TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2013, No. 1

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.omm.unam.mx

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Impreso y hecho en México.
Enero de 2013.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1] es la revista trimestral de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Su publicación es una iniciativa más de la Sociedad Matemática Mexicana (SMM) para contribuir al fortalecimiento del movimiento olímpico y su objetivo es brindar un órgano de difusión adecuado para satisfacer las necesidades de profesores y estudiantes de nivel medio superior, que cada año se preparan y participan en los distintos concursos de matemáticas que se realizan tanto dentro como fuera de nuestro país.

Aunque la selección de los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que presentamos se realiza pensando especialmente en la comunidad olímpica, sus contenidos resultan también de interés para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos excesivos y el uso de matemática simple, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes y en general, para cualquier aficionado a las matemáticas.

Tzaloa, Año 2013, Número 1

Con gran entusiasmo y renovadas energías inciamos este nuevo ciclo plenamente convencidos de que, durante 2013, el prestigio de México seguirá ascendiendo y que las delegaciones que lo representarán en los próximos certámenes internacionales refrendarán los logros obtenidos en los últimos años.

En esta ocasión, decidimos dedicar el espacio de nuestro tradicional artículo de temas matemáticos para revisar con cierta profundidad *El Teorema Fundamental de la Aritmética (TFA)*. En muchos de los problemas olímpicos relacionados con temas de divisibilidad o con la teoría de números es muy frecuente el uso del TFA, sin embargo, dado el nivel de abstracción y complejidad que implica su demostración formal, no es frecuente que en los cursos regulares del bachillerato se le estudie con la suficiencia y

[1]Tzaloa es un vocablo náhuatl cuyo significado es: *aprender*.

rigor que merece. Es así, que con el fin de subsanar esta carencia, Jacob Rubio se dió a la tarea de elaborar este trabajo que estamos seguros será apreciado por todos nuestros lectores.

Por otro lado, en la sección nacional encontrarás los resultados completos de la 26^a *Olimpiada Mexicana de Matemáticas*, incluyendo los nombres de todos los ganadores de primer lugar así como el ranking actualizado por estados de la república. Además, también incluimos el examen que se aplicó en esta ocasión, dejando la publicación de las soluciones para un siguiente número de la revista.

En la sección internacional hallarás los resultados y el examen de la *XXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas* así como los resultados y los exámenes con soluciones tanto de la *XIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y del Caribe*, como de la 53^a *Olimpiada Internacional de Matemáticas*.

Como siempre, hemos preparado una cuidadosa selección de *Problemas de Práctica* y de *Entrenamiento*, misma que esperamos sea útil para tu preparación. Por último, no olvidamos incluir toda la información detallada para el primer cuatrimestre del calendario 2013, así como los datos actualizados de los delegados estatales y del directorio del Comité Olímpico.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Hace más de 26 años que la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Desde sus inicios, este programa se ha visto fortalecido gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado inumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

27ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 27^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1994. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2013-2014 y, para el 1° de julio de 2014, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 27^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 24 al 30 de noviembre de 2013 en el estado de Hidalgo. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2014: la XXVI Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, que se llevará a cabo en el mes de marzo; la XVI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, que se celebrará en el mes de junio en Costa Rica; la 55^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se llevará a cabo en Sudáfrica en el mes de julio, y la XXIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en el mes de septiembre en Honduras.

El Teorema Fundamental de la Aritmética

Por Carlos Jacob Rubio Barrios

Nivel Intermedio

Cuando un número entero a se divide por un número entero b y se obtiene residuo cero, es decir, $a = bq$ para algún entero q, decimos que b es un divisor de a o que b divide a, y se denota por $b \mid a$. Así por ejemplo, 4 y 5 son divisores de 20. Al número 20 podemos encontrarle otros números que tienen la misma propiedad que el 5 o el 4; todos serían sus *divisores*. En concreto, $1, 2, 4, 5, 10, 20$ son todos los divisores positivos de 20. Sin embargo, existen números cuyos divisores positivos son sólo dos: el mismo número y el 1. A estos números los denominamos *números primos*. Así pues, $2, 3, 5, 7, 11, 13$ son los ejemplos más sencillos de números primos. El número 1 no se considera primo por razones que veremos más adelante. Un número entero n que no es primo, es decir, que tiene un divisor a tal que $1 < a < n$, se llama *compuesto*.

Los números primos son los ladrillos con los que se construye el edificio de todos los números. Todo número se puede escribir como producto de números primos y esta manera de escribirlo es única. Por ejemplo, 30 se puede escribir como producto de 2, 3 y 5. Este resultado sobre la factorización de un número como producto de números primos era conocido ya por los griegos y hoy día se conoce como el *Teorema Fundamental de la Aritmética (TFA)* por su importancia.

Los números primos poseen una propiedad muy especial que, en general, no poseen los números compuestos, a saber, si p es un número primo y a y b son enteros tales que $p \mid ab$, entonces $p \mid a$ o $p \mid b$. La demostración de esta propiedad no la daremos aquí, y la dejaremos para un futuro artículo, aunque usaremos la propiedad en la demostración del TFA. Sin embargo, veamos que cuando p no es primo, en general no se cumple dicha propiedad. Consideremos el número 6 que no es primo. Observemos que 6 divide a $8 \cdot 9$ y sin embargo, 6 no divide ni a 8 ni a 9.

Comenzaremos demostrando un resultado que será útil a lo largo de todo el texto.

Proposición 1 *Todo entero $n > 1$ tiene un divisor primo.*

Demostración. Si n es primo, entonces n es un divisor primo de n. Supongamos que n no es primo y sea a su divisor más pequeño mayor que 1. Si a no es primo, entonces $a = a_1a_2$ con $1 < a_1 \leq a_2 < a$. Como $a_1 \mid a$ y $a \mid n$, tenemos que $a_1 \mid n$. Luego, a_1 es un divisor de n menor que a y mayor que 1, lo cual contradice la elección de a. Por lo tanto, a es un divisor primo de n. $\square$

Los números primos han suscitado a lo largo de la historia la curiosidad de los matemáticos, tanto profesionales como aficionados. Ya Euclides en el año 300 a.C. (en la proposición 20 del libro IX de los *Elementos*), demostró que hay una infinidad de números primos. A continuación damos la demostración de este hecho debida a Euclides.

Proposición 2 *Hay una infinidad de números primos.*

Demostración. Supongamos, por contradicción, que hay sólo un número finito de números primos, digamos $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Consideremos el número $N = p_1p_2 \cdots p_k + 1$. Por la Proposición 1 sabemos que N tiene un divisor primo q. Luego, q debe ser uno de los números primos de la lista. Entonces, q divide al producto $p_1p_2 \cdots p_k$ y a N. Por lo tanto, q divide también a la diferencia $N - p_1p_2 \cdots p_k$ que es igual a 1, lo cual no es posible. Por lo tanto, hay una infinidad de números primos. $\square$

Un problema interesante es preguntarse si un número aleatorio es primo o no. Para saberlo, lo más sencillo es empezar a dividir el número por los primos más pequeños. Comenzamos por el 2 y si la división da residuo 0 sabemos que no puede ser primo. En caso contrario, probamos con el 3: si la división da residuo 0 no es primo, en caso contrario, probamos con el 5. Podemos continuar de esta forma con todos los números primos más pequeños que el número; si ninguna de las divisiones anteriores da residuo 0 podemos afirmar que el número que estábamos probando es primo. Realmente no hay que probar con todos los números primos más pequeños que nuestro número; podemos quedarnos con los que sean menores o iguales que la raíz cuadrada del número como se demuestra en el siguiente resultado.

Proposición 3 *Si $n > 1$ es un número compuesto, entonces n tiene un divisor primo p tal que $p \leq \sqrt{n}$.*

Demostración. Sea $n > 1$ un número compuesto. Entonces, n tiene un divisor d tal que $1 < d < n$. Escribamos $n = dd'$ con d' un entero. Observemos que $1 < d' < n$, pues si $d' = 1$ entonces $n = d$ que es una contradicción, y si $d' = n$, entonces $d = 1$ que es una contradicción. Si $d > \sqrt{n}$ y $d' > \sqrt{n}$, entonces $n = dd' > \sqrt{n}\sqrt{n} = n$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $d \leq \sqrt{n}$ o $d' \leq \sqrt{n}$. Supongamos que $d \leq \sqrt{n}$. Aplicando la Proposición 1, se sigue que d tiene un divisor primo $p \leq d \leq \sqrt{n}$. Luego, p es también un divisor primo de n y $p \leq \sqrt{n}$. El otro caso es análogo. $\square$

A manera de ejemplo, supongamos que queremos determinar si el número 2011 es primo. De acuerdo con la proposición anterior, 2011 será primo si no es divisible entre ningún primo menor o igual que $\sqrt{2011}$. Como $44 < \sqrt{2011} < 45$, los números primos menores o iguales que 44 son: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41$ y 43. Haciendo las divisiones de 2011 entre cada uno de estos números primos, podemos darnos cuenta que ninguna división da residuo 0 y por lo tanto, concluimos que 2011 es un número primo.

Estamos listos para enunciar y demostrar el TFA.

Teorema 4 (TFA) *Todo entero $n > 1$ es primo o se puede escribir como un producto de números primos. Además, esta factorización como producto de primos es única, es decir, si $n = p_1p_2 \cdots p_r = q_1q_2 \cdots q_s$, donde los p_i y los q_i son primos, entonces $r = s$ y los primos p_i son los primos q_i en algún orden.*

Demostración. Sea $n > 1$ un entero compuesto, es decir, no primo. De acuerdo con la Proposición 1, n tiene un divisor primo q_1. Entonces, $n = q_1q_2$ con q_2 entero tal que $1 < q_2 < n$. Si q_2 es primo, entonces n es producto de números primos. Si q_2 no es primo, entonces nuevamente por la Proposición 1, q_2 tiene un divisor primo q_3. Entonces, $q_2 = q_3q_4$ con q_3 primo y $1 < q_4 < q_2$, de donde $n = q_1q_3q_4$. Si q_4 es primo, entonces n es producto de primos. Si q_4 no es primo, entonces por la Proposición 1, q_4 tiene un divisor primo q_5. Luego, $q_4 = q_5q_6$ con q_5 primo y $1 < q_6 < q_4 < q_2$, de donde $n = q_1q_3q_5q_6$. Si q_6 es primo, entonces n es producto de primos. Si q_6 no es primo, continuamos el proceso. Como hay un número finito de enteros entre 1 y q_2, el proceso no puede continuar de forma indefinida, de modo que en un número finito de pasos obtendremos que $n = q_1q_3q_5 \cdots q_r$ con $q_1, q_3, \ldots, q_r$ números primos.
Para la unicidad de la factorización, supongamos que existe un entero $n > 1$ con dos factorizaciones distintas, y consideremos al menor de dichos enteros (cualquier entero menor que n y mayor que 1, tiene factorización única), digamos,

$$n = p_1p_2 \cdots p_r = q_1q_2 \cdots q_s,$$

donde $p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_s$ son números primos. Es claro que $r \geq 2$ y $s \geq 2$. Demostraremos que $p_i \neq q_j$ para cada $i = 1, 2, \ldots, r$ y cada $j = 1, 2, \ldots, s$. Supongamos, por contradicción, que $p_i = q_j$ para algunos i, j. Podemos suponer que $p_1 = q_1$ ya que el orden de los factores no importa. Tenemos que $n > p_1$ (pues si $n = p_1$, entonces $n = q_1$ y n tendría factorización única). Entonces $1 < \frac{n}{p_1} < n$, de modo que $\frac{n}{p_1}$ tiene factorización única como producto de primos. Como,

$$\frac{n}{p_1} = p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s,$$

tenemos que $r = s$ y $p_i = q_i$ para todo $i = 2, \ldots, r$. Esto implica que n tiene factorización única, lo que es una contradicción. Por lo tanto $p_i \neq q_j$ para cada $i = 1, \ldots, r$ y cada $j = 1, \ldots, s$.
Ahora, como p_1 divide al producto $q_1q_2 \cdots q_s$, tenemos que $p_1 \mid q_j$ para algún j. Luego $p_1 = q_j$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, la factorización de n como producto de primos es única. $\square$

El hecho de que el número 1 no se considere primo, es una convención. Sin embargo, esta convención es necesaria para que se tenga la unicidad en el TFA. Si permitiéramos que el número 1 sea primo, entonces $6 = 2\cdot 3 = 1\cdot 2\cdot 3 = 1\cdot 1\cdot 2\cdot 3$ serían factorizaciones distintas de 6 como producto de números primos.

Dado un entero $n > 1$ compuesto, podemos escribir su factorización en producto de primos en la forma $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ donde los primos p_i son tales que $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ son enteros positivos. Esta expresión de n recibe el nombre de *factorización canónica*. Por ejemplo, $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $92 = 2^2 \cdot 23$, $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $125 = 5^3$.

A continuación veremos algunas aplicaciones del TFA en la solución de problemas.

Ejemplo 1. Sean a y b enteros positivos primos relativos. Demostrar que si ab es un cuadrado, entonces a y b también son cuadrados.

