadrados de 4×4 cuadraditos. ¡Inténtalo en el cuadrado de 8×8!, el número mágico es

$$\frac{1 + 2 + \cdots + 64}{8} = \frac{\frac{64 \cdot 65}{2}}{8} = 260.$$

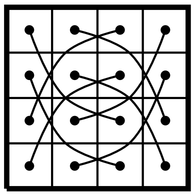
Como ya vimos existen cuadrados mágicos que son diabólicos pero también tenemos otra clasificación interesante que son los cuadrados Nasik, que además de diabólicos son "perfectos".

Cuadrados mágicos de Nasik

Los cuadrados mágicos de Nasik reciben su nombre de una región situado al oeste de la India a las orillas del río Godavari. Estos cuadrados mágicos se conocen también con el nombre de diabólicos y perfectos.

1	14	7	12
15	4	9	6
10	5	16	3
8	11	2	13

Los números que están unidos por las curvas suman la mitad de la suma mágica



Estos cuadrados como ya dijimos son diabólicos, es decir, que las diagonales cortadas suman lo mismo, por ejemplo la suma de $14 + 15 + 2 + 3 = 10 + 4 + 7 + 13 = 11 + 16 + 6 + 1 = 34$, pero por lo que estos cuadrados se llaman perfectos es que si repetimos el cuadrado en todas las direcciones, entonces cualquier cuadrado de 4×4 que escojamos, será mágico. Por ejemplo, el cuadrado sombreado es mágico.

1	14	7	12	1	14	7	12
15	4	9	6	15	4	9	6
10	5	16	3	10	5	16	3
8	11	2	13	8	11	2	13
1	14	7	12	1	14	7	12
15	4	9	6	15	4	9	6
10	5	16	3	10	5	16	3
8	11	2	13	8	11	2	13

Un cuadrado mágico de Nasik sigue siendo de Nasik bajo cualquier rotación, reflexión o si movemos el renglón superior y lo ponemos en el inferior o la columna izquierda y la ponemos a la derecha.

También podemos ver que en este arreglo infinito de Nasik cualquier cuadrado de 2×2 que escojamos suma 34 y a lo largo de cualquier diagonal cualesquiera dos números que sumemos que estén separados por una casilla suman 17.

Los cuadrados de Nasik se pueden construir de cualquier orden impar mayor a 3 y también para los cuadrados que llamamos doble pares, es decir, los múltiplos de 4. No se ha podido construir un cuadrado de Nasik de orden par sencillo, pero tampoco se ha

podido demostrar que no existe.
Hay 48 diferentes cuadrados de Nasik de orden 4. Hay 3600 cuadrados de Nasik de orden 5 si excluimos rotaciones y reflexiones. Si además excluimos las permutaciones cíclicas hay únicamente 144.
Ian Stewart, profesor de matemáticas de la Universidad de Warwick dijo: "Es sorprendente lo que los métodos modernos pueden lograr en áreas tan tradicionales (refiriéndose a los cuadrados mágicos). ... si pensábamos que esta área de los cuadrados mágicos estaba acabada hace mucho tiempo, lo tenemos que volver a pensar."

Ejercicios

1. Existen otros métodos para crear cuadrados mágicos. Haz el tuyo.

2. Modifica el método de Philippe La Hire para construir cuadrados mágicos de orden impar.

3. Construye un cuadrado mágico de 3×3 con los números: $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, 1, $\frac{7}{6}$, $\frac{4}{3}$ y $\frac{3}{2}$.

4. En el cuadrado mágico que se muestra, cinco de los números se han representado con las letras v, w, x, y, z. Determina el valor de $y + z$.

v	24	w
18	x	y
25	z	21

5. Pablo está tratando de llenar el siguiente cuadrado mágico con los números del 1 al 16 como se muestra.

2	3		
4			

¿Es posible que Pablo termine de llenar el cuadrado mágico?

Bibliografía

1. Pickover C.A., *The Zen of Magic Squares, Circles and Stars,* Princeton University Press, 2003.

2. Ouaknin M.A., *The Mystery of Numbers,* Assouline Publishing, 2004.

3. Gardner M. editado por Richards D., *The Colossal Book of Short Puzzles and Problems,* W.W. Norton And Company, Inc., 2006.

Problemas de práctica

Esta sección contiene problemas cuyo objetivo es apoyar tu preparación para participar en los concursos. Decidimos iniciar el año con 30 problemas presentados con el formato de opción múltiple. Elegimos este formato porque en las primeras etapas de la mayoría de los concursos estatales los problemas se presentan así. Sin embargo, es importante que no te limites a determinar la respuesta correcta por eliminación, sino que procures llegar a la solución a partir de un procedimiento o un razonamiento. Esto es muy importante, porque en etapas más avanzadas los exámenes no se presentan así, sino que los problemas se plantean con respuestas abiertas y entonces deberás llegar a la solución sin la ayuda que brindan las opciones.

Cabe mencionar que, por ser el primer número del año, el nivel de dificultad de la mayoría de los problemas no es muy elevado. Conforme el año transcurra la selección de problemas que se presenta en esta sección incrementará su nivel, de manera que siempre encontrarás material adecuado para seguirte preparando e incrementar tus capacidades. En la siguiente sección de la revista encontrarás las respuestas de todos ellos, pero te recomendamos que no la consultes sino hasta después de que hayas llegado por ti mismo a la solución o por lo menos le hayas dedicado bastante tiempo. Ten en cuenta que la clave para mejorar tus capacidades está en la perseverancia y el esfuerzo.

Por último, no olvidamos invitarte a contribuir para que esta sección se enriquezca con tu participación. Estamos seguros que concoces y tienes problemas interesantes que proponer, por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas que esperamos poder publicar.

Problema 1. Todos los ángulos interiores de un polígono convexo son menores que 160°. El número de lados de ese polígono puede ser a lo más:

(a) 12 (b) 14 (c) 15 (d) 17 (e) 18

Problema 2. ¿Cuánto vale la suma de los dígitos del número $32^{16} \cdot 125^{25}$?

(a) 5 (b) 16 (c) 25 (d) 32 (e) 125

Problema 3. En una calculadora la tecla A transforma al número x que está en la pantalla en $\frac{1}{x}$ y la tecla B multiplica por 2 al número que está en la pantalla. Si el número 2 está en la pantalla y tecleamos 499 veces la secuencia AB, ¿qué número aparecerá en la pantalla?

(a) 1 (b) 2^{-498} (c) 2^{-500} (d) 2^{499} (e) 2^{500}

Problema 4. El promedio de 6 números es 4. Cuando agregamos un séptimo número el nuevo promedio es 5. ¿Qué número se agregó?

(a) 5 (b) 6 (c) 8 (d) 10 (e) 11

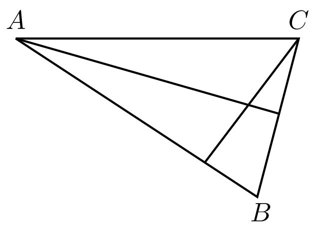
Problema 5. Los valores reales de x que satisfacen la desigualdad $\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{x}} \leq 2$ son:

(a) $-1 \leq x \leq 1$ (b) $x = 1$ (c) $x \leq 1$ (d) $x \geq 1$ (e) $x \leq 2$

Problema 6. La suma de 20 números enteros es 200. De estos, ¿cuál es la mayor cantidad de números que pueden ser mayores que 20?

(a) 20 (b) 19 (c) 10 (d) 9 (e) 8

Problema 7. En el triángulo ABC el ángulo ABC mide $60°$ y la bisectriz del ángulo CAB forma un ángulo de $70°$ con la altura desde C. ¿Cuánto mide el ángulo BCA?



(a) $50°$ (b) $30°$ (c) $40°$ (d) $80°$ (e) $70°$

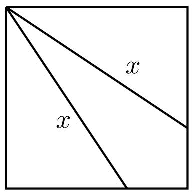
Problema 8. Un encuestador se dirige a una casa en donde es atendido por una mujer:
-¿Cantidad de hijos? -Dijo el encuestador.
-Tres hijas.-Contestó ella.
-¿Edades?-Preguntó el encuestador.
-El producto de las edades es 36 y la suma es igual al número de la casa.
-Responde ella.
-El encuestador se va, pero al rato vuelve y le dice a la mujer que hacen falta datos, la mujer se queda pensando y le responde:
-Tiene razón, a la mayor le gusta el chocolate.
¿Qué edades tienen las hijas?

(a) 2, 2 y 9 (b) 3, 3 y 4 (c) 1, 3 y 12 (d) 2, 3 y 6 (e) 1, 3 y 9

Problema 9. Los números a y b son reales no negativos tales que $a^3 + a < b - b^3$. Entonces,

(a) $b < a < 1$ (b) $a = b = 1$ (c) $a < 1 < b$ (d) $a < b < 1$ (e) $1 < a < b$

Problema 10. Tenemos un cuadrado de lado $1\,m$ y queremos dividirlo con dos segmentos de la misma longitud x, como se muestra en la figura. Si las tres partes que se obtienen deben tener la misma área, ¿cuánto debe valer x?

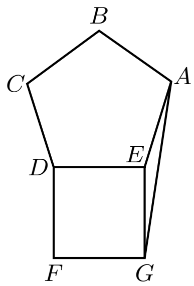


(a) $\frac{1}{3}\,m$ (b) $\frac{2}{3}\,m$ (c) $\frac{5}{6}\,m$ (d) $\frac{3}{4}\,m$ (e) $\frac{1}{2}\,m$

Problema 11. Considera todos los números de tres dígitos distintos que se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3 y 5. ¿Cuántos de estos números son múltiplos de 6?

(a) 4 (b) 7 (c) 10 (d) 15 (e) 20

Problema 12. Sean $ABCDE$ un pentágono regular y $DFGE$ un cuadrado. ¿Cuánto mide el ángulo GAE?



(a) $9°$ (b) $12°$ (c) $6°$ (d) $10°$ (e) $4°$

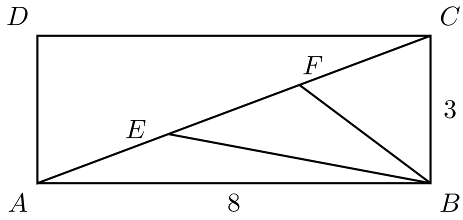
Problema 13. Si x y y son números reales positivos, ¿cuál de los siguientes números es el mayor?

(a) xy (b) $x^2 + y^2$ (c) $(x + y)^2$ (d) $x^2 + y(x + y)$ (e) $\frac{x^3+y^3}{x+y}$

Problema 14. Luis escribe tres números de 3 dígitos en el pizarrón. Luego calcula la suma de los tres números y obtiene 1575. Juan cambia el dígito de las unidades por el de las decenas de los tres números y calcula su suma. ¿Cuántos resultados distintos puede obtener Juan?

(a) 3 (b) 1 (c) 6 (d) 9 (e) 11

Problema 15. La base de un rectángulo $ABCD$ mide $8\,cm$ y su altura $3\,cm$. Dividimos la diagonal AC en tres partes iguales mediante los puntos E y F. ¿Cuánto mide el área del triángulo BEF?



(a) $12\,cm^2$ (b) $6\,cm^2$ (c) $4\,cm^2$ (d) $8\,cm^2$ (e) $10\,cm^2$

Problema 16. Los números x, y son distintos y satisfacen la igualdad $x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}$. ¿Cuál es el valor de xy?

(a) 4 (b) 1 (c) -1 (d) -4 (e) No se puede determinar

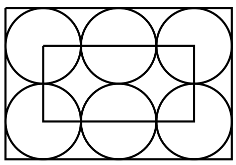
Problema 17. Juan tiene dos hermanas más chicas que él. El producto de las tres edades es 396, y su suma es 23. ¿Cuántos años tiene Juan?

(a) 6 (b) 7 (c) 11 (d) 12 (e) 18

Problema 18. Carlos tiene seis timbres: dos de 3 centavos, dos de 5 centavos y dos de 9 centavos. Utilizando a lo más 4 timbres puede obtener todas las cantidades entre 8 y 26 centavos, excepto uno. ¿Cuál es la cantidad que no puede obtener?

(a) 26 centavos (b) 25 centavos (c) 18 centavos (d) 20 centavos (e) 17 centavos

Problema 19. En la figura se muestran 6 círculos idénticos. Sabiendo que el rectángulo chico pasa por los centros de todos los círculos y que su perímetro es $60\,cm$, ¿cuánto mide el perímetro del rectángulo grande?



(a) $160\,cm$ (b) $140\,cm$ (c) $120\,cm$ (d) $100\,cm$ (e) $80\,cm$

Problema 20. Sofía tiene siete palitos de $2, 4, 6, 7, 8, 9$ y 10 centímetros de longitud. De todos los rectángulos que puede formar utilizando los siete palitos, ¿cuál es el área más grande que puede obtener?

(a) $140\,cm^2$ (b) $126\,cm^2$ (c) $118\,cm^2$ (d) $102\,cm^2$ (e) $130\,cm^2$

Problema 21. En un recipiente hay 200 dulces de los cuales $99\,\%$ son rojos, ¿cuántos dulces rojos tenemos que quitar para que el $98\,\%$ de los restantes sean rojos?

(a) 1 (b) 2 (c) 98 (d) 100 (e) 101

Problema 22. Un punto P se ha elegido en el interior de un cuadrado $QRST$. ¿Cuál es la probabilidad de que el ángulo $\angle RPQ$ sea agudo?

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\sqrt{2}-1$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{\pi}{4}$ (e) $1-\frac{\pi}{8}$

Problema 23. Carlos tiene ocho fichas numeradas del 1 al 8. Las divide en dos montones de forma que cada montón tenga al menos dos fichas y que ningún número sea igual al promedio de cualesquiera dos números del mismo montón. ¿Cuáles de las siguientes ternas de números no pueden estar en el mismo montón?

(a) $1, 8, 2$ (b) $1, 2, 6$ (c) $4, 3, 7$ (d) $8, 4, 3$ (e) $1, 2, 5$

Problema 24. Según un antiguo cuento ruso, Iván *el perezoso* se encontraba un día paseando a la orilla de un río.
-Todo el mundo me dice que me busque un trabajo o que me vaya al infierno -suspiró-. No creo que ninguna de las dos cosas me ayude a hacerme rico.
Tan pronto como acabó de decirlo se le apareció el diablo en persona.
-¿Quieres ganar dinero, Iván? -le preguntó.
Iván asintió.
-Muy bien -continuó el diablo- ¿ves ese puente? Todo lo que has de hacer es cruzarlo. Cada vez que vayas de una parte a otra, se duplicará el valor de lo que lleves en el bolsillo.
A Iván le gustó la propuesta, y ya se dirigía hacia el puente, cuando el diablo lo detuvo.
-Un momento -le dijo-. Ya que me he mostrado tan generoso contigo, creo que me merezco una pequeña recompensa por mis esfuerzos. Deberás darme 8 rublos (moneda rusa) cada vez que hayas cruzado el puente.
Iván se apresuró a asentir. Cruzó el puente y metió su mano al bolsillo. Su dinero se había duplicado por arte de magia. Le lanzó 8 rublos al diablo, que esperaba al otro lado del río, y volvió a cruzar el puente. Otra vez volvió a multiplicar su dinero. Le pagó otros 8 rublos al diablo, y cruzó por tercera vez el puente. Y el dinero volvió a duplicarse. Pero, al contarlo, descubrió que sólo le quedaban 8 rublos, que hubo de entregar al diablo, con lo que se quedó sin dinero para multiplicar cada vez que cruzara el puente. El diablo recogió el dinero, y desapareció en medio de una sonora carcajada. ¿Cuánto dinero tenía Iván en el bolsillo cuando hizo su particular pacto con el diablo?

(a) 8 rublos (b) 16 rublos (c) 0 rublos (d) 7 rublos (e) 6 rublos

Problema 25. ¿Cuántos números primos de la forma $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} + 9$ existen?
(Nota: a^{b^c} denota $a^{(b^c)}$.)

(a) Infinitos (b) 2 (c) 9 (d) 2^2 (e) Ninguno

Problema 26. Tengo 72 piedras repartidas en tres montones con diferente cantidad de piedras en cada uno. Del primer montón paso al segundo tantas piedras como piedras hay en ese segundo montón para que se duplique su número. Después, de las piedras que ahora hay en el segundo montón paso al tercero tantas piedras como piedras hay en ese tercer montón para que se duplique su número. Por último, del tercer montón paso al primero tantas piedras como piedras ahora hay en ese primer montón para que se duplique su número. Al terminar observo con curiosidad que en los tres montones quedó el mismo número de piedras. ¿Cuántas piedras tenía originalmente en el primer montón?

(a) 72 (b) 24 (c) 12 (d) 36 (e) 33

Problema 27. Cuatro enteros positivos $a < b < c < d$ satisfacen que el máximo común divisor de cualesquiera dos de ellos es mayor que 1 y el máximo común divisor de los cuatro es igual a 1. ¿Cuál es el menor valor posible para d?

(a) 10 (b) 12 (c) 15 (d) 30 (e) 105

Problema 28. Tres deportistas disputarán entre sí una serie de pruebas atléticas, hasta que uno de los participantes obtenga 3 triunfos. Se dará entonces por finalizada la competencia y se le declarará ganador. ¿Cuál es el número más probable de pruebas a realizarse?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

Problema 29. ¿Cuál es el máximo común divisor de todos los números que son iguales al producto de cinco números impares positivos consecutivos?

(a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 15 (e) 105

Problema 30. ¿Cuántos números primos p satisfacen que $2^p + p^2$ también es un número primo?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) Más de 3

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección se presentan las soluciones que hemos preparado para los 30 problemas de la sección anterior. Date cuenta que en cada problema no sólo se ha determinado la opción correcta, sino que además, siempre se incluye la argumentación que establece su validez. Observa que en todos los casos, la justificación se basa en resultados conocidos y/o en razonamientos lógicos, de manera que en ningún problema la solución se ha determinado por eliminación de las opciones incorrectas.

Cabe aclarar que las soluciones que aquí se presentan no son necesariamente las únicas, las mejores o las más elegantes, tan sólo son ejemplos que muestran el tipo de razonamiento que busca estimular la olimpiada. En matemáticas, cada problema puede tener tantas soluciones correctas como ideas originales se desarrollen con creatividad y lógica. Si tú encontraste una solución diferente de las que aquí se presentan y no estás seguro de su validez o simplemente quieres compartirla con nosotros, te invitamos para que nos escribas a `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. La respuesta es (d).
Observemos que si n es el número de lados de un polígono convexo, entonces la suma de sus ángulos interiores está dada por $180(n-2)$. Como todos los ángulos son menores que 160°, tenemos que $180(n-2) < 160n$, luego $20n < 360$, de donde $n < 18$. Por lo tanto, a lo más el polígono puede tener 17 lados.

Solución del problema 2. La respuesta es (a).
Observemos que

$$32^{16} \cdot 125^{25} = (2^5)^{16} \cdot (5^3)^{25} = 2^{80} \cdot 5^{75} = 2^5 \cdot 10^{75} = 32 \times 10^{75}.$$

Luego, la suma de los dígitos del número $32^{16} \cdot 125^{25} = 32 \times 10^{75}$ es $3 + 2 = 5$.

Solución del problema 3. La respuesta es (a).
Empezamos con un 2 y digitamos $ABAB$ obteniendo: $\frac{1}{2}, 1, 1, 2$, respectivamente. Es decir, en cada secuencia $ABAB$ volvemos a obtener al número 2. Como $498 = 249 \times 2$, entonces después de teclear 249 veces la secuencia $ABAB$ obtendremos un 2, de ahí sólo nos resta teclear AB para obtener 1.

Solución del problema 4. La respuesta es (e).
Denotemos por $x_1, x_2, \ldots x_6, x_7$ a los siete números. Tenemos que, $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_6}{6} = 4$, de donde $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 24$. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_6 + x_7}{7} &= 5, \\ \frac{24 + x_7}{7} &= 5, \\ 24 + x_7 &= 35, \end{aligned}$$

de donde $x_7 = 11$.

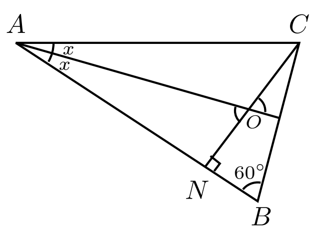
Solución del problema 5. La respuesta es (b).
Tenemos que:

$$\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}} \leq 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 \leq 4 \Leftrightarrow x + 2 + \frac{1}{x} \leq 4 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} \leq 2,$$

de donde se sigue que $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \leq 0$. Como el cuadrado de todo número real es mayor o igual que cero, tenemos que $(x-1)^2 = 0$ y por lo tanto, $x = 1$ es la única solución.

Solución del problema 6. La respuesta es (b).
Al sumar 20 números mayores que 20 el resultado es mayor que 400, por lo que los 20 números no pueden ser mayores que 20. Veamos que es posible tener 19 números mayores que 20. Para esto elegimos 19 números iguales a 21 y el número restante igual a -199. Luego, la suma de los 20 números es $19(21) + (-199) = 399 - 199 = 200$. Por lo tanto, la mayor cantidad de números que pueden ser mayores que 20 es igual a 19.

Solución del problema 7. La respuesta es (d).
Denotemos por N al pie de la altura y por O a la intersección de la bisectriz y la altura.



En el triángulo OAN tenemos que, $x = 180° - 90° - 70° = 20°$ (ver en el apéndice el teorema 5) Luego, $\angle CAB = 40°$ y por lo tanto $\angle BCA = 180° - 60° - 40° = 80°$.

Solución del problema 8. La respuesta es (a).
La mujer dijo que el producto de las edades de sus hijas era 36. Las factorizaciones de 36 como producto de tres números naturales son:

- $1 \times 1 \times 36$, la suma de los factores es 38.
- $1 \times 2 \times 18$, la suma de los factores es 21.
- $1 \times 3 \times 12$, la suma de los factores es 16.
- $1 \times 4 \times 9$, la suma de los factores es 14.
- $1 \times 6 \times 6$, la suma de los factores es 13.
- $2 \times 2 \times 9$, la suma de los factores es 13.
- $2 \times 3 \times 6$, la suma de los factores es 11.
- $3 \times 3 \times 4$, la suma de los factores es 10.

Observe que excepto por los casos $1 \times 6 \times 6$ y $2 \times 2 \times 9$, en el resto de las factorizaciones las sumas de los factores son diferentes. Ahora, como el encuestador (que conoce el número de la casa) dice que hacen falta datos, la única posibilidad es que el número de la casa sea 13. Después, para eliminar la ambigüedad la señora responde que a la mayor le gusta el chocolate, esto nos indica que hay una niña que es mayor que las otras dos y por lo tanto la única solución posible es que las edades de las hijas sean: 2, 2 y 9.

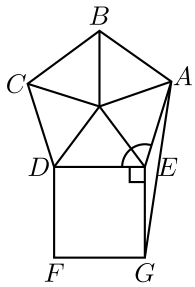
Solución del problema 9. La respuesta es (d).
Como $a \geq 0$ y $b \geq 0$, tenemos que $0 \leq a^3 + a < b - b^3$ de donde $b^3 < b$. Observemos también que $b \neq 0$, ya que si $b = 0$ tendríamos que $0 \leq a^3 + a < 0$ lo cual es un absurdo. Por lo tanto, la desigualdad $b^3 < b$ es equivalente a la desigualdad $b^2 < 1$, que a su vez es equivalente a la desigualdad $b < 1$. Por otro lado, tenemos que $a \leq a^3 + a < b - b^3 < b$ de donde $a < b$ y por lo tanto $a < b < 1$.

Solución del problema 10. La respuesta es (b).
Como el área del cuadrado es $1 \times 1 = 1\,m^2$ y dado que éste se divide en tres figuras con áreas iguales, el área de cada una de estas figuras es $\frac{1}{3}\,m^2$. Como dos de las tres figuras son triángulos rectángulos cuyos catetos miden 1 y x metros, tenemos que el área de cada uno de ellos mide $\frac{x}{2}\,m^2$. Luego, $\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, de donde se sigue que $x = \frac{2}{3}\,m$.