Solución. Por hipótesis, existe un entero positivo n tal que $ab = n^2$. Consideremos las descomposiciones canónicas de a y b,

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}, \quad b = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_s^{\beta_s},$$

donde los primos p_i son distintos entre sí, así como los primos q_j. Entonces,

$$ab = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_s^{\beta_s}.$$

Como a y b son primos relativos, tenemos que $p_i \neq q_j$ para cada $i = 1, \ldots, r$ y cada $j = 1, \ldots, s$, lo que implica que $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \cdot q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_s^{\beta_s}$ es la factorización canónica de n^2. Como los primos que dividen a n^2 son los mismos primos que dividen a n (si p es primo, entonces $p \mid n^2$ si y sólo si $p \mid n$), el TFA implica que los exponentes que aparecen en la factorización canónica de n^2 son enteros pares, es decir, $\alpha_i = 2\alpha_i'$ para cada $i = 1, \ldots, r$ y $\beta_j = 2\beta_j'$ para cada $j = 1, \ldots, s$. De aquí se sigue que a y b son ambos cuadrados de enteros.

Ejemplo 2. Sean a, b y c enteros positivos. Demostrar que si ab, ac y bc son cubos de enteros, entonces a, b y c también son cubos de enteros.

Solución. Escribamos las factorizaciones en primos de a, b y c, de la siguiente manera:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}, \quad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}, \quad c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_r^{\gamma_r},$$

donde los primos p_i son distintos y los exponentes de cada factorización son enteros mayores o iguales que 0 (observemos que al permitir exponentes iguales a cero, puede haber primos que dividan a alguno de los tres números pero a cualquiera de los otros dos no).
Como $ab = p_1^{\alpha_1+\beta_1} p_2^{\alpha_2+\beta_2} \cdots p_r^{\alpha_r+\beta_r}$ es el cubo de un entero, tenemos por el TFA que $ab = (p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r})^3$ donde los exponentes son mayores o iguales que cero, de donde $\alpha_i + \beta_i = 3k_i$ para cada $i = 1, \ldots, r$. De manera análoga, como ac y bc son cubos de enteros, tenemos que $\alpha_i + \gamma_i = 3l_i$ para cada $i = 1, \ldots, r$, y $\beta_i + \gamma_i = 3m_i$ para cada $i = 1, \ldots, r$. Resolviendo el sistema de ecuaciones,

$$\alpha_i + \beta_i = 3k_i, \quad \alpha_i + \gamma_i = 3l_i, \quad \beta_i + \gamma_i = 3m_i,$$

obtenemos que $2\beta_i = 3(k_i - l_i + m_i)$ de donde 2 divide a $k_i - l_i + m_i$ ya que 2 y 3 son primos relativos. De aquí se sigue que β_i es múltiplo de 3, y por lo tanto $\alpha_i = 3k_i - \beta_i$

y $\gamma_i = 3m_i - \beta_i$ también son múltiplos de 3 para cada $i = 1, \ldots, r$. Luego, a, b y c son cubos de enteros.

Ejemplo 3. Sean a, b, r, s enteros positivos. Si a y b son primos relativos y $r^a = s^b$, demostrar que existe un entero n tal que $r = n^b$ y $s = n^a$.

Solución. Como $r^a = s^b$, el TFA implica que los números primos que dividen a r son los mismos primos que dividen a s. Supongamos que éstos son $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Sea p cualquiera de estos números primos, y supongamos que p^α es la mayor potencia de p que divide a r y p^β es la mayor potencia de p que divide a s. Entonces,

$$r^a = s^b \Rightarrow p^{\alpha a} = p^{\beta b} \Rightarrow \alpha a = \beta b.$$

De aquí, $a \mid \beta b$ y $b \mid \alpha a$. Como a y b son primos relativos, tenemos que $a \mid \beta$ y $b \mid \alpha$. Escribamos $\beta = a\beta_p$ y $\alpha = b\alpha_p$. Entonces, $\alpha a = \beta b \Rightarrow ab\alpha_p = ab\beta_p \Rightarrow \alpha_p = \beta_p$. Ahora, para cada primo p_i que divide a r (y por lo tanto a s), consideremos el entero α_{p_i}. Finalmente, es fácil ver que el número $n = p_1^{\alpha_{p_1}} p_2^{\alpha_{p_2}} \cdots p_k^{\alpha_{p_k}}$ satisface las condiciones del problema.

Ejemplo 4. Sean a, b, c y d enteros positivos tales que $a^3 = b^2$, $c^3 = d^2$ y $a - c = 25$. Determinar los valores de a, b, c y d.

Solución. Como 2 y 3 son primos relativos, podemos aplicar el ejemplo anterior a las igualdades $a^3 = b^2$ y $c^3 = d^2$. Así, existen enteros positivos n y m tales que $a = n^2$, $b = n^3$, $c = m^2$ y $d = m^3$. Luego, $25 = a - c = n^2 - m^2 = (n+m)(n-m)$ de donde la única posibilidad es $n + m = 25$ y $n - m = 1$. De aquí obtenemos que $n = 13$ y $m = 12$. Por lo tanto, $a = 13^2$, $b = 13^3$, $c = 12^2$ y $d = 12^3$.

Ejemplo 5. Determinar todas las parejas de enteros positivos (m, n) con $m \neq n$ que satisfacen la ecuación $m^n = n^m$.

Solución. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $m < n$. La igualdad $m^n = n^m$ junto con el TFA, nos dicen que los divisores primos de m son los mismos divisores primos de n. Escribamos las factorizaciones canónicas de m y n,

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}, \quad n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k},$$

donde los primos p_i son distintos entre sí, y los exponentes α_i y β_i son enteros positivos. Luego, $(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k})^n = (p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k})^m$, de donde $\alpha_i n = m\beta_i$ para cada $i = 1, \ldots, k$. Como $m < n$, necesariamente $\alpha_i \leq \beta_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, lo que significa que $m \mid n$. Escribamos $n = mr$ con $r \geq 2$ (pues $r = 1$ implica que $m = n$ lo cual no puede ser). La ecuación $m^n = n^m$ es equivalente con la ecuación $m^{mr} = (mr)^m$, es decir, $m^{m(r-1)} = r^m$.
Si $r = 2$, entonces $m^m = 2^m$, de donde $m = 2$ y por lo tanto $n = mr = 4$. Así, tenemos la solución $(2, 4)$.
Supongamos que $r \geq 3$. Es claro que $m^{m(r-1)} < r^m$ si $m = 1$. Es un ejercicio fácil demostrar que $2^{r-1} > r$ si $r \geq 3$. Usaremos esta desigualdad para demostrar que $m^{m(r-1)} > r^m$ si $m \geq 2$. Si $m = 2$, tenemos que $2^{2(r-1)} = (2^{r-1})^2 > r^2$. Supongamos que $m^{m(r-1)} > r^m$ para algún $m \geq 2$. Entonces,

$$(m+1)^{(m+1)(r-1)} > m^{(m+1)(r-1)} = m^{m(r-1)} m^{r-1} > r^m \cdot 2^{r-1} > r^m \cdot r = r^{m+1}.$$

Por lo tanto, si $r \geq 3$ la ecuación no tiene soluciones.
Concluimos que la única solución (m, n) con $m < n$ es $(2, 4)$, y por la simetría de la ecuación, la única solución (m, n) con $m > n$ es $(4, 2)$.

Algunas consecuencias del TFA

Una vez que sabemos que es posible factorizar todo número entero en producto de números primos, una pregunta natural que surge es: ¿cómo son los divisores de un número entero en términos de sus divisores primos? Esta y otras preguntas las responderemos a continuación.

Teorema 5 *Si $n > 1$ es un entero y $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ es su factorización canónica en producto de primos distintos, entonces cada divisor positivo de n es de la forma $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ donde $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ para cada $i = 1, \ldots, k$.*

Demostración. Observemos primero que si $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ con $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ para cada $i = 1, \ldots, k$, entonces $d \mid n$, pues $n = d(p_1^{\alpha_1-\beta_1} p_2^{\alpha_2-\beta_2} \cdots p_k^{\alpha_k-\beta_k})$ con $\alpha_i - \beta_i \geq 0$ para cada $i = 1, \ldots, k$. Ahora debemos demostrar que n no tiene otros divisores distintos de d. Claramente $1 = p_1^0 p_2^0 \cdots p_k^0$. Supongamos que $d' > 1$ es un divisor de n y sea p un divisor primo de d' (tal primo existe por la Proposición 1). Sea p^γ la mayor potencia de p que divide a d', es decir, $d' = p^\gamma k$ donde $p \nmid k$. Como d' es divisor de n, tenemos que p^γ también es divisor de n. Por la unicidad de la factorización en primos del número n, se sigue que $p = p_j$ para algún $1 \leq j \leq k$ y $\gamma \leq \alpha_j$. Así, $d' = p_j^\gamma k$ con $p_j \nmid k$ y $\gamma \leq \alpha_j$. Si $k = 1$, terminamos. Supongamos que $k > 1$. Por la Proposición 1, k tiene un divisor primo q. Como $p \nmid k$, tenemos que $q \neq p$. Sea q^δ la mayor potencia de q que divide a k, esto es, $k = q^\delta k'$ donde $q \nmid k'$. Entonces, q^δ divide a n y nuevamente por la unicidad de la factorización en primos del número n tenemos que $q = p_l$ para algún $l \neq j$ y $\delta \leq \alpha_l$. Así, $d' = p_j^\gamma p_l^\delta k'$ donde $p_j \nmid k'$, $p_l \nmid k'$, $\gamma \leq \alpha_j$ y $\delta \leq \alpha_l$. Continuando de esta manera, obtenemos que $d' = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ donde $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ para cada $i = 1, \ldots, k$. □

Hemos demostrado así que d es un divisor positivo de n si y sólo si $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ con $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ para cada $i = 1, \ldots, k$. Podemos preguntarnos ahora: ¿cuántos números de esta forma hay?
Como cada β_i puede tomar $\alpha_i + 1$ valores (desde 0 hasta α_i), por el principio del producto tenemos $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ divisores positivos distintos de n. Usualmente se denota por $\tau(n)$ al número de divisores positivos de n.
Si m y n son enteros positivos primos relativos, es fácil ver que $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$, pues los divisores primos de m son distintos de los divisores primos de n.

También podemos preguntarnos por la suma de los divisores positivos de un entero positivo n. Esta suma usualmente se denota por $\sigma(n)$ y matemáticamente representa la suma $\sum_{d \mid n} d$, la cual se efectúa sobre los divisores positivos d de n. Si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, entonces por el Teorema 5 tenemos que $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ donde

$0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ para cada $i = 1, \ldots, k$. Luego, tenemos que,

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \sum_{d|n} d = \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} \\ &= \left(\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} p_1^{\beta_1} \right) \left(\sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} p_2^{\beta_2} \right) \cdots \left(\sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} p_k^{\beta_k} \right).\end{aligned}$$

Por lo tanto, basta calcular $\sum_{\beta_i=0}^{\alpha_i} p_i^{\beta_i} = 1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{\alpha_i}$. Usando la fórmula $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ válida si $x \neq 1$, obtenemos que $\sum_{\beta_i=0}^{\alpha_i} p_i^{\beta_i} = \frac{p^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$, y por lo tanto,

$$\sigma(n) = \left(\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \right) \left(\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \right) \cdots \left(\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1} \right).$$

Es fácil ver que $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ si m y n son enteros positivos primos relativos.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 6. Sea n un entero positivo. Demostrar que $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$.

Solución. Sea d un divisor positivo de n. Es claro que $d \mid n$ si y sólo si $\frac{n}{d} \mid n$. Supongamos que n tiene k divisores positivos menores o iguales que $\sqrt{n}$. Claramente $k \leq \sqrt{n}$. Luego, por cada divisor positivo d menor o igual que $\sqrt{n}$ hay un divisor positivo mayor o igual que $\sqrt{n}$, a saber, $\frac{n}{d}$. De aquí que n tiene a lo más k divisores positivos mayores o iguales que $\sqrt{n}$ (si n es un cuadrado, el número de divisores positivos mayores o iguales que $\sqrt{n}$ es $k-1$). Por lo tanto, $\tau(n) \leq 2k \leq 2\sqrt{n}$.

Ejemplo 7. Un entero positivo es llamado *solitario* si la suma de los recíprocos de sus divisores positivos no es igual a la suma de los recíprocos de los divisores positivos de cualquier otro entero positivo. Demostrar que todo número primo es solitario.

Solución. Denotemos por $\sigma_{-1}(n)$ a la suma de los recíprocos de los divisores positivos de n, es decir, $\sigma_{-1}(n) = \sum_{d|n} \frac{1}{d}$. Luego,

$$\sigma_{-1}(n) = \sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \frac{n}{d} = \frac{1}{n} \sum_{d'|n} d' = \frac{1}{n}\sigma(n), \tag{1}$$

donde la igualdad $\sum_{d|n} \frac{n}{d} = \sum_{d'|n} d'$ se sigue de que $d \mid n$ si y sólo si $\frac{n}{d} \mid n$.
Si $p \geq 2$ es primo, entonces $\sigma_{-1}(p) = 1 + \frac{1}{p} = \frac{p+1}{p}$. Supongamos que p no es solitario, es decir, supongamos que existe un entero positivo $n \neq p$ tal que $\sigma_{-1}(n) = \frac{p+1}{p}$. Aplicando la relación (1), tenemos que $\frac{1}{n}\sigma(n) = \frac{p+1}{p}$, de donde $p\sigma(n) = n(p+1)$. Como p es primo relativo con $p+1$, tenemos que $p \mid n$ y como $n \neq p$, se sigue que,

$$\sigma_{-1}(n) = \sum_{d|n} \frac{1}{d} \geq 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{n} > \sigma_{-1}(p),$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, todo número primo es solitario.

Ejemplo 8. Determinar todos los enteros positivos n que tienen exactamente 16 divisores positivos $d_1, d_2, \ldots, d_{16}$, tales que $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{16} = n$, $d_6 = 18$ y $d_9 - d_8 = 17$.

Solución. Sea $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ la factorización canónica de n. Entonces, n tiene $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$ divisores positivos. Luego, $18 = 2 \cdot 3^2$ tiene 6 divisores positivos: $1, 2, 3, 6, 9$ y 18. Como n tiene 16 divisores positivos, tenemos que $n = 2 \cdot 3^3 p$ para algún primo p o $n = 2 \cdot 3^7$. Si $n = 2 \cdot 3^7$, entonces $d_8 = 54$, $d_9 = 81$ y $d_9 - d_8 \neq 17$, lo cual es una contradicción. Luego, $n = 2 \cdot 3^3 p$ para algún primo $p > 18$. Si $p < 27$, entonces $d_7 = p$, $d_8 = 27$, $d_9 = 2p = 27 + 17 = 44 \Rightarrow p = 22$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $p > 27$. Si $p < 54$, entonces $d_7 = 27$, $d_8 = p$, $d_9 = 54 = d_8 + 17 \Rightarrow p = 37$. Si $p > 54$, entonces $d_7 = 27$, $d_8 = 54$, $d_9 = d_8 + 17 = 71$. Así, tenemos dos posibles soluciones: $2 \cdot 3^3 \cdot 37 = 1998$ y $2 \cdot 3^3 \cdot 71 = 3834$.

Ejemplo 9. Determinar todos los enteros positivos n tales que $\tau(n) = \frac{n}{3}$.

Solución. Sea n un entero positivo que satisface la condición $\tau(n) = \frac{n}{3}$. Entonces, $3 \mid n$. Escribamos $n = 3k$, con k entero positivo.
Si k es par, entonces $\frac{k}{2} = \frac{n}{6}$ es un divisor de n. Más aún, si todos los enteros positivos menores que $\frac{n}{6}$ son divisores de n y los números $\frac{n}{5}, \frac{n}{4}, \ldots, \frac{n}{1}$ son también divisores de n, tenemos que $\frac{n}{3} = \tau(n) \leq \frac{n}{6} + 5$, de donde $n \leq 30$. Luego, los posibles valores de n son: $6, 12, 18, 24$ y 30. De estos, es fácil ver que sólo 18 y 24 satisfacen la condición del problema.
Si $k = \tau(n)$ es impar, entonces n es un cuadrado según el Ejercicio 5. Supongamos que $n = m^2$. Como k es impar, $n = 3k$ también es impar, de modo que m es impar. De acuerdo al Ejemplo 6 tenemos que $\frac{m^2}{3} = \tau(m^2) \leq 2m$ de donde $m \leq 6$. Como m es impar, los valores posibles de m son $1, 3$ y 5, y en consecuencia $n = 1, 9$ o 25. Como n es múltiplo de 3, el único número que cumple es 9.
Por lo tanto, el problema admite tres soluciones: 9, 18 y 24.

Solución alternativa. Como $3 \mid n$, se sigue que la factorización canónica de n es de la forma $n = 3^\alpha \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_j^{\alpha_j}$, de donde $\tau(n) = (\alpha+1)(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_j+1)$. La condición $\tau(n) = \frac{n}{3}$ implica que $3^{\alpha-1} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_j^{\alpha_j} = (\alpha+1)(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_j+1)$. Como $p_i^{\alpha_i} \geq 2^{\alpha_1} \geq \alpha_i + 1$, para que n satisfaga la ecuación del problema, es necesario que $\alpha + 1 \geq 3^{\alpha-1}$, de donde $\alpha = 1$ o $\alpha = 2$.
Si en la factorización de n hay un primo $p_i > 3$, entonces $p_i^{\alpha_i} > 4^{\alpha_i} \geq 2\alpha_i + 2$ y la igualdad $\tau(n) = \frac{n}{3}$ no se daría. Por lo tanto, n no tiene divisores primos mayores que 3. Si $\alpha = 1$, entonces $n = 3 \cdot 2^m$ y la igualdad $\tau(n) = \frac{n}{3}$ se reduce a $2(m+1) = 2^m$. Es fácil ver que $m = 1$ o 2 no cumplen; $m = 3$ es solución y por lo tanto $n = 24$. Si $m \geq 4$ tampoco hay soluciones ya que $2^m > 2m + 2$. De manera análoga, si $\alpha = 2$, entonces $n = 3^2 \cdot 2^m$ y la igualdad $\tau(n) = \frac{n}{3}$ se reduce a $3(m+1) = 3 \cdot 2^m$ cuyas únicas soluciones son $m = 0$, 1, y por lo tanto, $n = 9$, 18.

Ejemplo 10. Demostrar que hay una infinidad de enteros positivos n tales que $\frac{\sigma(2^n-1)}{n}$ es un entero.

Solución. Demostraremos que todos los enteros positivos de la forma $n = 2^k$ satisfacen el problema. Lo haremos por inducción en k. Si $k = 0$, tenemos que $n = 1$ y $\frac{\sigma(2^1-1)}{1} = 1$. Supongamos que el resultado es cierto para $n = 2^k$ con $k > 0$, y consideremos el número $2n = 2^{k+1}$. Entonces, $2^{2n} - 1 = (2^n)^2 - 1 = (2^n + 1)(2^n - 1)$. Como $2^n + 1$ y $2^n - 1$ son primos relativos (si d es un divisor de $2^n + 1$ y $2^n - 1$, entonces d debe dividir a su diferencia que es igual a 2, de donde $d = 1$ o 2, y como ambos números son impares, su único divisor común es 1), tenemos que $\sigma(2^{2n} - 1) = \sigma(2^n + 1)\sigma(2^n - 1)$. Aplicando la hipótesis de inducción, se sigue que $\sigma(2^n - 1)$ es múltiplo de n. Luego, basta demostrar que $\sigma(2^n + 1)$ es par. Como n es par, tenemos que 2^n es un cuadrado y por lo tanto $2^n + 1$ no puede ser un cuadrado (pues $n > 0$). Ahora, por el Ejercicio 6 tenemos que $\sigma(2^n + 1)$ es par y por lo tanto, $\sigma(2^{2n} - 1)$ es múltiplo de $2n = 2^{k+1}$, como queríamos.

Para finalizar, dejamos unos ejercicios para el lector.

Ejercicios

1. Hallar todos los números primos p tales que p^2+11 tiene exactamente 6 divisores positivos distintos.
2. Sean a, b, c enteros distintos de 0, con $a \neq c$, tales que $\frac{a}{c} = \frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$. Demostrar que $a^2 + b^2 + c^2$ no puede ser un número primo.
3. Demostrar que hay una infinidad de números que no son solitarios. (Ver Ejemplo 7 para la definición de número solitario.)
4. Sea n un entero positivo y sea $\pi(n)$ el producto de los divisores positivos de n. Demostrar que $\pi(n) = n^{\tau(n)/2}$.
5. Sea n un entero positivo. Demostrar que n es un cuadrado si y sólo si $\tau(n)$ es impar.
6. Sea n un entero positivo impar. Demostrar que $\sigma(n)$ es par si y sólo si n no es un cuadrado.
7. Determinar todos los enteros positivos n tales que $\tau(n) = \frac{n}{4}$.

Bibliografía

1. T. Andreescu, D. Andrica. *Number Theory. Structures, Examples and Problems.* Birkhäuser, 2009.
2. M. Baluna, R. Gologan. *Romanian Mathematical Competitions.* Romanian Mathematical Society, 2011.
3. M. Andronache, M. Baluna, R. Gologan, A. Eckstein, C. Popescu, D. Serbanescu. *Romanian Mathematical Competitions.* Romanian Mathematical Society, 2012.
4. Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

Problemas de práctica

A continuación encontrarás los 30 problemas que seleccionamos para comenzar tu preparación olímpica. Observa que, por ser el primer número del año, los problemas se redactaron siguiendo el formato de opción múltiple, pues los exámenes de las etapas iniciales de la mayoría de los concursos estatales se presentan así.

En este sentido y aunque es una posible estrategia, no te recomendamos buscar la respuesta con base en la eliminación de las otras opciones. Debes considerar que, en las olimpiadas, no basta saber cuáles son las respuestas correctas, sino que además, es necesario dar la justificación de cada una de las soluciones. De esta forma, en las etapas más avanzadas, las preguntas siempre son abiertas y nunca se utiliza el formato de opción múltiple.

Problema 1. Se tienen dos números enteros de tres dígitos cada uno, tales que los seis dígitos (de ambos números) son 1, 2, 3, 4, 5 y 6. ¿Cuál es lo mínimo que puede valer la suma de los dos números?

(a) 777 (b) 381 (c) 1173 (d) 579 (e) 210

Problema 2. Sea $ABCD$ un cuadrado. Sean P, Q, R y S puntos sobre los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente, tales que PR es paralela a BC y SQ es paralela a AB. Sea Z el punto de intersección de PR y SQ. Si $BP = 7\,cm$, $BQ = 6\,cm$ y $DZ = 5\,cm$, ¿cuánto vale el área del cuadrado $ABCD$?

(a) $64\,cm^2$ (b) $81\,cm^2$ (c) $100\,cm^2$ (d) $121\,cm^2$ (e) $144\,cm^2$

Problema 3. Si hay 45 asientos consecutivos, ¿cuál es el mínimo número de personas que se pueden sentar en algunos de los asientos de tal manera que si una nueva persona llega, ésta tiene que quedar al lado de alguna de las que ya estaban sentadas?

(a) 1 (b) 43 (c) 44 (d) 14 (e) 15

Problema 4. ¿Cuál es el mínimo número de torres que se pueden colocar en un tablero de ajedrez, de forma que todas las casillas blancas estén bajo ataque?
(Nota: Considera que una torre ataca a cualquier otra casilla que se encuentre en su misma columna o en su misma fila.)

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 8

Problema 5. El número mínimo de cartas que se deben extraer de un mazo de 52 cartas de una baraja (sin contar los comodines) para estar seguro de obtener 2 ases o 3 cartas del mismo palo es:

(a) 9 (b) 13 (c) 27 (d) 49 (e) 50

Problema 6. Si n es un entero positivo par, ¿a cuánto es igual el producto

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)?$$

(a) 1 (b) $\frac{1}{n}$ (c) $\frac{n+1}{n}$ (d) -1 (e) Ninguna de las anteriores

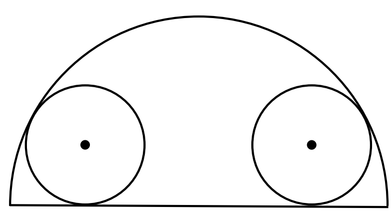
Problema 7. ¿Cuántos números naturales entre 500 y 600 cumplen que la suma de sus dígitos es 12?

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 10 (e) 12

Problema 8. Se tienen dos velas de la misma longitud. Se sabe que la primera vela se consume en 6 horas y la segunda en 8 horas. Si ambas se encendieron a las $18{:}00$ hrs. y se observa que al consumirse ambas la primera es dos veces más pequeña que la segunda, ¿a qué hora se apagaron las velas?

(a) 23:48 (b) 22:48 (c) 23:10 (d) 22:10 (e) 21:56

Problema 9. Dos círculos de radio $8\,cm$ están al interior de un semicírculo de radio $25\,cm$. Si los dos círculos son tangentes al diámetro y al semicírculo, ¿cuál es la distancia entre los centros de los dos círculos?



(a) $35\,cm$ (b) $27\,cm$ (c) $29\,cm$ (d) $37\,cm$ (e) $30\,cm$

Problema 10. La sucesión creciente $2, 3, 5, 6, 7, 11, \ldots$ consiste en todos los enteros positivos que no son ni el cuadrado ni el cubo de un número entero. ¿Cuál es el término número 500 de esta sucesión?

(a) 500 (b) 528 (c) 530 (d) 729 (e) 529

Problema 11. Los cuadrados de las longitudes de las diagonales de las caras de un prisma rectangular son $\frac{4525}{36}\,cm^2$, $\frac{369}{4}\,cm^2$ y $\frac{949}{4}\,cm^2$. ¿Cuál es el volumen del prisma?