Solución del problema 11. La respuesta es (b).
Para que un número sea múltiplo de 6, su dígito de las unidades debe ser par y la suma de sus dígitos debe ser múltiplo de 3 (ver en el apéndice criterios 2). Como $1 + 2 + 3 + 5 = 11$ y 11 deja residuo 2 al dividirse entre 3, concluimos que los dos dígitos que deben ser excluidos deben dejar residuos 0 y 2 al dividirse entre 3, pues

sólo uno de los dígitos deja residuo 1 al dividirse entre 3. Las posibilidades para los dos dígitos excluidos son las siguientes:
0 y 2: con los dígitos restantes no podemos formar múltiplos de 6.
0 y 5: con los dígitos restantes podemos formar los números 132 y 312.
3 y 2: con los dígitos restantes podemos formar los números 150 y 510.
3 y 5: con los dígitos restantes podemos formar los números 120, 210 y 102 (observe que el número 012 sólo tiene dos dígitos.)
En total tenemos 7 números.

Solución del problema 12. La respuesta es (a).
Sabemos que los ángulos de cada uno de los triángulos que forman el pentágono miden: $72°$, $54°$ y $54°$.



Entonces $\angle AEG = 360° - 2(54°) - 90° = 162°$. Como el triángulo AEG es isósceles, los ángulos de la base miden lo mismo, luego $2(\angle GAE) + 162° = 180°$, de donde $\angle GAE = 9°$.

Solución del problema 13. La respuesta es (c).
Tenemos que:

$$\begin{aligned}
xy &\leq x^2 - xy + y^2 = \frac{x^3 + y^3}{x + y} \\
x^2 - xy + y^2 &\leq x^2 + y^2 \\
x^2 + y^2 &\leq x^2 + yx + y^2 = x^2 + y(x + y) \\
x^2 + y(x + y) &\leq x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + y)^2$ es el número mayor.

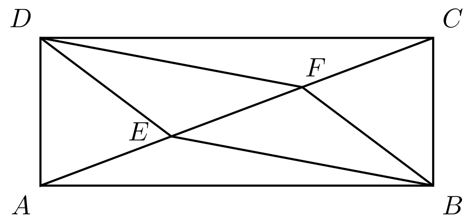
Solución del problema 14. La respuesta es (d).
Llamemos abc, def y ghi a los números de tres dígitos que escribe Luis en el pizarrón. Como sabemos que la suma es igual a 1575, tenemos que $c + f + i$ es igual a 5, 15 ó 25; que $b + e + h$ es igual a $7, 17, 27, 6, 16, 26, 5, 15$ ó 25 (dependiendo del valor de la primera suma), y que $a + d + g$ es igual a 15, 14 ó 13. Podemos acomodar estas

opciones en la siguiente tabla:

$c+f+i$	$b+e+h$	$a+d+g$	suma de Juan
5	7	15	1557
5	17	14	1467
5	27	13	1377
15	6	15	1656
15	16	14	1566
15	26	13	1476
25	5	15	1755
25	15	14	1665
25	25	13	1575

Luego, Juan puede obtener 9 resultados distintos.

Solución del problema 15. La respuesta es (c).
Si trazamos los segmentos DE y DF, el rectángulo queda dividido en seis triángulos como se muestra en la figura.



Observemos que las bases AE, EF y FC de los seis triángulos miden lo mismo, ya que cada una mide $\frac{1}{3}$ de la diagonal AC. Además, como las perpendiculares desde B y D sobre AC tienen la misma longitud, tenemos que las alturas sobre las bases de los seis triángulos tienen la misma longitud, y por lo tanto los seis triángulos tienen la misma área. Luego, el área del triángulo BEF es igual a $\frac{1}{6}$ del área del rectángulo, es decir, es igual a $\frac{24}{6} = 4\,cm^2$.

Solución del problema 16. La respuesta es (c).
Tenemos que

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{x} &= y - \frac{1}{y} \\ x - y &= \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \\ x - y &= \frac{y - x}{xy}. \end{aligned}$$

Como $x \neq y$, tenemos que $x - y \neq 0$ y podemos cancelar el término $x - y$ en la última igualdad, obteniendo $1 = -\frac{1}{xy}$ de donde se sigue que $xy = -1$.

Solución del problema 17. La respuesta es (c).
La descomposición en primos de 396 es $396 = 2^2 \times 3^2 \times 11$. Como la suma de las edades es 23, los tres hermanos tienen menos de 23 años, así que uno de ellos tiene que tener 11 años. Las otras dos edades tienen que ser números menores que $23 - 11 = 12$, así que pueden ser 4 y 9, o 6 y 6. En ambos casos, la edad de Juan sería 11 años.
Finalmente, observemos que las hermanas de Juan tienen 6 años cada una, ya que si tomamos la suma de las dos posibilidades tenemos que

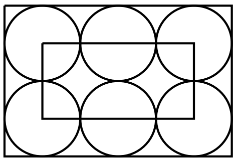
$$11 + 4 + 9 = 24 \qquad 11 + 6 + 6 = 23.$$

Solución del problema 18. La respuesta es (b).
Para obtener 25 centavos es necesario utilizar 5 timbres ya que $25 = 9 + 3 + 3 + 5 + 5$, por lo que no puede obtenerse con 4 timbres.

Solución del problema 19. La respuesta es (d).
Sea r la medida del radio de las circunferencias. Observemos que el perímetro del rectángulo chico (P_{ch}) puede calcularse en función de r,

$$P_{ch} = 2r + 2r + 4r + 4r = 12r = 60\,cm,$$

de donde se sigue que $r = 5\,cm$.



Como también podemos calcular el perímetro del rectángulo grande (P_g) en función de r, obtenemos

$$P_g = 4r + 4r + 6r + 6r = 20r = 20(5) = 100\,cm.$$

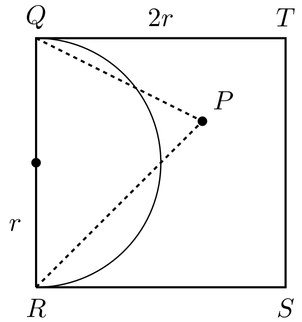
Solución del problema 20. La respuesta es (e).
La suma de las longitudes de los siete palitos es $2 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 46\,cm$. Como tenemos siete palitos, ningún lado del rectángulo puede estar formado por más de dos palitos. Las tres formas de formar un rectángulo son:

- de $6\,cm$ por $17\,cm$, ya que $6 = 4 + 2$ y $17 = 10 + 7 = 9 + 8$;
- de $9\,cm$ por $14\,cm$, ya que $9 = 7 + 2$ y $14 = 10 + 4 = 8 + 6$;
- de $10\,cm$ por $13\,cm$, ya que $10 = 8 + 2$ y $13 = 9 + 4 = 7 + 6$.

El tercero es el de mayor área, por lo que el área más grande que puede obtener Sofía es $10 \times 13 = 130\,cm^2$.

Solución del problema 21. La respuesta es (d).
Dado que el $99\,\%$ de 200 es 198, tenemos que en el recipiente hay 198 dulces rojos y 2 de otro(s) color(es). Si quitamos 100 dulces rojos, en total nos quedaríamos con 100 dulces, de estos 98 serían dulces rojos y 2 de otro color. Por lo tanto, el número de dulces rojos (98) sería el $98\,\%$ del total (100).

Solución del problema 22. La respuesta es (e).
Observemos que el ángulo $\angle RPQ$ es agudo si y sólo si el punto P está fuera de la circunferencia de diámetro RQ.



Luego, la probabilidad pedida es igual a la razón entre el área externa a la circunferencia que queda dentro del cuadrado y el área total del cuadrado. Si denotamos con r al radio de la circunferencia, tenemos que el lado del cuadrado es $2r$ y la probabilidad es

$$\frac{(2r)^2 - \frac{\pi r^2}{2}}{(2r)^2} = 1 - \frac{\pi}{8}.$$

Solución del problema 23. La respuesta es (a).
Si ponemos el $1, 2$ y 8 en un montón tenemos que el 3 y el 5 no pueden estar en ese montón ya que:

$$\frac{2+8}{2} = 5 \qquad \text{y} \qquad \frac{1+3}{2} = 2.$$

Entonces, ponemos al 3 y al 5 en el segundo montón. Luego, el 7 tiene que estar en el primer montón. Por lo tanto, el 4 no lo podemos poner en ninguno de los dos montones, lo que implica que el 1, 2 y 8 no pueden estar juntos.
Además, una forma de dividir las fichas es hacer un montón con $1, 2, 5$ y 6, y el otro con $3, 4,$ 7 y 8. Por lo que las otras ternas pueden estar juntas en un montón.

Solución del problema 24. La respuesta es (d).
Iván comenzó con 7 rublos y al cruzar el puente por primera vez su dinero se duplicó, por lo que en ese momento alcanzó los 14 rublos, pero después de pagarle 8 al diablo sólo le quedaron 6.
Volvió a cruzar el puente y su dinero se volvió a duplicar alcanzando la cantidad de 12

rublos, de los cuales pagó 8 al diablo y se quedó solamente con 4 rublos.
Finalmente, al cruzar por tercera vez, su dinero se duplicó nuevamente y alcanzó la cantidad de 8 rublos, mismos que tuvo que pagar al diablo y así finalmente se quedó sin dinero.

Solución del problema 25. La respuesta es (b).
La sucesión 2, 2^2, 2^{2^2}, ..., está definida de tal forma que cada término es el cuadrado del anterior. Sus primeros términos son: 2, 4, 16, 256, etc. Debido a que $6^2 = 36$, a partir del tercer término, todos los términos sucesivos tienen al dígito 6 en la última cifra. De aquí, se concluye que al sumar 9, el número obtenido terminará en 5 y (dado a que es mayor que 5) no puede ser primo. Por lo tanto, tenemos que los únicos primos de esta forma son: 11 y 13.

Solución del problema 26. La respuesta es (e).
Sabemos que al final cada uno de los tres montones tiene $\frac{72}{3} = 24$ piedras. Por lo tanto, antes del último movimiento, en el primer montón había $\frac{24}{2} = 12$ piedras y en el tercer montón había $24 + 12 = 36$ piedras. Entonces, en el segundo movimiento se pasaron $\frac{36}{2} = 18$ piedras del segundo al tercer montón, de manera que antes de este segundo movimiento había: 12 piedras en el primer montón, 42 piedras en el segundo motón y 18 piedras en el tercer montón. De aquí, es fácil ver que en el primer movimiento se pasaron $\frac{42}{2} = 21$ piedras del primer al segundo montón, por lo que el primer montón tenía originalmente $12 + 21 = 33$ piedras, el segundo 21 y el tercero 18.

Solución del problema 27. La respuesta es (c).
Observemos que si d fuera una potencia de un primo p, entonces como el máximo común divisor de cada uno de los otros números con d es mayor que 1, tendríamos que a, b y c son múltiplos de p, y por lo tanto el máximo común divisor de los cuatro números sería por lo menos p, lo cual no es posible. Por lo tanto, d tiene por lo menos dos factores primos distintos. Además, uno de los cuatro números es impar, pues si todos fueran pares su máximo común divisor sería por lo menos 2. Como el menor impar que tiene dos factores primos distintos es $3 \cdot 5 = 15$, tenemos que $d \geq 15$. Tomando $a = 6$, $b = 10$, $c = 12$ y $d = 15$, concluimos que el valor mínimo para d es 15.

Solución del problema 28. La respuesta es (c).
En primer lugar, es claro que para obtener un ganador es necesario realizar por lo menos 3 pruebas y que el número de ellas no puede ser mayor a 7, ya que en éste último caso es imposible que cada competidor haya ganado menos de 3 pruebas. Ahora podemos hacer un análisis por casos donde calculemos la probabilidad de que la competencia se decida en n pruebas para cada valor de n entre 3 y 7.
Caso $n = 3$. Aquí la única posiblidad es que alguno de los participantes gane sucesivamente las 3 pruebas. Puesto que, para cada atleta, la posiblidad de ganar cada prueba es de $\frac{1}{3}$, resulta fácil calcular la probabilidad de que cualquiera de ellos gane las tres pruebas sucesivamente $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}$.
Aunque en el resto de los casos el análisis es un poco más complejo, para ninguno de ellos es demasido complicado. Por ejemplo, en el caso $n = 5$ tenemos dos subcasos:

- Un atleta (A) gana tres pruebas y otro (B) gana las otras dos. El número de formas para la elección de los atletas es 6, ya que hay tres formas de escoger al primero (A) y dos de elegir al segundo (B). Ahora veamos las posibles secuencias en que A ó B obtienen los triunfos. Es claro que A debe ganar la última prueba, en cuanto a las 4 primeras, sabemos que A gana 2 y B gana las otras 2, en cualquiera de los órdenes posibles. Entonces para calcular las posibilidades basta con calcular las permutaciones con repetición de los símbolos $AABB$, cuyo número total es $\frac{4!}{2!2!} = 6$. De donde el número de posibilidades para este subcaso es $6 \times 6 = 36$.

- Un atleta (A) gana tres pruebas y los otros dos (B y C) una cada uno. Aquí la elección de los atletas sólo tiene 3 posibilidades, ya que sólo hay que elegir al que gana la competencia (A). En cuanto a la secuencia de ganadores, nuevamente tenemos que A debe ser el ganador de la última prueba. Ahora, para la secuencia de ganadores de las primeras 4 pruebas, basta considerar las ordenaciones de los símbolos $AABC$, cuyo número total es $\frac{4!}{2!} = 12$. Entonces, el número de posibilidades para este subcaso es $3 \times 12 = 36$.

Dado que estos subcasos son mutuamente excluyentes, tenemos que para $n = 5$ hay 72 formas posibles en que se haya dado la competencia. Considerando que cada una de las 5 pruebas es independiente de la anterior, tenemos que la probabilidad total para este caso es $72 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{8}{27}$.
Utilizando argumentos similares para calcular las probbilidades de los casos restantes, se obtiene que las probabilidades para los distintos valores de n son: $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{8}{27}$, $\frac{20}{81}$ y $\frac{10}{81}$, siendo el mayor de ellos $\frac{8}{27}$, de donde se concluye que el número más probable de puebas a realizarse es 5.

Solución del problema 29. La respuesta es (d).
Sea d el máximo común divisor de todos los números que son iguales al producto de cinco números impares positivos consecutivos. En cada 5 números impares consecutivos hay uno que es múltiplo de 5, y como son más de 3 también hay uno que es múltiplo de 3. Por lo tanto, en el producto siempre tenemos el factor 15, lo que implica que $d \geq 15$. Ahora, como d debe dividir al máximo común divisor de los números $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$ y $11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19$, que es igual a 15, tenemos que $d \leq 15$. Por lo tanto, $d = 15$.

Solución del problema 30. La respuesta es (b).
Si $p = 2$, tenemos que $2^p + p^2 = 8$ no es primo. Si $p = 3$, tenemos que $2^p + p^2 = 17$ es primo. Si $p > 3$, entonces $p = 6k \pm 1$ para algún entero k, y por lo tanto $p^2 = 36k^2 \pm 12k + 1$ es de la forma $3K + 1$. Por otra parte, cuando se dividen por 3 sucesivas potencias de 2, los residuos que se obtienen son 2 y 1 alternadamente. Como $p > 3$ es impar, tenemos que 2^p deja residuo 2 al dividirse por 3, es decir, 2^p es de la forma $3m + 2$. Por lo tanto, $2^p + p^2 = 3m + 2 + 3K + 1 = 3(m + K + 1)$ es múltiplo de 3, y en consecuencia no es primo.

Problemas propuestos

Tzaloa es tu revista y esta sección está especialmente diseñada para tu paticipación. Como siempre, en este número presentamos 5 problemas nuevos que te necesitan para encontrar su solución. Sabemos que te gustan los retos y por eso los problemas de esta sección son un poco más difíciles que los de la sección *problemas de práctica*. Sin embargo, esto no debe desanimarte pues estamos seguros que con un poco de esfuerzo pronto podrás resolverlos.

Para dar tiempo a que nos envíes tu solución y ésta pueda ser analizada con todo cuidado, las respuestas de los problemas propuestos en cualquier número de la revista, se publican con tres números de diferencia. Es así que las respuestas de los problemas propuestos en esta ocasión, se publicarán en Tzaloa 4, año 2011, por lo que aún tienes tiempo para preparar y enviarnos tu trabajo.

Recuerda que nuestra dirección electrónica es `revistaomm@gmail.com` y que a través de ella estaremos recibiendo con gusto todas las contribuciones que nos lleguen desde cualquier rincón del país.

Problemas propuestos.
Año 2011 No. 1.

Problema 1. (Principiante) Determina el promedio de todos los enteros n tales que $0 \leq n \leq 10000$ y que no tienen el dígito 1.

Problema 2. (Principiante) Sea n un entero positivo de tres dígitos distintos entre sí y distintos de cero. Sea g el máximo común divisor de los 6 números que se obtienen permutando los dígitos de n. Determina el mayor valor posible de g.

Problema 3. (Intermedio) Determina el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{(2^4+2^2+1)(4^4+4^2+1)(6^4+6^2+1)\cdots(32^4+32^2+1)}{(1^4+1^2+1)(3^4+3^2+1)(5^4+5^2+1)\cdots(31^4+31^2+1)}.$$

Problema 4. (Intermedio) En el lado BC de un triángulo ABC se ubica el punto P de manera que $AC+CP=PB$. Sea R el punto medio de AB. Si la medida del ángulo $\angle RPB$ es $43°$, encuentra la medida del ángulo $\angle ACB$.

Problema 5. (Intermedio) Jacobo piensa en un número cualquiera de dos dígitos y Ana tratará de averiguarlo. Jacobo dirá *caliente* cuando el número que dice Ana es correcto o cuando uno de los dígitos del número es correcto y el otro difiere a lo más en una unidad con respecto al correcto. En cualquier otro caso Jacobo dirá *frío*.

1. Demuestra que no existe una estrategia que garantice que Ana pueda adivinar el número en a lo más 18 intentos.
2. Encuentra una estrategia ganadora que permita a Ana adivinar el número en a lo mucho 24 intentos.
3. ¿Existe alguna estrategia que permita a Ana adivinar el número en a lo más 22 intentos?

Concurso Nacional 2010
24^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Del 21 al 27 de noviembre de 2010 se llevó a cabo en Ensenada, Baja California, el Concurso Nacional de la 24ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de todos los estados de la República. Los 16 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Hernández González Flavio (Aguascalientes)
De la Torre Sáenz Karina Patricia (Chihuahua)
Chiu Han Enrique (Distrito Federal)
Garza Vargas Jorge (Distrito Federal)
Serrano Crotte Fernando (Distrito Federal)
González Cázares Jorge Ignacio (Jalisco)
Medrano Martín del Campo Adán (Jalisco)
Espinosa García Manuel Alejandro (Michoacán)
Arancibia Alberro María Natalie (Morelos)
Belanger Albarrán Georges (Morelos)
Perales Anaya Daniel (Morelos)
Añorve López Fernando Josafath (Nuevo León)
Dominguez Lozano Angel Adrián (Nuevo León)
Roque Montoya Diego Alonso (Nuevo León)
Rivera Robles José Naín (Querétaro)
Guardiola Espinosa José Ramón (San Luis Potosí)

Los 8 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Angel Adrián Dominguez Lozano (Nuevo León)
Adán Medrano Martín del Campo (Jalisco)
Enrique Chiu Han (Distrito Federal)
Joshua Ayork Acevedo Carabantes (Guanajuato)
Juan Carlos Ortiz Rhoton (Jalisco)
Zyanya Irais Martínez Tanahara (Baja California)
Gustavo Humberto Vargas de Los Santos (Campeche)
Edson Gabriel Garrido Vargas (Yucatán)

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el Concurso Nacional de la 24^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

1. Morelos
2. Nuevo León
3. Jalisco
4. Distrito Federal
5. Chihuahua
6. Guanajuato
7. Yucatán
8. Aguascalientes
9. Sonora
10. Querétaro

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó Copa "**Ing. Dagoberto Cruz Sibaja**" y fue ganado por Guanajuato. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, Nuevo León y Nayarit, respectivamente.

A continuación presentamos los problemas del Concurso Nacional 2010. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Encuentra todas las ternas de números naturales (a, b, c) que cumplan la ecuación $abc = a + b + c + 1$.

(Sugerido por Rodrigo Jiménez Correa)

Problema 2. En cada casilla de un tablero de $n \times n$ hay un foco. Inicialmente todos los focos están apagados. En un paso, se permite cambiar el estado de todos los focos en una fila o de todos los focos en una columna (los focos prendidos se apagan y los focos apagados se prenden).
Muestra que si después de cierta cantidad de pasos hay uno o más focos prendidos entonces en ese momento hay al menos n focos prendidos.

(Sugerido por Pablo Soberón Bravo)

Problema 3. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias tangentes exteriormente en un punto A. Se traza una recta tangente a $\mathcal{C}_1$ en B y secante a $\mathcal{C}_2$ en C y D; luego se prolonga el segmento AB hasta intersecar a $\mathcal{C}_2$ en un punto E. Sea F el punto medio del arco CD sobre $\mathcal{C}_2$ que no contiene a E y sea H la intersección de BF con $\mathcal{C}_2$. Muestra que CD, AF y EH son concurrentes.

(Sugerido por Luis Eduardo García Hernández)

Problema 4. Sea n un entero positivo. En una cuadrícula de $n \times 4$, cada renglón es igual a

2	0	1	0

Un *cambio* es tomar tres casillas

(a) consecutivas en el mismo renglón y

(b) con dígitos distintos escritos en ellas

y cambiar los tres dígitos de estas casillas de la siguiente manera:

$$0 \to 1, \quad 1 \to 2, \quad 2 \to 0.$$

Por ejemplo, un renglón $\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}$ puede cambiarse al renglón $\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{0}$ pero no al renglón $\boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}$ pues 0, 1 y 0 no son distintos entre sí.
Los cambios se pueden aplicar cuantas veces se quiera, aún a renglones ya cambiados. Muestra que para $n < 12$ no es posible hacer un número finito de cambios de forma que la suma de los números en cada una de las cuatro columnas sea la misma.

(Sugerido por David Cossío Ruiz)

Problema 5. Sean ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$, M el punto medio de BC y H el ortocentro de ABC. La circunferencia que pasa por B, H y C corta a la mediana AM en N. Muestra que $\angle ANH = 90°$.

(Sugerido por Rogelio Valdez Delgado)

Problema 6. Sean p, q, r números primos positivos distintos. Muestra que si pqr divide a

$$(pq)^r + (qr)^p + (rp)^q - 1$$

entonces $(pqr)^3$ divide a

$$3((pq)^r + (qr)^p + (rp)^q - 1).$$

(Sugerido por Leonardo Martínez Sandoval)

Olimpiadas Internacionales

XXV Olimpiada Iberoamericana

Del 19 al 29 de septiembre de 2010 se llevó a cabo la XXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas en Asunción, Paraguay. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Irving Daniel Calderón Camacho (Estado de México), Flavio Hernández González (Aguascalientes), Daniel Perales Anaya (Morelos) y Manuel Enrique Dosal Bustillos (Chihuahua). El alumno Irving Daniel obtuvo medalla de oro, los alumnos Flavio y Daniel obtuvieron medalla de plata, y Manuel Enrique obtuvo medalla de bronce. En esta ocasión, México obtuvo el tercer lugar de entre los 21 países que participaron.

A continuación presentamos los problemas de la XXV Olimpiada Iberoamericana. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Se tienen diez monedas indistinguibles puestas en línea. Se sabe que dos de ellas son falsas y ocupan posiciones consecutivas en la línea. Para cada conjunto de posiciones, se puede preguntar cuántas monedas falsas contiene. ¿Es posible determinar cuáles son las monedas falsas efectuando únicamente dos de estas preguntas, sin conocer la respuesta de la primera antes de formular la segunda?

Problema 2. Determinar si existen números enteros positivos a y b tales que todos los términos de la sucesión definida por $x_1 = 2010$, $x_2 = 2011$,

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1} + a\sqrt{x_n x_{n+1} + b}, \quad n \geq 1,$$

sean enteros.

Problema 3. La circunferencia Γ inscrita al triángulo escaleno ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F, respectivamente. La recta EF corta a la recta BC en G. La circunferencia de diámetro GD corta a Γ en R ($R \neq D$). Sean P y Q ($P \neq R$, $Q \neq R$) las intersecciones de BR y CR con Γ, respectivamente. Las rectas BQ y CP se cortan en X. La circunferencia circunscrita a CDE corta al segmento QR en M y la circunferencia circunscrita a BDF corta al segmento PR en N. Demostrar que las rectas PM, QN y RX son concurrentes.