(a) $275\,cm^3$ (b) $300\,cm^3$ (c) $345\,cm^3$ (d) $375\,cm^3$ (e) $425\,cm^3$

Problema 12. Carlitos utilizó una calculadora para determinar el valor de $\frac{a+b}{c}$ donde a, b y c son enteros positivos. Así que él oprimió a, $+$, b, $/$, c, $=$, en ese orden y obtuvo como respuesta 11. Luego, oprimió b, $+$, a, $/$, c, $=$, en ese orden y se sorprendió de obtener una respuesta diferente a la anterior e igual a 14. Así que se dió cuenta de que la calculadora realizó la división antes que la suma. Entonces oprimió $($, a, $+$, b, $)$, $/$, c, $=$, en ese orden y obtuvo la respuesta correcta. ¿Cuál es?

(a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 9

Problema 13. ¿Cuál es la solución positiva de la ecuación,

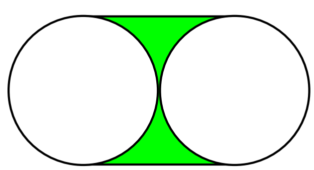
$$\frac{1}{x^2-10x-29}+\frac{1}{x^2-10x-45}-\frac{2}{x^2-10x-69}=0?$$

(a) 13 (b) 3 (c) 10 (d) 7 (e) -3

Problema 14. Tenemos 10 segmentos de recta del mismo tamaño en el plano. Supongamos que el punto de intersección entre cualesquiera 2 segmentos que se cortan, los corta en razón $3{:}4$. ¿Cuál es máximo número posible de puntos de intersección?

(a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 10 (e) 20

Problema 15. Si dos círculos de radio $1\,cm$ son tangentes, ¿cuál es el área de la región sombreada?



(a) $2\pi\,cm^2$ (b) $4\pi\,cm^2$ (c) $(4-\pi)\,cm^2$ (d) $(2-\pi)\,cm^2$ (e) $\frac{\pi}{2}\,cm^2$

Problema 16. Si a, b y c son números reales tales que $a+b+c=11$ y $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{13}{17}$, ¿cuál es el valor de $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$?

(a) $\frac{11}{17}$ (b) $\frac{30}{17}$ (c) $\frac{49}{17}$ (d) $\frac{73}{17}$ (e) $\frac{92}{17}$

Problema 17. $a < b < c < d < e$ son 5 enteros positivos consecutivos tales que $b+c+d$ es un cuadrado perfecto y $a+b+c+d+e$ es un cubo perfecto. ¿Cuál es el mínimo valor de c?

(a) 675 (b) 15 (c) 3 (d) 1024 (e) 64

Problema 18. ¿Cuántas parejas de números enteros positivos (x, y) satisfacen la ecuación $3x + 7y = 2013$?

(a) 0 (b) 30 (c) 55 (d) 70 (e) 95

Problema 19. Hay 256 enteros positivos distintos de 4 dígitos $abcd$, donde cada uno de a, b, c y d es $1, 2, 3$ o 4. ¿Cuántos de ellos cumplen que $a(d) - b(c)$ es par?

(a) 128 (b) 144 (c) 160 (d) 176 (e) 192

Problema 20. ¿Cuántos números racionales positivos en forma simplificada con denominador distinto de 1 cumplen que, cuando se multiplica el numerador y el denominador, el resultado es 27000?

(a) 8 (b) 30 (c) 5 (d) 7 (e) 27

Problema 21. Sea S un subconjunto del conjunto $\{1, 2, \ldots, 30\}$ con la propiedad de que ninguna pareja de números distintos de S tiene suma divisible entre 5. ¿Cuál es el máximo número de elementos que puede tener S?

(a) 10 (b) 13 (c) 15 (d) 16 (e) 18

Problema 22. En las primeras horas a partir de su creación una nueva red social registra 2000 miembros. Cada uno de estos miembros envía invitaciones a 1000 miembros para ser sus amigos. Si consideramos que dos miembros se vuelven amigos si y sólo si se han enviado invitaciones mutuamente, ¿cuál es el mínimo número de parejas de amigos que hay en esta red social?

(a) Menos de 200 (b) 200 (c) 500 (d) 1000 (e) Más de 1000

Problema 23. ¿Cuántos números enteros entre 1 y 1000 inclusive, se pueden expresar como la diferencia de dos cuadrados de enteros?

(a) 1000 (b) 200 (c) 750 (d) 500 (e) 800

Problema 24. Para un entero positivo n, sea $A(n)$ el producto de los dígitos diferentes de 0 de n. ¿Cuál es el número primo más grande que divide a la suma

$$P(1) + P(2) + P(3) + \cdots + P(999)?$$

(a) 103 (b) 111 (c) 47 (d) 7 (e) 11

Problema 25. Una mesa de billar (pool) tiene la forma de un rectángulo de 2×1. La mesa tiene seis buchacas, una en cada esquina y una a la mitad de cada uno de los dos lados largos. ¿Cuál es el número mínimo de bolas que se requiere poner en la mesa de forma que cada buchaca esté alineada con al menos dos bolas?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 26. Sean a, b, c, x, y, z números distintos de cero tales que $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. ¿Cuál es el valor de

$$\frac{xyz(a+b)(b+c)(c+a)}{abc(x+y)(y+z)(z+x)}?$$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) $\frac{3}{2}$ (d) 2 (e) $\frac{5}{2}$

Problema 27. Los enteros positivos del 1 al 30 se dividen en k conjuntos ajenos dos a dos, de tal manera que la suma de cualesquiera 2 números distintos en cada conjunto no es igual al cuadrado de un entero. ¿Cuál es el valor mínimo de k?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 28. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar en una fila 10 pelotas rojas idénticas, 5 pelotas verdes idénticas y 5 pelotas azules idénticas, si no debe haber dos pelotas adyacentes del mismo color?

(a) 1134 (b) 1366 (c) 1528 (d) 1764 (e) 1990

Problema 29. ¿Cuántos enteros positivos n satisfacen que el producto de sus divisores positivos es 24^{240}?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) Más de 4

Problema 30. Si m y n son enteros positivos tales que,

$$n^2 < 8m < n^2 + 60(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$$

¿cuál es el mayor valor posible de n?

(a) 53 (b) 54 (c) 55 (d) 56 (e) 57

Soluciones a los problemas de práctica

Aquí encontrarás las soluciones que preparamos para los 30 problemas de la sección anterior. Sin embargo, no te recomendamos consultarla antes de tener tus propias respuestas o de haber dedicado suficiente tiempo a cada problema. Considera que la habilidad para resolver problemas sólo se desarrolla con la práctica y que cada vez que consultas una solución de manera prematura, estás desperdiciando una oportunidad más para ejercitarte.

Es importante observar que en cada una de las soluciones siempre incluimos la argumentación que establece su validez. Sin embargo, cabe aclarar que, en matemáticas, cada problema puede tener tantas soluciones correctas como ideas originales se desarrollen con creatividad y lógica. En este sentido, las soluciones que mostramos no son necesariamente las únicas o las mejores, por lo que si tú encontraste una solución diferente de las que aquí se presentan y no estás seguro de su validez o simplemente quieres compartirla con nosotros, te invitamos para que nos escribas a `revistaomm@gmail.com`.

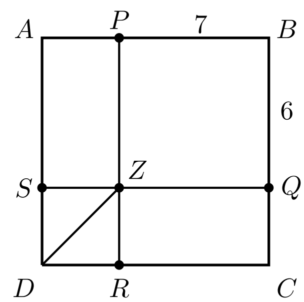
Solución del problema 1. La respuesta es (b).
Sean ABC y DEF los números en notación decimal. Luego, la suma es,

$$(100A + 10B + C) + (100D + 10E + F) = 100(A + D) + 10(B + E) + (C + F).$$

Como A y D serán multiplicados por 100, para encontrar el mínimo, necesitamos que A y D sean 1 y 2, en algún orden. De la misma manera, como B y E serán multiplicados por 10 (que es menor que 100), deben ser 3 y 4, en algún orden y C y F serían 5 y 6, en algún orden. Luego, la mínima suma es 381 (una manera de obtenerla es con $135 + 246$).

Solución del problema 2. La respuesta es (c).
Sea l la longitud del lado del cuadrado $ABCD$. Tenemos que $ZR = QC = l - 6$

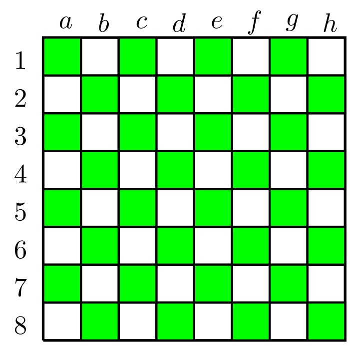
y $DR = AP = l - 7$. Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo ZRD, tenemos que $(l-6)^2 + (l-7)^2 = 5^2 = 25$, es decir, $l^2 - 13l + 30 = 0$. Factorizando, obtenemos que $(l-3)(l-10) = 0$, de donde $l = 3$ o $l = 10$. La solución $l = 3$ no es válida ya que l es mayor que $BP = 7$. Por lo tanto, $l = 10\,cm$ y el área del cuadrado $ABCD$ es $100\,cm^2$.



Solución del problema 3. La respuesta es (e).
Sean $1, 2, \ldots, 45$ los asientos. Partimos los 45 en 15 grupos de tres asientos consecutivos ($\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$, etc). Si hay 14 o menos, uno de esos grupos quedará vacío y la nueva persona puede sentarse en el asiento de en medio. Luego, se necesitan 15 o más.

Para ver que 15 es el mínimo, sentamos a 15 personas en los asientos $2, 5, 8, \ldots, 44$ (todos los que dejan residuo 2 al ser divididos entre 3). Este acomodo hace que en cada uno de los grupos de tres esté ocupado el asiento de en medio. Como la nueva persona tendrá que sentarse en uno de los asientos de uno de esos grupos, tendrá a alguien a su lado.

Solución del problema 4. La respuesta es (b).
Comenzamos observando que una torre colocada en una casilla negra siempre ataca exactamente 8 casillas blancas, mientras que una torre colocada en una casilla blanca sólo ataca 7 casillas blancas. Dado que el tablero tiene un total de 32 casillas blancas, al menos se necesitarían 4 torres.
Numeramos los renglones del 1 al 8 y las columnas de la a a la h bajo la convención usual de que la casilla $a1$ sea negra. Una solución es colocar las 4 torres en las posiciones: $a7$, $c5$, $e3$ y $g1$.



Solución del problema 5. La respuesta es (a).
Si tomamos las cartas 2 y 3 de cada uno de los cuatro palos tendremos 8 cartas, de las cuales, no hay tres del mismo palo y no tenemos ases. Así que tenemos que sacar al menos 9 cartas. Si sacamos 9 cartas del mazo, como hay 4 palos, por el principio de las casillas debe haber un palo del cual hayamos sacado al menos tres cartas. Por lo tanto, el mínimo número de cartas que se deben extraer es 9.

Solución del problema 6. La respuesta es (c).
Observemos que los factores del producto se van alternando entre suma y diferencia y que el primer y el último factor son sumas. Luego, hay un número impar de factores. Además, al multiplicar cada par de factores adyacentes se obtiene,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{i}\right)\left(1-\frac{1}{i+1}\right) &= 1-\frac{1}{i+1}+\frac{1}{i}-\frac{1}{i(i+1)}\\ &= 1+\frac{-i+i+1-1}{i(i+1)}\\ &= 1.\end{aligned}$$

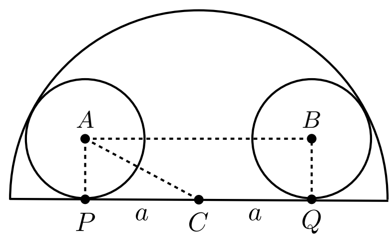
Luego, el producto es igual al último factor: $1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}$.

Solución del problema 7. La respuesta es (c).
Todos los números buscados inician con 5, luego debemos buscar dos números que sumados den 7 e intercambiarlos en unidades y decenas. Las parejas (x,y) tales que $x+y=7$ son: $(0,7)$, $(1,6)$, $(2,5)$ y $(3,4)$. Por lo tanto, hay 8 números entre 500 y 600 cuyos dígitos suman 12.

Solución del problema 8. La respuesta es (b).
Denotemos por m la longitud de las velas antes de ser encendidas, y por t el tiempo en horas transcurrido desde las 18:00 hrs. hasta que las velas se apaguen. Como la primera vela se consume en 6 horas, su longitud se reduce $\frac{t}{6}m$ y al final su longitud es $h_1=m-\frac{t}{6}m=m\left(1-\frac{t}{6}\right)$. Análogamente, como la segunda vela se consume en 8 horas, su longitud se reduce $\frac{t}{8}m$ y al final su longitud es $h_2=m\left(1-\frac{t}{8}\right)$. Como al consumirse las velas la primera es dos veces más pequeña que la segunda, tenemos

que $2h_1 = h_2$, es decir, $2m\left(1-\frac{t}{6}\right) = m\left(1-\frac{t}{8}\right)$. Despejando t obtenemos que $t = \frac{24}{5} = 4.8$ hrs.
Por lo tanto, las velas se apagaron 4 horas y 48 minutos después de ser encendidas, es decir, a las $22{:}48$ hrs.