Problema 4. Las medias aritmética, geométrica y armónica de dos números enteros positivos distintos son números enteros. Hallar el menor valor posible para la media aritmética.
Si a y b son números positivos, sus medias aritmética, geométrica y armónica son respectivamente: $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$, $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Problema 5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico cuyas diagonales AC y BD son perpendiculares. Sean O el circuncentro de $ABCD$, K la intersección de las diagonales, $L \neq O$ la intersección de las circunferencias circunscritas a OAC y OBD, y G la intersección de las diagonales del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos medios de los lados de $ABCD$. Probar que O, K, L y G están alineados.

Problema 6. Alrededor de una mesa circular se sientan 12 personas y sobre la mesa hay 28 floreros. Dos personas pueden verse si y sólo si no hay ningún florero alineado con ellas. Probar que existen al menos dos personas que pueden verse.

Problemas y Soluciones de Olimpiadas Internacionales

51ª Olimpiada Internacional

Del 2 al 14 de julio de 2010, se llevó a cabo la 51^a Olimpiada Internacional de Matemáticas en Astaná, Kazajistán, con la participación de 517 competidores provenientes de 96 países.

El desempeño de México en esta olimpiada internacional fue muy bueno ya que logró colocarse en el primer tercio de la lista de países participantes, segundo lugar de los países iberoamericanos, por encima de Argentina, España y Brasil. Además, por primera ocasión, cinco de los seis integrantes de la delegación mexicana obtuvieron medalla.

La delegación mexicana estuvo integrada por Daniel Perales Anaya (Morelos), Flavio Hernández González (Aguascalientes), José Luis Miranda Olvera (Jalisco), Irving Daniel Calderón Camacho (Estado de México), Diego Alonso Roque Montoya (Nuevo León), y Manuel Enrique Dosal Bustillos (Chihuahua). Todos ellos alumnos menores de 18 años y Diego, el más jóven de los participantes de México, con tan solo 14 años de edad. Daniel se vió galardonado con una medalla de plata; Flavio, José Luis, Irving Daniel y Diego obtuvieron, cada uno, una medalla de bronce; y Manuel recibió una mención honorífica.

A continuación presentamos los problemas con sus soluciones de la 51^a Olimpiada Internacional. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Determine todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor$$

para todos los números $x, y \in \mathbb{R}$. ($\lfloor z \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que z.)

Solución de José Luis Miranda Olvera. Veamos que cualquier función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisface

$$f(\lfloor x\rfloor y)=f(x)\lfloor f(y)\rfloor, \tag{1}$$

para todos los números $x,y\in\mathbb{R}$, debe ser de la forma $f(x)=C$, con C una constante tal que $C=0$ o $1\leq C<2$. Primero consideremos $x=0$, entonces

$$f(0)=f(0)\lfloor f(y)\rfloor \tag{2}$$

para todo $y\in\mathbb{R}$. Ahora bien, tenemos dos casos.

1. Supongamos que $f(0)\neq 0$. Entonces por (2) $\lfloor f(y)\rfloor=1$ para todo $y\in\mathbb{R}$. Luego,la ecuación (1) $f(\lfloor x\rfloor y)=f(x)$, y sustituyéndo $y=0$ tenemos que $f(x)=f(0)=C\neq 0$. Finalmente, para $\lfloor f(y)\rfloor=1=\lfloor C\rfloor$ se obtiene que $1\leq C<2$.

2. Supongamos que $f(0)=0$. Ahora, consideremos dos casos:

   a) Supongamos que existe $0<a<1$ tal que $f(a)\neq 0$. Entonces tomando $x=a$ en la ecuación (1) tenemos que $0=f(0)=f(a)\lfloor f(y)\rfloor$ para toda $y\in\mathbb{R}$. Luego, $\lfloor f(y)\rfloor=0$ para toda $y\in\mathbb{R}$. Finalmente sustituyendo $x=1$ en (1) obtenemos $f(y)=0$ para toda $y\in\mathbb{R}$, lo que contradice que $f(a)\neq 0$.

   b) Inversamente, tenemos que $f(a)=0$ para toda $0\leq a<1$. Consideremos cuanquier número real z, luego existe un entero N tal que $a=\frac{z}{N}\in[0,1)$ (considerando el número $N=\lfloor z\rfloor+1$ si $z\geq 0$ y $N=\lfloor z\rfloor-1$ en otro caso).

   Ahora, de la ecuación (1) tenemos que $f(z)=f(\lfloor N\rfloor a)=f(N)\lfloor f(a)\rfloor=0$ para todo $z\in\mathbb{R}$.

   Finalmente, una comprobación directa muestra que todas las funciones obtenidas satisfacen (1).

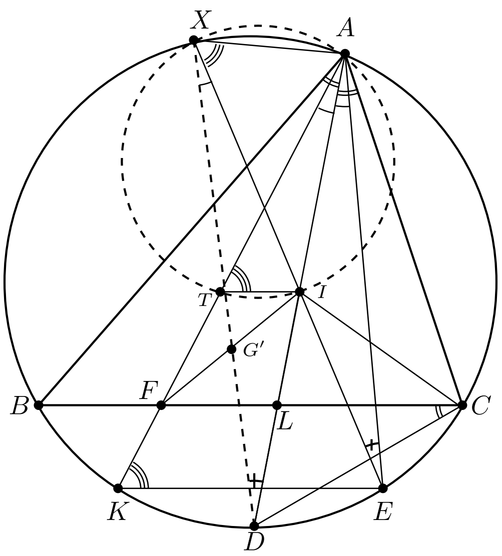
Problema 2. Sea ABC un triángulo, I su incentro y Γ su circunferencia circunscrita. La recta AI corta de nuevo a Γ en D. Sean E un punto en el arco $\widehat{BDC}$ y F un punto en el lado BC tales que

$$\angle BAF=\angle CAE<\frac{1}{2}\angle BAC.$$

Sea G el punto medio del segmento IF. Demuestre que las rectas DG y EI se cortan sobre Γ.

Solución de Daniel Perales Anaya. Sea X el segundo punto de intersección de la recta EI con Γ, y sea L el pie de la bisectriz del ángulo BAC. Sean G' y T los puntos de intersección del segmento DX con las rectas IF y AF, respectivamente.

Demostraremos que $G = G'$, o $G'I = FG'$.



Sea $K \neq A$ el punto de intersección de la recta AF y Γ. Como $\angle BAK = \angle CAE$ tenemos que $\widehat{BK} = \widehat{CE}$. Luego, KE es paralela a BC y ambas son paralelas a la tangente a Γ por el punto D. Como D es el circuncento del triángulo BCI tenemos que,

$$\frac{AD}{ID} = \frac{AD}{DC}.$$

Como $ABDC$ es cíclico, $\angle ABC = \angle ADC$. Además, como DA es bisectriz de $\angle BAC$ tenemos que $\angle BAD = \angle DAC$ de donde los triángulos ADC y ABL son semejantes y

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BL}.$$

Por el teorema de la bisectriz en el triángulo ABL tenemos también que,

$$\frac{AB}{BL} = \frac{AI}{IL}.$$

Usando el teorema de Pascal en el hexágono cíclico degenerado $KEXDDA$ tenemos que la intersección Z de KE con la tangente a Γ por D, (Z es el punto al infinito en la dirección KE), la intersección I de EX con DA y la intersección T de XD con KA, son colineales. Entonces IT es paralela a BC y tenemos por el teorema de Thales

$$\frac{AI}{IL} = \frac{AT}{TF}.$$

En resumen,

$$\frac{AD}{ID} = \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BL} = \frac{AI}{IL} = \frac{AT}{TF}.$$

Ahora, por el teorema de Menelao en el triángulo AFI con la recta TD tenemos que

$$\frac{FG'}{G'I} \cdot \frac{DI}{DA} \cdot \frac{AT}{TF} = 1,$$

de donde $G'I = FG'$, como queríamos.

Solución alternativa. Sean X, L, G', T y K como en la solución anterior. Queremos demostrar que $G = G'$, o $IG' = G'F$. Por el teorema de Menelao aplicado al triángulo AIF y a la recta DX, tenemos que

$$1 = \frac{FG'}{G'I} \cdot \frac{ID}{AD} \cdot \frac{AT}{TF},$$

de donde se sigue que $FG' = G'I$ si y sólo si $\frac{ID}{AD} = \frac{TF}{AT}$.
Sabemos que KE es paralela a BC (ver solución anterior). Como $\angle IAT = \angle DAK = \angle EAD = \angle EXD = \angle IXT$, entonces los puntos I, A, X, T son concíclicos. Luego, tenemos que $\angle ITA = \angle IXA = \angle EXA = \angle EKA$, entonces IT es paralela a KE que es paralela a BC. De aquí que $\frac{TF}{AT} = \frac{IL}{AI}$.
Como CI es la bisectriz de $\angle ACL$, tenemos que $\frac{IL}{AI} = \frac{CL}{AC}$. Más aún, $\angle DCL = \angle DCB = \angle DAB = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC$, por lo tanto los triángulos DCL y DAC son semejantes. Luego, $\frac{CL}{AC} = \frac{DC}{AD}$. Finalmente, sabemos que el punto medio D del arco BC equidista de los puntos I, B y C, entonces $\frac{DC}{AD} = \frac{ID}{AD}$. Por lo tanto, considerando todas las igualdades tenemos que

$$\frac{TF}{AT} = \frac{IL}{AI} = \frac{CL}{AC} = \frac{DC}{AD} = \frac{ID}{AD},$$

como se deseaba.

Problema 3. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros positivos. Determine todas las funciones $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

es un cuadrado perfecto para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Solución. La respuesta es: todas las funciones de la forma $g(n) = n + c$, donde $c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Primero, es claro que todas las funciones de la forma $g(n) = n + c$ con c entero no negativo satisfacen las condiciones del problema ya que $(g(m) + n)(g(n) + m) = (n + m + c)^2$ es un cuadrado.
Resta por demostrar que no existen otras funciones. Primero demostraremos el siguiente lema.

Lema. *Si $p|g(k) - g(l)$ para algún primo p y algunos enteros positivos k y l, entonces $p|k - l$.*

Demostración. Supongamos primero que $p^2|g(k)-g(l)$, de modo que $g(l)=g(k)+p^2a$ para algún entero a. Consideremos un entero positivo $D>\max\{g(k),g(l)\}$ el cual no es divisible por p y sea $n=pD-g(k)$. Entonces, los números positivos $n+g(k)=pD$ y $n+g(l)=pD+(g(l)-g(k))=p(D+pa)$ son ambos divisibles por p pero no por p^2. Ahora, aplicando las condiciones del problema, obtenemos que ambos números $(g(k)+n)(g(n)+k)$ y $(g(l)+n)(g(n)+l)$ son cuadrados divisibles por p, y por lo tanto $p|(g(n)+k)-(g(n)+l)=k-l$.
Por otra parte, si $g(k)-g(l)$ es divisible por p pero no por p^2, entonces elegimos el mismo número D y hacemos $n=p^3D-g(k)$. Entonces, los números positivos $g(k)+n=p^3D$ y $g(l)+n=p^3D+(g(l)-g(k))$ son, respectivamente, divisibles por p^3 (pero no por p^4) y por p (pero no por p^2). Luego, de manera análoga obtenemos que los números $g(n)+k$ y $g(n)+l$ son divisibles por p, y por lo tanto $p|(g(n)+k)-(g(n)+l)=k-l$.

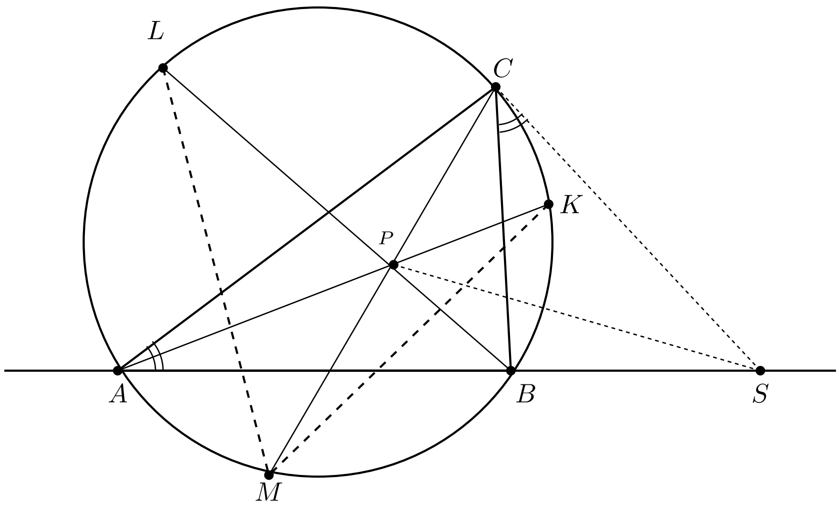
Regresando a la solución del problema. Primero, supongamos que $g(k)=g(l)$ para algunos $k,l\in\mathbb{N}$. Entonces, por el Lema anterior tenemos que $k-l$ es divisible por cada número primo, de modo que $k-l=0$ o bien $k=l$. Por lo tanto, la función g es inyectiva.
Ahora, consideremos los números $g(k)$ y $g(k+1)$. Ya que el número $(k+1)-k=1$ no tiene divisores primos, por el Lema anterior lo mismo se cumple para $g(k+1)-g(k)$, y por lo tanto $|g(k+1)-g(k)|=1$.
Ahora, sea $g(2)-g(1)=q$, $|q|=1$. Demostraremos por inducción que $g(n)=g(1)+q(n-1)$. Los casos $n=1,2$ se cumplen por la definición de q. Para el paso inductivo, si $n>1$ tenemos que $g(n+1)=g(n)\pm q=g(1)+q(n-1)\pm q$. Como $g(n)\neq g(n-2)=g(1)+q(n-2)$, obtenemos que $g(n)=g(1)+qn$, como queríamos.
Finalmente, tenemos que $g(n)=g(1)+q(n-1)$. Luego, q no puede ser -1 ya que si lo fuera, para $n\geq g(1)+1$ tenemos que $g(n)\leq 0$ lo cual es imposible. Por lo tanto, $q=1$ y $g(n)=(g(1)-1)+n$ para cada $n\in\mathbb{N}$, y $g(1)-1\geq 0$, como queríamos.

Problema 4. Sea Γ la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y P un punto en el interior del triángulo. Las rectas AP, BP y CP cortan de nuevo a Γ en los puntos K, L y M, respectivamente. La recta tangente a Γ en C corta a la recta AB en S. Si se tiene que $SC=SP$, demuestre que $MK=ML$.

Solución de Irving Daniel Calderón Camacho. Sean

$$\begin{aligned}
\alpha &= \angle MCB=\angle MLB,\\
\beta &= \angle BAK=\angle BLK,\\
\gamma &= \angle AKL=\angle ABL,\\
\theta &= \angle MKA=\angle MCA,\\
\lambda &= \angle KAC.
\end{aligned}$$

Para demostrar que $MK=ML$ será suficiente demostrar que $\angle KLM=\angle MKL$, o sea, que $\alpha+\beta=\gamma+\theta$.



Por potencia del punto S con respecto a la circunferencia Γ tenemos que

$$SB \cdot SA = SC^2.$$

Pero $SC = SP$, entonces $SB \cdot SA = SP^2$ de donde SP es tangente al circuncírculo del triángulo ABP y obtenemos que $\angle BPS = \angle BAP = \angle BAK = \beta$. Pero también $\angle BLK = \beta$, así que $\angle BPS = \angle BLK$ de donde PS es paralela a KL y $\angle SPK = \angle PKL = \gamma$.
Por otra parte,

$$\angle KPC = \angle MCA + \angle KAC = \theta + \lambda \ \text{ y } \ \angle SCB = \angle BAC = \beta + \lambda.$$

Como $SP = SC$, tenemos que $\angle PCS = \angle SPC$, pero

$$\angle PCS = \angle MCB + \angle BCS = \alpha + \beta + \lambda$$

y

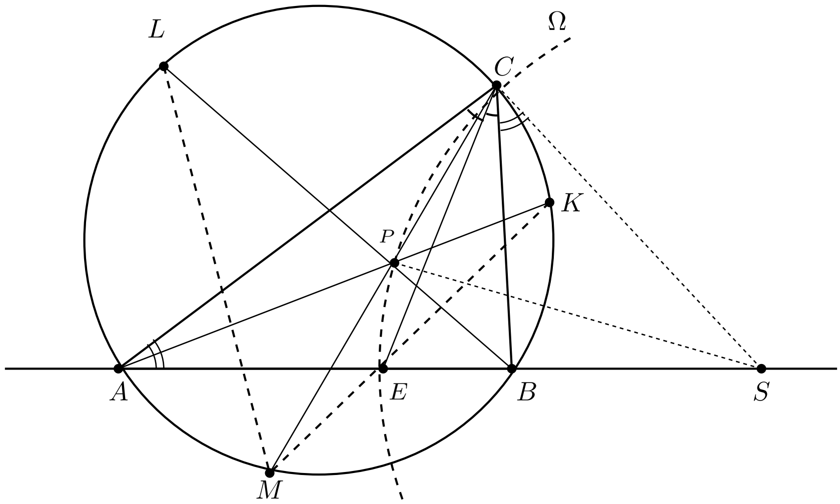
$$\angle SPC = \angle SPK + \angle KPC = \gamma + \theta + \lambda,$$

de donde $\alpha + \beta + \lambda = \gamma + \theta + \lambda$, es decir $\alpha + \beta = \gamma + \theta$, como queríamos.

Solución alternativa. Supongamos que $CA > CB$, luego el punto S está en el rayo AB. Por la semejanza entre los triángulos PKM y PCA, y los triángulos PLM y PCB tenemos que $\frac{PM}{KM} = \frac{PA}{CA}$ y $\frac{LM}{PM} = \frac{CB}{PB}$. Multiplicando las dos igualdades obtenemos,

$$\frac{LM}{KM} = \frac{CB}{CA} \cdot \frac{PA}{PB}$$

Por lo tanto, la relación $MK = ML$ es equivalente a $\frac{CB}{CA} = \frac{PB}{PA}$.
Denotemos por E al pie de la bisectiz de $\angle BCA$.



Recordemos que el lugar geométrico de los puntos X para los cuales $\frac{AX}{XB} = \frac{AC}{CB}$ es el círculo de Apolonio Ω cuyo centro Q está en la recta AB, y pasa por C y E. Por lo tanto, tenemos que $MK = ML$ si y sólo si P se encuentra en Ω, es decir, $QP = QC$. Tenemos que $\angle CES = \angle CAE + \angle ACE = \angle BCS + \angle ECB = \angle ECS$, luego $SC = SE$. Entonces, el punto S se encuentra en AB, así como en la mediatriz de CE y por lo tanto $S = Q$, de donde se sigue que $P \in \Omega$.

Problema 5. En cada una de las seis cajas $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ hay inicialmente sólo una moneda. Se permiten dos tipos de operaciones:

Tipo 1: Elegir una caja no vacía B_j, con $1 \leq j \leq 5$. Retirar una moneda de B_j y añadir dos monedas a B_{j+1}.

Tipo 2: Elegir una caja no vacía B_k, con $1 \leq k \leq 4$. Retirar una moneda de B_k e intercambiar los contenidos de las cajas (posiblemente vacías) B_{k+1} y B_{k+2}.

Determine si existe una sucesión finita de estas operaciones que deja a las cajas B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 vacías y a la caja B_6 con exactamente $2010^{2010^{2010}}$ monedas. (Observe que $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Solución. Demostraremos que sí existe tal sucesión finita de operaciones.
Denotemos por $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \to (a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ lo siguiente: si algunas cajas consecutivas contienen $a_1, \ldots, a_n$ monedas, entonces es posible realizar varias operaciones permitidas de tal manera que las cajas contengan $a'_1, \ldots, a'_n$ monedas, respectiva-

mente, mientras que los contenidos de las otras cajas no cambian.
Sea $A = 2010^{2010^{2010}}$. Demostraremos que

$$(1,1,1,1,1,1) \to (0,0,0,0,0,A),$$

demostrando primero dos resultados auxiliares.

Lema 1. $(a,0,0) \to (0,2^a,0)$ *para cada* $a \geq 1$.
Demostración. Demostraremos por inducción que $(a,0,0) \to (a-k,2^k,0)$ para cada $1 \leq k \leq a$. Si $k=1$ aplicamos la operación tipo 1 a la primera caja:

$$(a,0,0) \to (a-1,2,0) = (a-1,2^1,0).$$

Asumamos que $k < a$ y que el resultado se cumple para algún $k < a$. Comenzando con $(a-k,2^k,0)$, aplicamos la operación tipo 1 2^k veces a la caja de enmedio, hasta que se quede vacía. Luego aplicamos la operación tipo 2 a la primera caja:

$$(a-k,2^k,0) \to (a-k,2^k-1,2) \to \cdots \to (a-k,0,2^{k+1}) \to (a-k-1,2^{k+1},0).$$

Por lo tanto,

$$(a,0,0) \to (a-k,2^k,0) \to (a-k-1,2^{k+1},0).$$

Lema 2. *Para cada entero positivo* n*, sea* $P_n = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n}$ *(por ejemplo,* $P_3 = 2^{2^2} = 16$*).*
Entonces $(a,0,0,0) \to (0,P_a,0,0)$ *para cada* $a \geq 1$.
Demostración. De manera análoga a la prueba del Lema 1, demostraremos que

$$(a,0,0,0) \to (a-k,P_k,0,0)$$

para cada $1 \leq k \leq a$. Si $k=1$, aplicamos la operación tipo 1 a la primera caja:

$$(a,0,0,0) \to (a-1,2,0,0) = (a-1,P_1,0,0).$$

Asumamos que el resultado se cumple para algún $k < a$. Comenzando con $(a-k,P_k,0,0)$, aplicamos el Lema 1 y luego aplicamos la operación tipo 2 a la primera caja:

$$(a-k,P_k,0,0) \to (a-k,0,2^{P_k},0) = (a-k,0,P_{k+1},0) \to (a-k-1,P_{k+1},0,0).$$

Por lo tanto,

$$(a,0,0,0) \to (a-k,P_k,0,0) \to (a-k-1,P_{k+1},0,0).$$

Ahora regresamos a la solución del problema.
Primero aplicamos la operación tipo 1 a la caja 5, y luego aplicamos la operación tipo 2 a las cajas B_4, B_3, B_2 y B_1 en ese orden. Entonces, aplicando el Lema 2 dos veces tenemos,

$$\begin{aligned}&(1,1,1,1,1,1) \to (1,1,1,1,0,3) \to (1,1,1,0,3,0) \to (1,1,0,3,0,0) \to\\ &\to (1,0,3,0,0,0) \to (0,3,0,0,0,0) \to (0,0,P_3,0,0,0) = (0,0,P_{16},0,0,0) \to\\ &\to (0,0,0,P_{16},0,0).\end{aligned}$$

Ya tenemos más de A monedas en la caja B_4, ya que

$$\begin{aligned} A &= 2010^{2010^{2010}} < (2^{11})^{2010^{2010}} = 2^{11\cdot 2010^{2010}} \\ &< 2^{2010^{2011}} < 2^{(2^{11})^{2011}} = 2^{2^{11\cdot 2011}} < 2^{2^{2^{15}}} < P_{16}. \end{aligned}$$

Para disminuir el número de monedas en la caja B_4, aplicamos la operación tipo 2 a este montón repetidamente hasta que queden $\frac{A}{4}$ monedas. (En cada paso, quitamos una moneda de B_4 e intercambiamos las cajas B_5 y B_6.)

$$\begin{aligned} &(0,0,0,P_{16},0,0) \to (0,0,0,P_{16}-1,0,0) \to (0,0,0,P_{16}-2,0,0) \to \\ &\to \cdots \to (0,0,0,A/4,0,0). \end{aligned}$$

Finalmente, aplicamos la operación tipo 1 repetidamente a las cajas vacías B_4 y B_5:

$$(0,0,0,A/4,0,0) \to \cdots \to (0,0,0,0,A/2,0) \to \cdots \to (0,0,0,0,0,A).$$

Comentario. Comenzando con sólo 4 cajas, no es difícil verificar que podemos obtener a lo más 28 monedas en la última posición. Sin embargo, con 5 o 6 cajas el número máximo de monedas se dispara. Con 5 cajas se pueden obtener más de $2^{2^{14}}$ monedas, y con 6 cajas el máximo es mayor que $P_{P_{2^{14}}}$.