Solución del problema 9. La respuesta es (e).
Sean C el centro del semicírculo, A y B los centros de los círculos de radios $8\,cm$, y P y Q los puntos de tangencia de los círculos con el diámetro. Además sea $a = PC = QC$. Observemos que $2a = PQ$ y que el triángulo APC es rectángulo con $AC = 25 - 8 = 17$, $AP = 8$ y $PC = a$. Luego, aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que, $AP^2 + PC^2 = AC^2$, es decir, $64 + a^2 = 289$, de donde $a = 15\,cm$. Por lo tanto, la distancia entre los centros de los círculos es de $30\,cm$.



Solución del problema 10. La respuesta es (b).
Notemos que el primer cuadrado perfecto mayor que 500 es $529 = 23^2$ y que el primer cubo perfecto mayor que 529 es $729 = 9^3$. Luego, hay 23 cuadrados perfectos y 8 cubos perfectos entre 1 y 529 inclusive. Pero, 1 y $2^6 = 64$ son tanto cuadrados como cubos perfectos. Luego, entre 1 y 529 nos brincaremos $23 + 8 - 2 = 29$ números. Luego, el término 500 de la sucesión es exactamente el último número entre 1 y 529 que no nos brincamos, es decir, el 528.

Solución del problema 11. La respuesta es (d).
Sean a, b y c las dimensiones del prisma. Por el teorema de Pitágoras tenemos que,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= \frac{4525}{36}, \\ a^2 + c^2 &= \frac{369}{4} = \frac{3321}{36}, \\ c^2 + b^2 &= \frac{949}{9} = \frac{3796}{36}. \end{aligned}$$

Sumando la primera ecuación con la tercera y restando la segunda obtenemos,

$$2b^2 = \frac{4525 + 3796 - 3321}{36} = \frac{5000}{36} = \frac{1250}{9},$$

de donde $b^2 = \frac{625}{9}$ y $b = \frac{25}{3}$. Luego, de la primera ecuación obtenemos que $a^2 = \frac{4525-2500}{36} = \frac{225}{4}$ y de aquí $a = \frac{15}{2}$. Por último, de la tercera ecuación tenemos que $c^2 = \frac{949-625}{9} = \frac{324}{9} = 36$ y de aquí $c = 6$.
Por lo tanto, el volumen del prisma es $\frac{15}{2} \cdot \frac{25}{3} \cdot 6 = 375\,cm^3$.

Solución del problema 12. La respuesta es (c).
Tenemos que $a + \frac{b}{c} = 11$ y $b + \frac{a}{c} = 14$. Sumando ambas ecuaciones obtenemos que $(a + b)\frac{c+1}{c} = 25$, o bien, $(a + b)(c + 1) = 25c$. Como $c + 1$ y c son primos relativos, tenemos que $c + 1$ divide a 25. Luego, $c = 4$ o $c = 24$.
Si $c = 24$, entonces $a + b = 24$, de modo que $11 = a + \frac{b}{24} = (24 - b) + \frac{b}{24}$, de donde $b = \frac{312}{23}$ no es entero. Por lo tanto, $c = 4$ y $a + b = 20$. De aquí, $11 = a + \frac{b}{4} = (20 - b) + \frac{b}{4}$ y en consecuencia $b = 12$ y $a = 20 - 12 = 8$. Así, $\frac{a+b}{c} = \frac{20}{4} = 5$.

Solución del problema 13. La respuesta es (a).
Si $y = x^2 - 10x - 49$ tenemos que $x^2 - 10x - 29 = y + 20$, $x^2 - 10x - 45 = y + 4$ y $x^2 - 10x - 69 = y - 20$, y la ecuación original es equivalente a la ecuación,

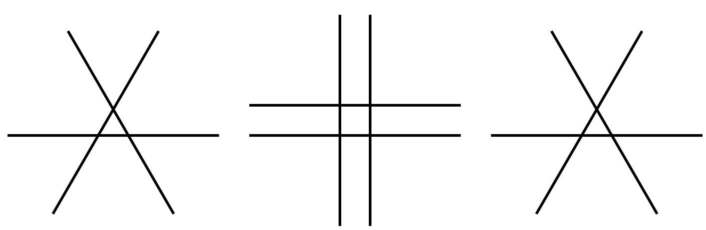
$$\frac{1}{y+20} + \frac{1}{y+4} = \frac{2}{y-20},$$

la cual es equivalente a la ecuación

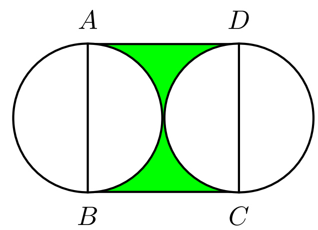
$$\frac{1}{y+4} = \frac{2}{y-20} - \frac{1}{y+20} = \frac{y+60}{(y+20)(y-20)}.$$

Luego, $(y+4)(y+60) = y^2 - 400$ de donde $y = -10$. Entonces, $x^2 - 10x - 49 = -10$. Resolviendo la cuadrática, obtenemos que x puede ser 13 y -3, pero como buscamos la solución positiva, x sólo puede ser 13. Finalmente, observemos que al sustituir $x = 13$ en la ecuación original, ninguno de los denominadores se hace cero, por lo que $x = 13$ es la única solución positiva.

Solución del problema 14. La respuesta es (d).
Sobre cada segmento hay 2 puntos que lo dividen en razón 3:4. De tal forma, que si hacemos la cuenta sumando los puntos de cada segmento, el número máximo de puntos es, a lo más, 20. Sin embargo, debemos considerar que por cada punto pasan por lo menos dos segmentos, por lo que cada punto se ha contado doble y entonces el número de intersecciones es a lo más 10. El siguiente diagrama nos muestra una solución donde se observa que el máximo es efectivamente 10.



Solución del problema 15. La respuesta es (c).
El cuadrado $ABCD$ tiene área $2 \times 2 = 4\,cm^2$.



Para encontrar el área de la región sombreada basta restar al área del cuadrado $ABCD$ el área de dos semicírculos de radio $1\,cm$, es decir, el área de un círculo de radio $1\,cm$. Por lo tanto, el área de la región sombreada es $(4-\pi)\,cm^2$.

Solución del problema 16. La respuesta es (e).
Tenemos que,

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} &= \frac{11-(b+c)}{b+c}+\frac{11-(c+a)}{c+a}+\frac{11-(a+b)}{a+b}\\ &= 11\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3\\ &= 11\cdot\frac{13}{17}-3\\ &= \frac{92}{17}.\end{aligned}$$

Solución del problema 17. La respuesta es (a).
Notemos que $b+c+d=3c$ y $a+b+c+d+e=5c$. Luego, para que $3c$ sea cuadrado perfecto, c tiene que ser de la forma $3A^2$ para cierto entero positivo A. Como $5c=15A^2$ es un cubo, A tiene que ser múltiplo de 3 y 5. Como $A=15$ es el menor entero positivo que cumple que $15A^2$ es cubo, c es al menos $3(15)^2=675$.

Solución del problema 18. La respuesta es (e).
Tenemos que $7y=2013-3x=3(671-x)$, lo que significa que $3\mid 7y$. Como 3 y 7 son primos relativos, se sigue que $3\mid y$. Luego, $y=3k$ para cierto entero positivo k. Entonces, $21k=2013-3x$ y de aquí $x=\frac{2013-21k}{3}=671-7k$. Como x debe ser positivo, tenemos que $k<\frac{671}{7}\approx 95.85$. Por lo tanto, los valores posibles de k son $1,2,\ldots,95$, y el número de soluciones (x,y) en enteros positivos de la ecuación es 95.

Solución del problema 19. La respuesta es (c).
Observemos que $a(d)-b(c)$ es par si $a\cdot d$ y $b\cdot c$ son ambos impares o ambos pares. El primer caso ocurre cuando los cuatro dígitos son todos impares. Luego, tenemos $2^4=16$ números en este caso, pues cada dígito puede ser 1 o 3.
El segundo caso ocurre cuando a y d no son ambos impares, y b y c no son ambos impares. Si a y d no son ambos impares, tenemos $16-4=12$ maneras de elegirlos, pues de las $4^2=16$ maneras que hay en total, hay que quitar cuando a y d son ambos impares, es decir $2^2=4$ números. De manera análoga, si b y c no son ambos impares

hay $16-4=12$ maneras de elegirlos. Luego, tenemos $(16-4)^2=144$ números en este caso. Por lo tanto, la respuesta es $16+144=160$.

Solución del problema 20. La respuesta es (d).
Notemos que $27000=30^3=2^3 3^3 5^3$. Si la fracción es $\frac{A}{B}$ con A y B primos relativos, notamos que si un primo p divide a A, necesariamente p^3 divide a A, pues $AB=27000=(2\cdot 3\cdot 5)^3$. Luego, los primos 2, 3 y 5 se dividen entre A y B. Luego, basta elegir qué primos aparecerán en A. Cada primo de los tres tiene la opción de estar o no estar en la factorización de A. Luego, hay 8 opciones para A. Pero una de ellas es cuando 2, 3 y 5 están en A. En ese caso, $A=27000$, $B=1$ y el número es entero. Luego, sólo hay 7 opciones.

Solución del problema 21. La respuesta es (b).
Un ejemplo de conjunto que satisface la condición del problema es,

$$\{1,2,6,7,11,12,16,17,21,22,26,27,30\},$$

pues está formado por los números entre 1 y 30 inclusive, que dejan residuo 1 o 2 al dividirse entre 5, junto con el número 30 que es múltiplo de 5. Luego, la suma de cualesquiera dos de esos números deja residuo $0+1=1, 0+2=1+1=2, 1+2=3$ o $2+2=4$ al dividirse entre 5 y por lo tanto, ninguna de esas sumas es múltiplo de 5.
Demostraremos que 13 es el máximo número de elementos que puede tener S. Consideremos la siguiente partición de $\{1,2,\ldots,30\}$:

$$\{5,10,15,20,25,30\},\{1,4\},\{2,3\},\{6,9\},\{7,8\},\{11,14\},$$

$$\{12,13\},\{16,19\},\{17,18\},\{21,24\},\{22,23\},\{26,29\},\{27,28\}.$$

Hay 13 subconjuntos en esta partición, y la suma de cualesquiera dos números de cada subconjunto es divisible entre 5. Luego, por el principio de las casillas, cualquier conjunto S con al menos 14 elementos tiene al menos dos números cuya suma es divisible entre 5. Por lo tanto, 13 es el máximo número de elementos que puede tener S.

Solución del problema 22. La respuesta es (d).
Acomodemos a las 2000 personas en círculo. Si la persona A le envía una invitación a la persona B, pintamos una flecha de A a B. De esta manera, A y B serán amigos si están las dos posibles flechas entre ellos.
Si cada persona envía sus invitaciones a las 1000 personas sentadas al lado de ella en el sentido de las manecillas del reloj, las únicas parejas de amigos serían las formadas por 2 personas diametralmente opuestas. Esto nos muestra que es posible que el número de parejas de amigos sea 1000.
Por otro lado, si trazamos las 1000 flechas que representan las invitaciones, obtenemos un total de 2000×1000 flechas y un total de $\binom{2000}{2}=\frac{2000(1999)}{2}=1999000$ parejas de personas. Aún en caso de que cada pareja de personas esté conectada por una flecha, aún tenemos un total de $2000(1000)-1999(1000)=1000$ flechas extra. Esto

sólo puede suceder en caso de que existan flechas que unan la misma pareja de personas yendo en direcciones opuestas. De aquí se sigue que debe haber al menos 1000 invitaciones recíprocas y por lo tanto un mínimo de 1000 parejas de amigos.

Solución del problema 23. La respuesta es (c).
Digamos que cierto número n se puede escribir de la forma $n = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Supongamos que $a + b = x$ y $a - b = y$ con $xy = n$ y $x > y$. Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos que $a = \frac{x+y}{2}$ y $b = \frac{x-y}{2}$. Para que a y b sean enteros, es necesario y suficiente que, tanto x como y sean de la misma paridad.
Luego, si podemos expresar a n como producto de dos números de la misma paridad, tomando $a = \frac{x+y}{2}$ y $b = \frac{x-y}{2}$ tendríamos una expresión de n como diferencia de cuadrados. Por otro lado, si n no puede expresarse como producto de dos números con la misma paridad, no se podrá.
Si n es impar, basta con tomar $x = n$, $y = 1$. Si n es múltiplo de 4, basta con tomar $x = \frac{n}{2}$, $y = 2$. Pero si n es par y no es múltiplo de 4, necesariamente uno de los dos factores será par y el otro impar. Luego, los números que se pueden escribir como diferencia de cuadrados perfectos son aquellos que no dejan residuo 2 al dividirse entre 4. Por lo tanto, entre el 1 y el 1000 inclusive, 750 números enteros (tres cuartas partes) pueden escribirse como diferencia de dos cuadrados de enteros.