Problema 6. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión de números reales positivos. Se tiene que para algún entero positivo s,

$$a_n = \text{máx}\{a_k + a_{n-k} \ \text{ tal que } \ 1 \leq k \leq n-1\} \tag{3}$$

para todo $n > s$. Demuestre que existen enteros positivos l y N, con $l \leq s$, tales que $a_n = a_l + a_{n-l}$ para todo $n \geq N$.

Solución. De las condiciones del problema tenemos que cada a_n ($n > s$) se puede expresar como $a_n = a_{j_1} + a_{j_2}$ con j_1 y j_2 menores que n y $j_1 + j_2 = n$. Si, por ejemplo, $j_1 > s$ entonces podemos proceder de la misma forma con a_{j_1}, y así sucesivamente. Finalmente, representamos a_n en la forma

$$a_n = a_{i_1} + \cdots + a_{i_k}, \tag{4}$$

$$1 \leq i_j \leq s, \ \ i_1 + \cdots + i_k = n. \tag{5}$$

Además, si a_{i_1} y a_{i_2} son los números en (4) obtenidos en el último paso, entonces $i_1 + i_2 > s$. Luego, podemos adaptar la ecuación (5) como

$$1 \leq i_j \leq s, \ \ i_1 + \cdots + i_k = n, \ \ i_1 + i_2 > s. \tag{6}$$

Por otro lado, supongamos que los índices $i_1, \ldots, i_k$ satisfacen las condiciones en (6). Entonces, denotando $s_j = i_1 + \cdots + i_j$, de (3) tenemos que

$$a_n = a_{s_k} \geq a_{s_{k-1}} + a_{i_k} \geq a_{s_{k-2}} + a_{i_{k-1}} + a_{i_k} \geq \cdots \geq a_{i_1} + \cdots + a_{i_k}.$$

Resumiendo estas observaciones tenemos el siguiente resultado.

Afirmación. *Para cada $n > s$, tenemos que*

$$a_n = \text{máx}\{a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} | (i_1, \ldots, i_k) \text{ \textit{satisface} } (6)\}.$$

Ahora definimos

$$m = \max_{1 \le i \le s} \frac{a_i}{i}$$

y fijemos un índice $l \le s$ tal que $m = \frac{a_l}{l}$.
Consideremos algún $n \ge s^2 l + 2s$ y elijamos una expansión de a_n en la forma (4), (6). Entonces, tenemos que $n = i_1 + \cdots + i_k \le sk$, de donde $k \ge \frac{n}{s} \ge sl + 2$. Supongamos que ninguno de los números $i_3, \ldots, i_k$ es igual a l. Entonces, por el principio de las casillas existe un número $1 \le j \le s$ el cual aparece entre $i_3, \ldots, i_k$ al menos l veces, y claramente $j \ne l$. Borremos estas l ocurrencias de j de la secuencia $(i_1, \ldots, i_k)$, y agreguemos j ocurrencias de l en su lugar, obteniendo una secuencia $(i_1, i_2, i'_3, \ldots, i'_k)$ que también satisface (6). Por la Afirmación tenemos que

$$a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} = a_n \ge a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i'_3} + \cdots + a_{i'_k},$$

o, después de eliminar los términos iguales, obtenemos que $la_j \ge ja_l$, o bien $\frac{a_l}{l} \le \frac{a_j}{j}$. Por la definición de l, esto significa que $la_j = ja_l$, de donde

$$a_n = a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i'_3} + \cdots + a_{i'_k}.$$

Luego, para cada $n \ge s^2 l + 2s$ hemos encontrado una representación de la forma (4), (6) con $i_j = l$ para algún $j \ge 3$. Reacomodando los índices podemos asumir que $i_k = l$.
Finalmente, observe que en esta representación los índices $(i_1, \ldots, i_{k-1})$ satisfacen las condiciones (6) con n reemplazado por $n - l$. Luego, según la Afirmación obtenemos que

$$a_{n-l} + a_l \ge (a_{i_1} + \cdots + a_{i_{k-1}}) + a_l = a_n,$$

que por (3) implica que

$$a_n = a_{n-l} + a_l \quad \text{para cada} \quad n \ge s^2 l + 2s,$$

como se quería.

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas de enero a abril de 2011.

Enero

Publicación del noveno número de la revista "Tzaloa".

Enero, 20 al 30 de 2011, Colima, Colima

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes de entrenamiento y de los exámenes AMC.

Febrero, primera quincena

Envío de material a los estados (convocatoria, tríptico, nombramiento de delegado).

Marzo, primera quincena

Envío a los estados del primer examen de práctica propuesto por el Comité Organizador de la OMM.

Marzo, del 3 al 13, Guanajuato, Guanajuato

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de dos exámenes de entrenamiento, del examen AIME y del examen de la XXII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Marzo, 18 y 19

Aplicación en los estados registrados con este propósito del primer examen de práctica propuesto por el Comité Organizador de la OMM.

Abril

Publicación del décimo número de la revista "Tzaloa".

Apéndice

Teorema 1 (Factorización en primos) *Todo entero n mayor que 1 puede expresarse como un producto de primos (con, tal vez, solamente un factor).*
Ver [5].

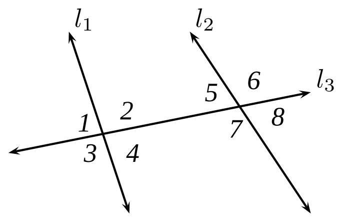
Criterios 2 (Divisibilidad) *Un número entero es divisible*

- *entre 2, si el dígito de las unidades es un número par.*
- *entre 3, si la suma de sus dígitos es divisible entre 3.*
- *entre 4, si el número formado por los dos últimos dígitos (el de las unidades y el de las decenas) es divisible entre 4.*
- *entre 5, si el dígito de las unidades es 5 ó 0.*
- *entre 6, si es divisible entre 2 y 3.*
- *entre 7, si lo es también el número de dos cifras que obtengamos con el siguiente proceso: tomamos el dígito de las unidades y lo duplicamos; el resultado se lo restamos al número original sin el dígito de las unidades; repetimos el proceso hasta obtener un número de dos cifras.*
- *entre 8, si el número formado por sus tres últimos dígitos es divisible entre 8.*
- *entre 9, si la suma de sus dígitos es divisible entre 9.*
- *entre 10, si el dígito de las unidades es 0.*
- *entre 11, si obtenemos 0 o un múltiplo de 11 con el siguiente proceso: numeramos todos los dígitos del número de izquierda a derecha. Sumamos todos los dígitos que ocupan un lugar par en el número y le restamos la suma de todos los dígitos que ocupan una posición impar en el número.*

Ver [6].

Teorema 3 (Fórmulas de área) *El área de un rectángulo de lados a y b es $a \times b$. El área de un triángulo es igual a $\frac{1}{2}hl$, donde l es la medida de un lado y h es la medida de la altura sobre dicho lado.*
El área de un círculo de radio r es igual a πr^2.
Ver [1, 2].

Definición 4 (Ángulos entre paralelas) *Cuando una recta intersecta a otras dos rectas se forman ocho ángulos que numeramos del 1 al 8, como se muestra en la figura.*



Si la recta l_3 intersecta a las rectas l_1 y l_2, decimos que es **transversal** *a ellas. Los ángulos 2, 4, 5 y 7 están entre las rectas l_1 y l_2, los llamamos* **ángulos internos**, *los ángulos restantes los llamamos* **ángulos externos**. *Los ángulos en lados opuestos por la transversal l_3 se llaman* **ángulos alternos**, *como por ejemplo 3 y 5. A los ángulos 4 y 5 les llamamos* **alternos internos** *y los ángulos 3 y 6 son* **alternos externos**.
A los ángulos que están en la posición correspondiente respecto a la transversal, como por ejemplo 3 y 7 los llamamos **ángulos correspondientes**. *Entonces, los pares de ángulos correspondientes en la figura anterior son 3 y 7, 1 y 5, 4 y 8, 2 y 6.*
Si l_1 y l_2 son paralelas los ángulos alternos internos son iguales.
Ver [2].

Teorema 5 (Suma de los ángulos internos de un triángulo) *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*
Ver [1, 2].

Teorema 6 (Teorema de Pitágoras) *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*
Ver [1, 2, 7].

Definición 7 (Congruencia de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*
Ver [1, 2].

Criterio 8 (Criterio de congruencia ALA) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como* **ángulo-lado-ángulo** *y lo denotamos como* **ALA**.
Ver [1, 2].

Criterio 9 (Criterio de congruencia LLL) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como* **lado-lado-lado** *y lo denotamos como* **LLL**.
Ver [1, 2].

Definición 10 (Semejanza de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir,*

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$
$$\angle ACB = \angle A'C'B'$$
$$\angle BAC = \angle B'A'C'$$

y sus lados homólogos son proporcionales, esto es

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Ver [1, 2].

Criterio 11 (Criterio de semejanza AA) *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*
Ver [1, 2].

Definición 12 (Bisectriz) *Dado un ángulo $\angle ABC$ su bisectriz es la recta que lo divide en dos ángulos iguales.*
Ver [1, 2].

Teorema 13 (Bisectrices) *Las bisectrices internas de un triángulo concurren en un punto que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo. El punto de concurrencia se llama incentro.*
Ver [1, 2].

Teorema 14 (Medida del ángulo inscrito) *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco.*
Ver [1, 2].

Definición 15 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero es cíclico si existe un círculo que pase por los cuatro vértices.*
Ver [2].

Teorema 16 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a 180°, es decir, si y sólo si*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180^\circ.$$

Ver [2].

Bibliografía

[1] A. Baldor. *Geometría plana y del espacio*. Publicaciones Cultural, México, 1999.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM. Tercera edición, 2007.

[4] R. Grimaldi, *Matemáticas Discreta y Combinatoria*. Addison Wesley Longman, Pearson. Tercera edición, 1998.

[5] I. Niven, H. Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[6] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[7] A. Rechtman Bulajich. *Algunas demostraciones del teorema de Pitágoras*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 1, 2010.

[8] N. Vilenkin. *¿De cuántas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Directorio

Directorio de los delegados estatales

Aguascalientes–*Castillo Flores Sandra Lilia*

ITESM Campus Aguascalientes,
Av. Augenio Garza Sada #1500, CP 20328, Aguascalientes, Aguascalientes,
(449) 9 100 900 ext 5401,
(449) 148 42 22,
sandra.castillo@itesm.mx,

Baja California–*Yee Romero Carlos*

Universidad Autónoma de Baja California,
Km 103 carretera Tijuana Ensenada,
646 1745925 ext 116,
646 1170470,
646 1744560,
carlos.yee@uabc.edu.mx,
cyeer.mxl@gmail.com,
http://www.ommbc.org,

Baja California Sur–*Ríos Torres Jesús Eduardo*

CBTIS #62,
JALISCO Y MELITON ALBAÑEZ,
(612) 1226876,
(612) 1229976,
(612) 1416591,
(612) 1229976,
eduardo.rios.73@gmail.com,
jerios@yahoo.com.mx,
www.institutomardecortes.edu.mx,

Campeche–*Moncada Bolón Juan Jesús*

Universidad Autónoma de Campeche, facultad de Ingeniería,
Av. Agustín Melgar s/n entre Juan de la Barrera y calle 20,
981 8119800 ext. 70000,
981 8116885,
981 117 5207,
981 8119800 ext. 70000,
jjmb72@gmail.com,
jjmoncad@uacam.mx,
www.pythagoras.com.mx,

Chiapas–*Soler Zapata María del Rosario*

Centro de Estudios en Física y Matemáticas Básicas y Aplicadas de la Universidad Autónoma de Chiapas (CEFyMAP-UNACH),
4ta. Oriente 1428 (Entre 13 y 14 Norte) Barrio La Pimienta C.P. 29034, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas,
96161 83430 ext 112,
961 127 10 17,
96161 83430,
msolerza@unach.mx,
mrsolerz@yahoo.com.mx,

Chihuahua–*Salgado Armendáriz Ernesto*

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez,
Henri Dunant 4016, Zona Pronaf. C.P. 32315,
6566882124,
6566888887,
6561440251,
esalgado@ommch.org,
esalgado@uacj.mx,
http://ommch.org,