Solución del problema 24. La respuesta es (a).
Considerando todos los números del 1 al 999 como de tres dígitos (agregando ceros a la izquierda cuando sea necesario), la suma de los productos de sus dígitos es igual a

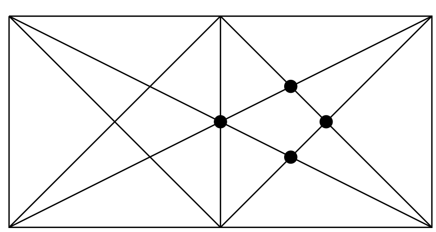
$$0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + \cdots + 9 \cdot 9 \cdot 9 = (0 + 1 + 2 + \cdots + 9)^3 - 0^3.$$

Pero, en nuestro problema no consideramos los ceros. Observemos que, sería lo mismo, si en la ecuación anterior cambiamos los ceros por unos. Luego, la suma buscada es igual a

$$(1 + 1 + 2 + \cdots + 9)^3 - 1^3 = 46^3 - 1 = (46 - 1)(46^2 + 46 + 1) = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 103$$

y su factor primo más grande es 103.

Solución del problema 25. La respuesta es (c).
En el siguiente diagrama observamos una solución donde se muestra que 4 bolas son suficientes para que cada buchaca quede alineada con al menos 2 de ellas.



Ahora veremos que con 3 bolas no es suficiente y por lo tanto el mínimo es 4. Comenzamos observando que cualquier recta que pase por 2 puntos interiores de un rectángulo corta a su frontera (perímetro) en exactamente 2 puntos. Dado que tenemos 6 buchacas, necesitamos al menos 3 rectas para que cada buchaca quede alineada con al menos 2 bolas. Ahora, 3 bolas (puntos) definen 3 rectas si y sólo si las 3 bolas forman un triángulo. Sin embargo, en el diagrama de arriba se muestran todas las posibles rectas que unen 2 buchacas y no existe una terna que defina un triángulo con vértices en el interior de la mesa. Por lo tanto, el mínimo número de bolas necesario es 4.

Solución del problema 26. La respuesta es (b).
Hagamos $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = r$. Entonces $\frac{xyz}{abc} = r^3$, $x = ra$, $y = rb$ y $z = rc$. Luego, $x+y = r(a+b)$, $y+z = r(b+c)$ y $z+x = r(c+a)$, de donde $\frac{x+y}{a+b} = \frac{y+z}{b+c} = \frac{z+x}{c+a} = r$. Por lo tanto, $\frac{xyz(a+b)(b+c)(c+a)}{abc(x+y)(y+z)(z+x)} = r^3 \cdot \frac{1}{r^3} = 1$.

Solución del problema 27. La respuesta es (c).
Como $6 + 19 = 5^2$, $6 + 30 = 6^2$ y $19 + 30 = 7^2$, los números 6, 19 y 30 deben estar en diferentes conjuntos, de modo que $k \geq 3$. Daremos una construcción para mostrar que $k = 3$ es suficiente. Consideremos los conjuntos,

$$\begin{aligned} A &= \{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 4, 8, 16, 24\}, \\ B &= \{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 6, 14, 18, 26\}, \\ C &= \{2, 10, 22, 30, 12, 20, 28\}. \end{aligned}$$

Cuando el cuadrado de un entero se divide entre 4, el residuo es 0 o 1. Por lo tanto, los únicos casos que debemos checar en A y B son las sumas de dos números pares, ninguna de las cuales dé un cuadrado. En C los casos que debemos checar son las sumas de dos de los primeros cuatro números o dos de los últimos tres. Nuevamente ninguna de ellas da un cuadrado. Por lo tanto, el mínimo es 3.

Solución del problema 28. La respuesta es (d).
Consideremos dos casos.
Caso 1: Ninguna pelota verde es adyacente con ninguna pelota azul. En este caso, las pelotas rojas deben ocupar las posiciones $1, 3, 5, 7, \ldots, 19$, o bien las posiciones $2, 4, 6, \ldots, 20$. En cada caso hay $\binom{10}{5} = 252$ maneras de acomodar las pelotas verdes y las pelotas azules. Por lo tanto, en total hay $2(252) = 504$ maneras en este caso.
Caso 2: Alguna pelota verde es adyacente con alguna pelota azul. Colocamos primero el par verde-azul. Ya que la mitad del número total de pelotas son rojas y no puede haber dos pelotas rojas juntas, el número de espacios vacíos antes y después de este par deben ser ambos impares. Luego, tenemos 9 elecciones para las posiciones de este par (2 y 3, 4 y $5, \ldots, 18$ y 19). Además hay 2 maneras de acomodar las dos pelotas del par. Después de que este par es colocado, las posiciones de las pelotas rojas están fijas (por ejemplo, si el par está colocado en las posiciones 6 y 7, entonces las pelotas rojas deben estar colocadas en las posiciones $1, 3, 5, 8, 10, \ldots, 18$ y 20) y hay $\binom{8}{4} = 70$ formas de acomodar las restantes 4 pelotas verdes y 4 pelotas azules. Por lo tanto, hay $9 \cdot 2 \cdot 70 = 1260$ maneras en este caso.
Combinando ambos casos, concluimos que hay $504 + 1260 = 1764$ maneras de hacer lo que se pide.

Solución del problema 29. La respuesta es (a).
Sea n un entero con la propiedad deseada. Como $24 = 2^3 \cdot 3$, tenemos que n es de la forma $2^a \cdot 3^b$. Los divisores positivos de este número son de la forma $2^y \cdot 3^x$ donde $0 \leq y \leq a$ y $0 \leq x \leq b$ (ver el artículo de este número). Ahora, si consideramos a todos los que tienen el exponente de 3 fijo, digamos x, éstos serán: $2^0 \cdot 3^x, 2^1 \cdot 3^x, 2^2 \cdot 3^x, \ldots, 2^a \cdot 3^x$. El producto de estos divisores es igual a,

$$2^{0+1+\cdots+a} \cdot 3^{x(a+1)} = 2^{a(a+1)/2} \cdot 3^{x(a+1)}$$

donde x varía de 0 a b. Por lo tanto, el producto de todos los divisores positivos de n es igual a,

$$\begin{aligned} & 2^{a(a+1)/2} \cdot 3^{0(a+1)} \cdot 2^{a(a+1)/2} \cdot 3^{1(a+1)} \cdots 2^{a(a+1)/2} \cdot 3^{b(a+1)} \\ = \;& 2^{a(a+1)(b+1)/2} \cdot 3^{b(a+1)(b+1)/2}. \end{aligned}$$

Entonces, $\frac{a(a+1)(b+1)}{2} = 3(240) = 720$ y $\frac{b(a+1)(b+1)}{2} = 240$. Dividiendo la primera ecuación entre la segunda obtenemos que $\frac{a}{b} = 3$ de donde $a = 3b$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación, obtenemos que $\frac{3b(3b+1)(b+1)}{2} = 720$, es decir, $b(3b+1)(b+1) = 480$. Es fácil ver que la única solución en números enteros de esta ecuación es $b = 5$, de modo que $a = 15$ y por lo tanto $n = 2^{15} \cdot 3^5 = 24^5$.

Solución del problema 30. La respuesta es (b).
Observemos primero que cuando dividimos entre 8, n^2 es de la forma $8k$, $8k+1$ u $8k+4$, para algún entero k. Luego, si $60(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < 4$, entonces $n^2 < n^2 + 60(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < n^2 + 4$ y no habría un múltiplo de 8 entre n^2 y $n^2 + 60(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. Por lo tanto, $60(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \geq 4$. Entonces,

$$15 \geq \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 2\sqrt{n},$$

y de aquí $n \leq 56$.
Si $n = 56$, entonces $56^2 < 8m < 56^2 + 60(\sqrt{57} - \sqrt{56}) < 56^2 + 5$, lo cual claramente no es posible. De manera análoga, si $n = 55$, entonces $55^2 < 8m < 55^2 + 60(\sqrt{56} - \sqrt{55}) < 55^2 + 5$ que tampoco es posible. Ahora, si $n = 54$, tenemos que

$$60(\sqrt{55} - \sqrt{54}) = \frac{60}{\sqrt{55} + \sqrt{54}} \geq \frac{30}{\sqrt{55}} > 4$$

ya que $30 \cdot 30 = 900 > 880 = 4 \cdot 4 \cdot 55$. Como $54^2 = 2916$, tenemos que $54^2 + 60(\sqrt{55} - \sqrt{54}) > 2920$. Ya que $\frac{2920}{8} = 365$, podemos tomar $m = 365$. Por lo tanto, el valor máximo de n es 54.

Problemas de Entrenamiento

Tzaloa se construye con el esfuerzo de toda la comunidad olímpica y esta sección está especialmente diseñada para la participación de sus lectores. De esta manera, en cada número presentamos 10 problemas sin solución e invitamos a nuestros lectores para que preparen y nos envíen sus soluciones con el fin de poderlas publicar.

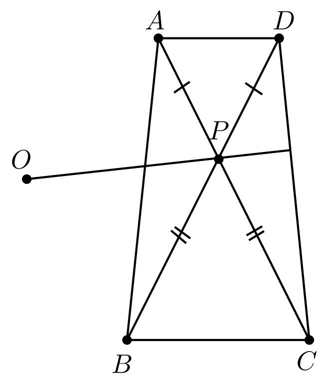
Para dar suficiente tiempo a la preparación, envío y análisis de las soluciones, las respuestas de los problemas de entrenamiento de cualquier número de la revista, se publican con tres números de diferencia. Es así, que en este número (Tzaloa 1, año 2013), encontrarás las soluciones de los problemas propuestos en Tzaloa 2, año 2012.

Las soluciones de los problemas propuestos en esta ocasión, se publicarán en Tzaloa 4, año 2013, por lo que aún tienes tiempo para preparar y enviarnos tu trabajo. Recuerda que nuestra dirección electrónica es `revistaomm@gmail.com` y que a través de ella estaremos recibiendo con gusto todas las contribuciones que nos lleguen desde cualquier rincón del país.

Problemas de Entrenamiento.
Año 2013 No. 1.

Los siguientes 10 problemas están buscando las soluciones que sólo con tu participación podrán ser halladas. Considera que estos *Problemas de Entrenamiento* son una magnífica oportunidad para imponerte el reto de que la solución salga publicada con tu nombre impreso. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Problema 1. Los segmentos AC y BD se intersectan en un punto P tal que $PA = PD$ y $PB = PC$. Sea O el circuncentro del triángulo PAB. Demuestra que los segmentos OP y CD son perpendiculares.



Problema 2. ¿Cuántos enteros positivos de seis dígitos hay que son cuadrados perfectos con la propiedad de que si a cada dígito se le suma 1, el número resultante es también un cuadrado perfecto de seis dígitos?

Problema 3. Nos dan tres números reales distintos de cero de forma que si los usamos como coeficientes de trinomios cuadráticos, cada uno de esos trinomios tiene una raíz real. ¿Es cierto que cada uno de estos trinomios tiene una raíz positiva?

Problema 4. Sea ABC un triángulo con $\angle BAC = 90^\circ$. Sobre el lado BC se encuentra un punto L. El circuncírculo del triángulo ABL intersecta nuevamente a la recta AC en M y el circuncírculo del triángulo ACL intersecta nuevamente a la recta AB en N. Demuestra que los puntos L, M y N son colineales.

Problema 5. En un tablero de ajedrez de 15×15 hay colocadas 15 torres que no se atacan entre sí. A continuación, cada torre hace un movimiento como caballo. Muestra que después de esto necesariamente tiene que haber al menos un par de torres que se atacan entre sí.

Problema 6. Alma y Brenda parten de los puntos A y B respectivamente y se mueven simultáneamente acercándose una hacia la otra hasta encontrarse. Sus velocidades son constantes pero no necesariamente iguales. Si Alma hubiera empezado a moverse 30 minutos antes se hubieran encontrado en un punto 2 kilómetros más cercano a B. Si en lugar de eso, Brenda hubiera empezado a moverse 30 minutos antes, entonces se hubieran encontrado a una distancia d más cerca de A. ¿Serán suficientes los datos para determinar el valor de d?

Problema 7. Sean d y d' divisores positivos de un entero positivo n. Si $d' > d$, demuestra que $d' > d + \frac{d^2}{n}$.

Problema 8. Pablo tiene suficientes fichas rojas, blancas y azules. Él desea colocar fichas en cada una de las casillas de un tablero de ajedrez. De entre todas las maneras en que puede hacerlo, ¿habrá más con un número par de fichas rojas o con un número impar de fichas rojas?

Problema 9. Supongamos que en una cinta infinita escribimos todos los números naturales en orden y sin dejar espacios: $1234567891011121314\ldots$. Después cortamos la cinta en tiras de 7 dígitos de largo.
Demuestra que todo número de 7 dígitos:
(a) aparecerá en al menos una de las tiras,
(b) aparecerá en un número infinito de tiras.

Problema 10. Los números p y q son números primos que satisfacen,

$$\frac{p}{p+1}+\frac{q+1}{q}=\frac{2n}{n+2}$$

para algún entero positivo n. Determina todos los valores posibles de $q-p$.