Coahuila–*Morelos Escobar Silvia Carmen*

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Coahuila,
Edificio “D” Unidad Camporredondo. Planta Baja. Saltillo Coahuila,
(844) 4144739,
844 4148869,
844 4377219,
844 411 8257,
silvia.morelos@gmail.com,
smorelos2002@yahoo.com.mx,

Colima–*Isaías Castellanos Luis Ángel*

Facultad de Ciencias, Universidad de Colima,
Av. Bernal Daz Del Castillo No. 340, Villa San Sebastián,
(312) 3161135,
(312) 1595749,
(312) 3194730,
(312) 3161135,
ommcol@ucol.mx,
luisangel030891@hotmail.com,
ommcolima.ucol.mx,

Distrito Federal–*Bravo Mojica Alejandro*

Facultad de Ciencias, UNAM,
Ciudad Universitaria,
5538763571,
abm@ciencias.unam.mx,

Durango–*Mata Romero Armando*

Universidad Juárez del Estado de Durango,
Constitución #404 Sur Zona Centro C.P. 34000 Durango, Dgo.,
(618) 1301139,
(618) 8188292,
(618) 8408077,
(618) 1301139,
angelhiram@hotmail.com,

Estado de México–*Rivera Bobadilla Olga*

Facultad de Ciencias, UAEMex,
Instituto Literario No. 100, Col. Centro, Toluca Estado de México CP 50000,
722 296 55 56,
722 2079808,
722 3982462,
722 2965554,
orb@uaemex.mx,
olgarb@yahoo.com,

Guanajuato–*Cruz López Manuel*

Departamento de Matemáticas, Universidad de Guanajuato,
Jalisco S/N Valenciana Guanajuato,
(473) 1 02 61 02 Ext. 1221,
(473) 1 02 61 03 Ext. 1202,
(473) 6 52 01 29,
direc.demat@quijote.ugto.mx,
www.demat.ugto.mx,

Guerrero–*Delgado Espinoza Gonzalo*

Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas,
Carlos E. Adame 54. Colonia Garita, Acapulco Guerrero,
744 4 30 9254,
deggonzalo@yahoo.com.mx,

Hidalgo–*Itzá Ortiz Benjamín Alfonso*

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, CIMA,
Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5 Mineral de la Reforma Hidalgo,
7717172000 ext 6162,
7717478089,
7717172109,
itza@uaeh.edu.mx,
http://www.uaeh.edu.mx/investigacion/matematicas/curriculums/benjamin.html,

Jalisco–*Guzmán Flores María Eugenia*

Universidad de Guadalajara CUCEI,
Av. Revolución 1500, Col. Olímpica, C.P. 44430, Guadalajara, Jal,
(33)13785900 ext 27753,
(33)13785900 ext 27755,
3310955163,
floresguz55@yahoo.com.mx,
marugeniag@gmail.com,

Michoacán–*Sepúlveda López Armando*

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Michoacana,
Francisco J. Mújica s/n, Ciudad Universitaria, Edificio Nuevo,
4433223500 Ext. 1225,
4433157923,
4432029466,
asepulve@live.com.mx,
asepulvequmich.mx,

Morelos–*Sbitneva Tavdishvili Larissa*

Universidad Autónoma del Estado de Morelos,
Av. Universidad 1001, Colonia Chamilpa, 62209, Cuernavaca, Morelos,
7773297020,
7773134466,
7771090682,
7773297040,
larissa@uaem.mx,
larissasbitneva@hotmail.com,

Nayarit–*Jara Ulloa Francisco Javier*

Universidad Autónoma de Nayarit,
Cd. de la Cultura Amado Nervo S/N,
311 7998552,
311 2118809,
3111217251,
311 2118809,
jaraulloa@gmail.com,
jaraulloa@hotmail.com,

Nuevo León–*Alanís Durán Alfredo*

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León,
Cd. Universitaria, Apartado postal 101-F San Nicolás de los Garza NL,
(81)83294030,
(81)83131626,
8115287582,
(81)83522954,
aalanis56@hotmail.com,
serolfrotech@googlemail.com,
https://sites.google.com/site/eommnl,

Oaxaca–*Carrillo Uribe Sara*

Academia de Matemáticas, Escuela de Ciencias, Universidad Autónoma ’Benito Juárez’de Oaxaca,
Independencia No. 43, San Sebastian Tutla, Oaxaca, C. P. 71246,
951 1980514,
(915) 1 44 80 56,
sara.carrillo.u@gmail.com,
mushewini@hotmail.com,

Puebla–*Juárez Ramírez María Araceli*

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.,
Ave San Claudio y Rio Verde s/n CU San Manuel CP 72570 Puebla, Pue.,
2222295500 ext 7557, 7554, 7578,
2222458773,
2221333689,
2222295636,
arjuarez@fcfm.buap.mx,
jilecara@hotmail.com,

Querétaro–*Valerio López Teresa de Jesús*

Universidad Autónoma de Querétaro, Facultad de Ingeniería,
Cerro de las Campana s/n, Col. Centro, Querétaro, CP 76100, Querétaro, Querétaro,
(442) 1 92 12 00 ext 6015,
valeriotere@gmail.com,
teresa.valerio@webtelmex.net.mx,

Quintana Roo–*Ramón Barrios Alicia*

Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo Plantel Cancún dos,
Region 102, ruta 4 primera entrada. Cancún, Quintana Roo.,
(998) 1 74 01 56,
(998) 8 88 72 04,
olimpiadasquintanaroo@hotmail.com,
tita1970@hotmail.com,

San Luis Potosí–*Flores Alatorre Eugenio Daniel*

Universidad Autónoma de San Luis Potosí,
Ave. Salvador Nava, esquina Manuel Nava,
(444) 1896756,
floreseugenio@hotmail.com,
ommslp@gmail.com,

Sinaloa–*Pardo Viera Nicolás*

Universidad Autónoma de Sinaloa,
Angel Flores y Riva Palacios s/n, col centro, Culiacán Sinaloa,
(667) 7161154,
(667) 7533480,
(667) 1960137,
(667) 7161154,
pardoviera@hotmail.com,
pardo@uas.uasnet.mx,

Sonora–*Avendaño Camacho Misael*

Universidad de Sonora,
Blvd. Rosales Y Luis Encinas s/n Col Centro, Hermosillo, Sonora,
6622592155,
6621936631,
6622592219,
misaelave@mat.uson.mx,
misaelave@gmail.com,

Tabasco–*López López Jorge*

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco,
Km 1 Carretera Cunduacán-Jalpa, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab.,
(914) 3360928,
(914) 1001886,
(914) 3360928,
loppital1@hotmail.com,
jorge.lopez@dacb.ujat.mx,

Tamaulipas–*Llanos Portales Ramón Jardiel*

Universidad Autónoma de Tamaulipas,
Centro Universitario Victoria, Cd. Victoria Tam.,
834-3120279,
8341381723,
8341385818,
8341381723,
rjardiel5@hotmail.com,
rllanos@uat.edu.mx,
www.matetam.com,

Tlaxcala–*Pérez Vázquez José Erasmo*

Universidad Autónoma de Tlaxcala,
Calzada Apizaquito S/N; Apizaco, Tlaxcala; Apartado Postal 140.,
012414172544,
5518736513,
joserasmo25@gmail.com,

Veracruz–*López Martínez Raquiel Rufino*

UNIVERSIDAD VERACRUZANA,
Lomas del Estadio s/n Zona Universitaria, CP 91090 Xalapa, Ver.,
012288421745,
012281411035,
2281248356,
012281411035,
ralopez@uv.mx,
ralopez71@gmail.com,

Yucatán–*Solís Gamboa Didier Adán*

Universidad Autónoma de Yucatán,
Periférico Norte, Tablaje 13615. Mérida, Yucatán,
9999423140,
9991955789,
9991891707,
9999423140,
didier.solis@uady.mx,
quijo77@gmail.com,
www.matematicas.uady.mx,

Zacatecas–*Calvillo Guevara Nancy Janeth*

UAZ - Unidad Académica de Matemáticas,
Calzada Solidaridad esq. Camino a la Bufa,
492 922 99 75,
492 923 94 07,
458 100 09 42,
492 922 99 75,
ncalvill@mate.reduaz.mx,
nancycalvillo@gmail.com,
matematicas.reduaz.mx, ommzacatecas.com,

Directorio del Comité Organizador de la OMM

Anne Alberro Semerena
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (777) 3 81 03 80
Fax (777) 3 29 70 40
aalberro@buzon.uaem.mx

Octavio Arizmendi Echegaray
Calle Alhóndiga No. 10,
Guanajuato, Guanajuato.
Tel. (473) 7 34 14 03
mor2_octavio@hotmail.com

Ignacio Barradas Bribiesca
Universidad de Guanajuato
L. de Retana #5, Centro
36000, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 00 06 ext 2006
barradas@quijote.ugto.mx

Radmila Bulajich Manfrino
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
bulajich@servm.fc.uaem.mx

Gabriela Campero Arena
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 48 67
Fax (55) 56 22 48 66
gabriela@matematicas.unam.mx

Fernando Campos Garca
1a de Ángel Rico 85
AU.H. Vicente Guerrero
09200, Iztapalapa, Distrito Federal.
Tel. (55) 34 63 75 43
fermexico89@hotmail.com

José Antonio Climent Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 24 59 22
Fax (55) 56 22 48 59
jach@fciencias.unam.mx

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 49 25
Fax (55) 56 22 48 59
cobian@matematicas.unam.mx

David Cossío Ruiz
Instituto Tecnológico de Estudios
Superiores de Monterrey,
Campus Cd. Juárez,
Av. Tomás Fernández 8945
32320, Cd. Juárez, Chihuahua
Tel. (656) 6 29 91 09
Fax (656) 6 29 91 01
sirio11@gmail.com

Luis Cruz Romo
SITE
Sistemas de Inteligencia Territorial Estratégica
lcruzromo@gmail.com

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Guanajuato
Callejón Jalisco s/n
Mineral de Valencia
36240, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 01 40
marcant@cimat.mx
fuerunt@gmail.com

José Antonio Gómez Ortega
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 48 64
Fax (55) 56 22 48 64
jago@hp.fciencias.unam.mx

Jesús Jerónimo Castro
CIMAT
Apartado Postal 402,
36000, Guanajuato, Guanajuato.
Tel. (473) 7 32 71 55
Fax (473) 7 32 57 49
jeronimo@cimat.mx

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Primera Cerrada de Alfalfares 41-2
Rinconada Coapa Primera Sección, Tlalpan
14330, México, D.F.
Tel. (55) 26 52 23 29
ssbmplayer@gmail.com

Carlos Jacob Rubio Barrios
Universidad Autónoma de Yucatán
Periférico norte tablaje 13615
97119, Mérida, Yucatán
Tel. (999) 942-3140 al 49
Fax (999) 942-31-40
jacob.rubio@gmail.com

Elena Ruiz Velázquez
Altair 12
Col. Lomas de Palmira
62550, Cuernavaca, Mor.
Tel. (777) 320 54 39
Cel. (777) 133 39 83
eleniux@gmail.com
A00375640@itesm.mx

Carmen Sosa Garza
Facultad de Ingeniería, UAQ
Cerro de las Campanas s/n
Querétaro, Querétaro
Tel. (442) 1 92 12 64 ext. 121 136
Fax (442) 1 92 12 646
carsg@uaq.mx

David Guadalupe Torres Flores
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Guanajuato
Callejón Jalisco s/n
Mineral de Valencia
36240, Guanajuato, Guanajuato.
Tel. (473) 73 23 587
dtorres@cimat.mx
ddtorresf@gmail.com

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
rogelio@matcuer.unam.mx

Eduardo Velasco Barreras
Universidad de Sonora
Calle Yucas 16, Vista Bella
83170, Hermosillo, Sonora.
Tel. (662) 2 19 10 07
hamsteritokeweb@hotmail.com

Hugo Villanueva Méndez
Instituto de Matemáticas, UNAM
Cub. 4 de Becarios,
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria
Coyoacán 04510,
México, D.F.
Tel. (55) 56 22 45 32
Cel. 55 33 52 36 27
vill_hugo@hotmail.com
hvillan@matem.unam.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@fciencias.unam.mx`

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

`http://www.omm.unam.mx/`