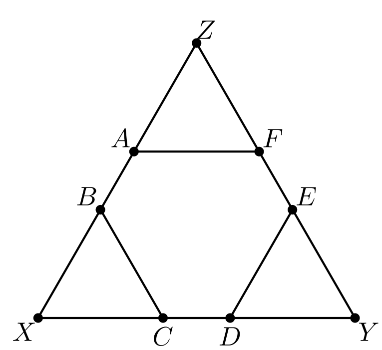
Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2012 No. 2.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento en Tzaloa 2, año 2012. En esta ocasión queremos felicitar a José Ramón Tuirán Rangel por sus soluciones a los problemas 4 y 5, y a Francisco Gómez Hernández por su contribución con la solución del Problema 5.

Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento de Tzaloa 3, año 2012, por lo que ésta es la última llamada para que tus trabajos puedan salir publicados dándote todo el crédito que mereces.

Problema 1. (Principiante) El hexágono $ABCDEF$ tiene sus seis ángulos internos iguales y cumple que $AB=CD=EF$. Demuestra que $BC=DE=FA$.

Solución. Sean X la intersección de AB con CD, Y la intersección de CD con EF y Z la intersección de EF con AB, respectivamente. Sean, además, $a=AB=CD=EF$, $x=BC$, $y=DE$ y $z=FA$.



Como el hexágono tiene sus seis ángulos internos iguales, cada ángulo mide $120°$. Luego, $\angle XBC = \angle XCB = 60°$ y el triángulo XBC es equilátero con $XB = XC = BC = x$. Análogamente, tenemos que los triángulos YDE y ZAF son equiláteros con $YD = YE = DE = y$ y $ZF = ZA = FA = z$.
Como el triángulo XYZ también es equilátero se tiene que,

$$z + a + x = x + a + y = y + a + z,$$

de donde $z + x = x + y = y + z$ y por lo tanto, $x = y = z$.

Problema 2. (Principiante) Los números del 1 al 9 son colocados sobre cada una de las casillas de un tablero de 3×3. Para cada fila, marcamos el segundo número más grande de esa fila. ¿Cuántos arreglos hay tales que el segundo número más grande de los tres marcados es el 5?

Solución. Digamos que 5, m y n son los segundos números de cada una de las tres filas. Queremos que $m < 5 < n$ (o $n < 5 < m$).
Para que esto no se de, tendría que pasar que $m < 5$ y $n < 5$, o bien que $m > 5$ y $n > 5$. Veamos que esto no puede ocurrir. Supongamos que $m < 5$ y $n < 5$. En la fila donde está m hay un número que es menor a él, y por tanto menor a 5. De la misma manera, en la fila donde está n hay un número menor a él y por tanto menor a 5. Además, en la fila donde está el 5 hay también un número menor que 5. Luego, tendríamos 5 números menores a 5, lo que es una contradicción. Por lo tanto, no puede darse el caso en que $m < 5$ y $n < 5$. El caso $m > 5$ y $n > 5$ es análogo.
Luego, sólo necesitamos asegurar que en una de las tres filas el segundo número más grande sea el 5.
Tenemos 9 maneras de elegir dónde poner el 5. Luego, en las dos casillas restantes de esa fila tendremos que poner un número menor a 5 y un número mayor a 5. Cada uno de estos números puede ser elegido de 4 maneras. Además, hay 2 maneras de ponerlos en esa fila. Finalmente, los 6 números restantes pueden ir en cualquier orden y eso nos da $6! = 720$. Luego, el número buscado es $9 \times 4 \times 4 \times 2 \times 6! = 207,360$.

Problema 3. (Intermedio) Dos números son tales que la suma de sus cubos es 5 y la suma de sus cuadrados es 3. Determina la suma de los dos números.

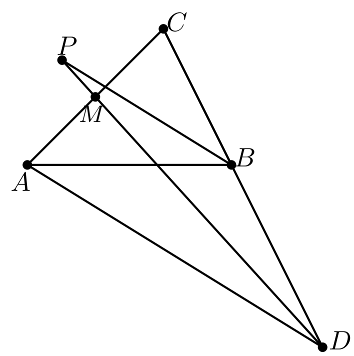
Solución. Sean x y y los números. Tenemos que, $x^3 + y^3 = 5$ y $x^2 + y^2 = 3$. Sea $a = x + y$. Como $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$, tenemos que $a^3 = 5 + 3xya$. Como $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, tenemos que $a^2 = 3 + 2xy$, que equivale a $xy = \frac{1}{2}\left(a^2 - 3\right)$.
Luego, $a^3 = 5 + \frac{3}{2}\left(a^2 - 3\right)a$, o bien $a^3 - 9a + 10 = 0$. Una solución es $a = 2$. Dividiendo $a^3 - 9a + 10$ entre $a - 2$ obtenemos el factor $a^2 + 2a - 5$. Por lo tanto, $(a - 2)(a^2 + 2a - 5) = 0$. Entonces, $a = 2$ o $a = -1 \pm \sqrt{6}$.
Si $a = x+y = 2$, entonces $xy = \frac{1}{2}$. Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos las soluciones $(x, y) = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$.
Si $a = x + y = -1 + \sqrt{6}$, entonces $xy = 2 - \sqrt{6}$. Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos las soluciones $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{6}-1-\sqrt{2\sqrt{6}-1}}{2}, \frac{\sqrt{6}-1+\sqrt{2\sqrt{6}-1}}{2}\right)$ y

$\left(\frac{\sqrt{6}-1+\sqrt{2\sqrt{6}-1}}{2}, \frac{\sqrt{6}-1-\sqrt{2\sqrt{6}-1}}{2}\right)$.

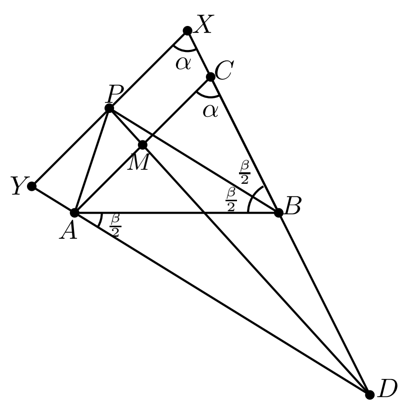
Si $a = x+y = -1-\sqrt{6}$, entonces $xy = 2+\sqrt{6}$. Sustituyendo $x = -1-\sqrt{6}-y$ en la segunda ecuación, obtenemos después de simplificar $y^2 + (1+\sqrt{6})y + (2+\sqrt{6}) = 0$, cuyas soluciones son $y = \frac{-(1+\sqrt{6})\pm\sqrt{-1-2\sqrt{6}}}{2}$. Como $-1-2\sqrt{6} < 0$, no hay números reales que satisfagan esta ecuación.

Por lo tanto, los valores posibles de $x+y$ son 2 y $-1+\sqrt{6}$ si x y y son números reales. (Observe que si permitimos que x y y sean números complejos, entonces $x+y = -1-\sqrt{6}$ es otro valor posible.)

Problema 4. (Intermedio) Sea ABC un triángulo. Sea D el punto en el lado BC más allá de B tal que $BD = BA$ y sea M el punto medio de AC. La bisectriz del ángulo ABC intersecta a DM en P. Prueba que $\angle BAP = \angle ACB$.



Solución de José Ramón Tuirán Rangel. Sea PX la recta paralela a AC, con X en la recta BC. Sea Y la intersección de PX con AD. Como M es punto medio de AC, entonces P es punto medio de XY.



La recta PB es paralela a AD, ya que $2\angle DAB = \angle DAB + \angle BDA = \angle ABC =$

$2\angle PBA$, luego B es el punto medio de DX. Entonces, $BX = BD = AB$, de aquí que los triángulos BPA y BPX son congruentes. Por lo tanto, $\angle BAP = \angle BXP = \angle BCA$.

Problema 5. (Avanzado) Demuestra que hay una infinidad de ternas de enteros positivos (x, y, z) tales que,

$$x^3 + y^5 = z^7.$$

Solución de Francisco Gómez Hernández. Primero observemos que $2^{90} + 2^{90} = 2^{91}$ y notemos que $90 = 3 \cdot 30$, $90 = 5 \cdot 18$ y $91 = 7 \cdot 13$. Por lo tanto, tenemos que,

$$\left(2^{30}\right)^3 + \left(2^{18}\right)^5 = \left(2^{13}\right)^7$$

entonces $x = 2^{30}$, $y = 2^{18}$ y $z = 2^{13}$ es una solución. Ahora que ya sabemos que hay al menos una solución, demostraremos que existen infinitas soluciones.
Supongamos que (x_0, y_0, z_0) es solución de la ecuación. Si $x_1 = 2^{35}x_0$, $y_1 = 2^{21}y_0$ y $z_1 = 2^{15}z_0$, tenemos que:

$$\begin{aligned} x_1^3 + y_1^5 &= \left(2^{35}x_0\right)^3 + \left(2^{21}y_0\right)^5 \\ &= 2^{105}x_0^3 + 2^{105}y_0^5 \\ &= 2^{105}\left(x_0^3 + y_0^5\right) \end{aligned}$$

pero debido a que (x_0, y_0, z_0) es solución de la ecuación, se cumple que $x_0^3 + y_0^5 = z_0^7$ y así,

$$\begin{aligned} x_1^3 + y_1^5 &= 2^{105}\left(x_0^3 + y_0^5\right) \\ &= 2^{15\cdot 7}z_0^7 \\ &= \left(2^{15}z_0\right)^7 \end{aligned}$$

por lo tanto (x_1, y_1, z_1) también es solución de la ecuación.
Ahora, podemos construir una infinidad de soluciones empezando con $x_0 = 2^{30}$, $y_0 = 2^{18}$ y $z_0 = 2^{13}$. Como $x_0 > y_0 > z_0$, tenemos que $x_1 > y_1 > z_1$ y por lo tanto, la solución (x_1, y_1, z_1) es distinta de la solución (x_0, y_0, z_0). Ahora, a partir de la solución (x_1, y_1, z_1) construimos la solución (x_2, y_2, z_2) donde $x_2 = 2^{35}x_1 > x_1$, $y_2 = 2^{21}y_1 > y_1$ y $z_2 = 2^{15}z_1 > z_1$. Continuando de esta forma, obtenemos una infinidad de soluciones para la ecuación.

Solución de José Ramón Tuirán Rangel. Consideremos todas las ternas de la forma $(2^{35n+30}, 2^{21n+18}, 2^{15n+13})$ con n un entero positivo. Entonces, es fácil ver que

$$(2^{35n+30})^3 + (2^{21n+18})^5 = (2^{15n+13})^7,$$

pues $(2^{35n+30})^3 = 2^{105n+90}$, $(2^{21n+18})^5 = 2^{105n+90}$ y $(2^{15n+13})^7 = 2^{105n+91}$. Por lo tanto, todas las ternas de la forma $(2^{35n+30}, 2^{21n+18}, 2^{15n+13})$ con n entero positivo, son solución de la ecuación $x^3 + y^5 = z^7$, de donde se sigue que hay una infinidad de soluciones.

Concurso Nacional 2012
26ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Del 11 al 17 de noviembre de 2012 se llevó a cabo en Guanajuato, Guanajuato, el Concurso Nacional de la 26ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de todos los estados de la República. Además, se contó con la participación (fuera del concurso) de un equipo de cuatro estudiantes de los Estados Unidos.

Los 17 alumnos ganadores del primer lugar (ordenados por estados) fueron:

Erick Rosete Beas (Baja California)
Luis Enrique Chacón Ochoa (Chihuahua)
Luis Carlos García Ramos (Chihuahua)
Enrique Chiu Han (Distrito Federal)
Joshua Ayork Acevedo Carabantes (Guanajuato)
Ramón Iván García Álvarez (Guanajuato)
Adán Medrano Martín del Campo (Jalisco)
Juan Carlos Ortiz Rhoton (Jalisco)
Diego Terán Ríos (Morelos)
José Alberto De la Paz Espinosa (Nayarit)
Kevin William Beuchot Castellanos (Nuevo León)
Raúl Arturo Hernández González (Nuevo León)
Diego Alonso Roque Montoya (Nuevo León)
Demian Espinosa Ruiz (San Luis Potosí)
Carlos Alejandro Hernández Gómez (San Luis Potosí)
Axel Omer Gómez Cásarez (Sonora)
Luis Xavier Ramos Tormo (Yucatán)

Los 8 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Luis Xavier Ramos Tormo (Yucatán)
Kevin William Beuchot Castellanos (Nuevo León)
Jorge Pat De la Torre Sánchez (Coahuila)
Pablo Meré Hidalgo (Querétaro)
Juan Carlos Castro Fernández (Morelos)
Antonio López Guzmán (Chihuahua)
Juan Luis García Guerrero (San Luis Potosí)
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco)

En esta ocasión, el estudiante Miguel Ángel Reyes Badilla del Estado de Sinaloa, se hizo acreedor al premio especial de solución creativa, por su solución del problema 3. Este premio no se daba desde la 14^a Olimpiada en el año 2000.

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el Concurso Nacional de la 26^a OMM.

1. Jalisco
2. Nuevo León
3. San Luis Potosí
4. Morelos
4. Yucatán
6. Guanajuato
7. Distrito Federal
8. Chihuahua
9. Baja California
9. Sonora

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó Copa "**Kuanasï Uato Karharani**" y fue ganado por el Estado de México. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, Coahuila y Guerrero, respectivamente. Jalisco se llevó el primer lugar general por estados, Nuevo León se llevó el segundo lugar y San Luis Potosí el tercero.

A continuación presentamos los problemas del Concurso Nacional 2012. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Sean $\mathcal{C}_1$ una circunferencia con centro O, P un punto sobre ella y l la recta tangente a $\mathcal{C}_1$ en P. Considera un punto Q sobre l, distinto de P, y sea $\mathcal{C}_2$ la circunferencia que pasa por O, P y Q. El segmento OQ intersecta a $\mathcal{C}_1$ en S y la recta PS intersecta a $\mathcal{C}_2$ en un punto R distinto de P. Si r_1 y r_2 son las longitudes de los radios de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente, muestra que,

$$\frac{PS}{SR} = \frac{r_1}{r_2}.$$

(Sugerido por Marco Antonio Flores Martínez)

Problema 2. Sea $n \geq 4$ un número par. Considera una cuadrícula de $n \times n$. Dos celdas (cuadraditos de 1×1) son vecinas si comparten un lado, si están en extremos opuestos de un mismo renglón o si están en extremos opuestos de una misma columna. De esta forma, toda celda en la cuadrícula tiene exactamente cuatro celdas vecinas.
En cada celda está escrito un número del 1 al 4 de acuerdo con las siguientes reglas:

- Si en una celda está escrito un 2 entonces en dos o más celdas vecinas está escrito un 1.
- Si en una celda está escrito un 3 entonces en dos o más celdas vecinas está escrito un 1.
- Si en una celda está escrito un 4 entonces en las cuatro celdas vecinas está escrito un 1.

Entre los acomodos que cumplan las condiciones anteriores, ¿cuál es el máximo número que se puede obtener sumando los números escritos en todas las celdas?
(Sugerido por Ricardo Chávez Cáliz y Arturo Antonio Martínez Rodríguez)

Problema 3. Muestra que entre cualesquiera 14 números enteros positivos consecutivos siempre hay 6 números tales que cualesquiera dos de ellos son primos relativos.
Nota: Dos números a, b son primos relativos si su único divisor común positivo es el 1.
(Sugerido por Garaev Moubariz)

Problema 4. A cada entero positivo se le aplica el siguiente proceso: al número se le resta la suma de sus dígitos, y el resultado se divide entre 9. Por ejemplo, el resultado del proceso aplicado a 938 es 102, ya que $(938-(9+3+8))/9 = 102$. Aplicando dos veces el proceso a 938 se llega a 11, aplicado tres veces se llega a 1, y aplicado cuatro veces se llega al 0.
Cuando a un entero positivo n se le aplica el proceso una o varias veces, se termina en 0. Al número al que se llega antes de llegar al cero, lo llamamos la *casa* de n. ¿Cuántos números menores que 26000 tienen la misma casa que el 2012?
(Sugerido por David Cossío Ruiz)

Problema 5. Algunas ranas, unas de ellas rojas y otras verdes, se van a mover en un tablero de 11×11, de acuerdo a las siguientes reglas. Si una rana está ubicada, digamos, en la casilla marcada con $\#$ en la siguiente figura, entonces

- Si es roja, puede saltar a cualquiera de las casillas marcadas con $\times$.
- Si es verde, puede saltar a cualquiera de las casillas marcadas con $\circ$.

		$\times$		$\circ$		
	$\circ$				$\times$	
			$\#$			
	$\times$				$\circ$	
		$\circ$		$\times$		

Diremos que dos ranas (de cualquier color) *se pueden encontrar en una casilla* si ambas pueden llegar hasta tal casilla saltando una o más veces, no necesariamente con el mismo número de saltos.

a) Muestra que si ponemos 6 ranas, entonces hay al menos 2 que se pueden encontrar en una casilla.

b) ¿Para qué valores de k es posible poner una rana roja y una rana verde de manera que haya exactamente k casillas en las que estas ranas se pueden encontrar?

(Sugerido por Leonardo Ignacio Martínez Sandoval)

Problema 6. Considera un triángulo acutángulo ABC con circuncírculo $\mathcal{C}$. Sean H el ortocentro del triángulo ABC y M el punto medio de BC. Las rectas AH, BH y CH cortan por segunda vez a $\mathcal{C}$ en D, E y F, respectivamente; la recta MH corta a $\mathcal{C}$ en J de manera que H queda entre M y J. Sean K y L los incentros de los triángulos DEJ y DFJ, respectivamente. Muestra que KL es paralela a BC.

(Sugerido por Eduardo Velasco Barreras)

Olimpiadas Internacionales

XXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

La XXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas se realizó del 29 de septiembre al 6 de octubre, en Cochabamba, Bolivia. Los alumnos que concursaron fueron: Adán Medrano Martín del Campo y Juan Carlos Ortiz Rhoton, ambos de Jalisco, Enrique Chiu Han del Distrito Federal y Julio César Díaz Calderón de Oaxaca. Julio César obtuvo una medalla de plata y Adán, Juan Carlos y Enrique obtuvieron cada uno una medalla de bronce. En esta ocasión México ocupó el sexto lugar de entre los 19 países que participaron. En esta competencia dos de los seis problemas fueron inventados por mexicanos: el segundo por Leonardo Ignacio Martínez Sandoval y el quinto por Eduardo Velasco Barreras.

A continuación presentamos los problemas de la XXVII Olimpiada Iberoamericana. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Sea $ABCD$ un rectángulo. Se construyen triángulos equiláteros BCX y DCY de modo que estos triángulos comparten algunos de sus puntos interiores con los puntos interiores del rectángulo. Las rectas AX y CD se cortan en P, y las rectas AY y BC se cortan en Q. Probar que el triángulo APQ es equilátero.

Problema 2. Decimos que un entero positivo es *brillante* si puede ser escrito como la suma de dos enteros no necesariamente distintos a y b con la misma suma de dígitos. Por ejemplo, 2012 es brillante ya que $2012 = 2005 + 7$ y 2005 y 7 tienen la misma suma de dígitos. Determinar todos los enteros positivos que no son brillantes.

Problema 3. Sea n un entero positivo. Dado un conjunto de enteros $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, donde $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ para todo i, asociamos a cada uno de sus subconjuntos la suma de sus elementos; en el caso particular del conjunto vacío dicha suma es 0. Decimos que $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es n-completo si todas estas sumas son diferentes módulo 2^n. Determinar el número de conjuntos n-completos en función de n.

Problema 4. Sean a, b, c, d enteros tales que $a-b+c-d$ es impar y divide a $a^2-b^2+c^2-d^2$. Probar que para todo entero positivo n, $a-b+c-d$ divide a $a^n-b^n+c^n-d^n$.

Problema 5. En un triángulo ABC, sean P y Q las intersecciones de la paralela a BC por A con las bisectrices exteriores de los ángulos B y C, respectivamente. La perpendicular a BP por P y la perpendicular a CQ por Q se cortan en R. Si I es el incentro de ABC, demostrar que $AI = AR$.

Problema 6. Demostrar que para todo entero positivo n existen n enteros positivos consecutivos tales que ninguno de ellos es divisible por la suma de sus respectivos dígitos.

Problemas y Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

La XIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe se realizó del 15 al 23 de junio de 2012 en la ciudad de San Salvador, El Salvador, con la participación de 12 países y un total de 36 estudiantes.

En esta ocasión, los tres alumnos que representaron a México fueron premiados, obteniendo dos medallas de oro y una de plata. En esta destacada participación, un alumno mexicano obtuvo examen perfecto y la delegación de México se colocó en el primer lugar general por países.

La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Luis Xavier Ramos Tormo (medalla de plata), Juan Carlos Ortiz Rhoton (medalla de oro) y Enrique Chiu Han (medalla de oro y examen perfecto).

A continuación presentamos los problemas y soluciones de la XIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Hallar todos los enteros positivos que sean iguales a 700 veces la suma de sus dígitos.

Solución de Juan Carlos Ortiz Rhoton. Sea k un entero positivo tal que $700S(k) = k$, donde $S(k)$ denota la suma de los dígitos de k. Sea $n = \frac{k}{100}$. Observemos que n es un entero positivo, pues como $700 \mid k$ y $100 \mid 700$, tenemos que $100 \mid k$. Como $S(n) = S(k)$ y $k = 100n$, tenemos que $7S(n) = n$. Supongamos que $n = a_1 + 10a_2 + \cdots + 10^{m-1}a_m$ donde $a_1, a_2, \ldots, a_m$ son dígitos con $a_m \neq 0$. Entonces,

$$7(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) = a_1 + 10a_2 + \cdots + 10^{m-1}a_m,$$

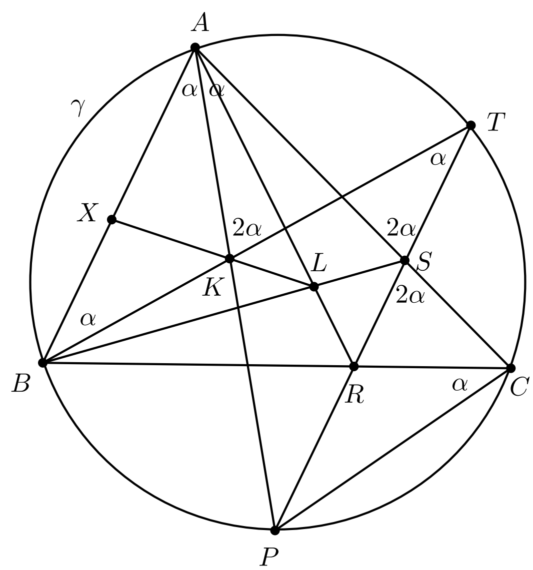
de donde,

$$\begin{aligned} 0 &= 6a_1 - (10-7)a_2 - \cdots - (10^{m-1}-7)a_m \\ &\leq 6a_1 - (10^{m-1}-7)a_m \\ &\leq 54 - 10^{m-1} + 7 = 61 - 10^{m-1}, \end{aligned}$$

pues $a_m \geq 1$ y $a_1 \leq 9$. Así, $10^{m-1} \leq 61$ y por lo tanto $m = 1$ o 2. Si $m = 1$, entonces $7n = n$ lo cual no puede ser ya que n es positivo. Luego, $m = 2$ y $n = a_1 + 10a_2$. Entonces, $7(a_1 + a_2) = a_1 + 10a_2$ de donde $a_2 = 2a_1$. Por lo tanto, los valores posibles de n son $21, 42, 63$ y 84, de donde se sigue que los valores posibles de k son $2100, 4200, 6300$ y 8400. Por último es fácil ver que estos valores de k satisfacen el problema.

Problema 2. Sea γ la circunferencia circunscrita al triángulo acutángulo ABC. Sea P el punto medio del menor arco BC. La paralela por P a la recta AB intersecta BC, AC y γ en los puntos R, S y T, respectivamente. Se definen los puntos K y L como las intersecciones de AP con BT y BS con AR. Demostrar que la recta KL pasa por el punto medio de AB si y sólo si $CS = PR$.

Solución de Luis Xavier Ramos Tormo.



Primero, veamos que, como $\widehat{BP} = \widehat{PC} = \frac{1}{2}\widehat{BC}$ (por hipótesis), entonces: $\angle PAC = \angle BAP = \angle BTP$. Como $\angle PAC = \angle BTP$, el cuadrilátero $ATSK$ es cíclico. Así, $\angle AKT = \angle AST = \angle PSC$. Como $AB \| PT$, $\angle PSC = \angle BAC$ y $\angle BAC = \angle BAP + \angle PAC = 2\angle BAP$ (ya que $\angle BAP = \angle PAC$).

Así, $\angle AKT = 2\angle BAP$, por transitividad. De aquí que $\angle BKA = 180° - 2\angle BAP$. Como los ángulos internos de $\triangle ABK$ suman $180°$, entonces $\angle BAP + \angle BKA +$

$\angle ABK = 180°$. Como $\angle BKA = 180° - 2\angle BAP$, al sustituir tenemos que $\angle BAP + 180° - 2\angle BAP + \angle ABK = 180°$. Por tanto, $\angle ABK = \angle BAP$ y, así, $\triangle KAB$ es isósceles con $KA = KB$.

Primero veamos que si KL intersecta a AB en su punto medio, entonces $CS = PR$:

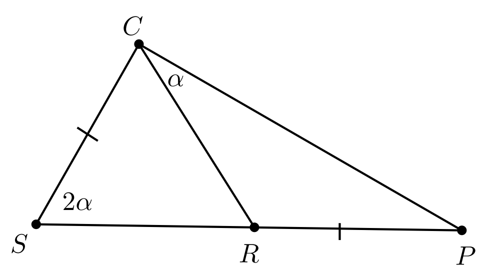
Sea X la intersección de AB y KL. Tenemos que X es punto medio de AB. Así, X está sobre la mediatriz de AB. Como $KA = KB$, K está sobre la mediatriz de AB. Como X y K son dos puntos distintos sobre la mediatriz de AB, concluimos que KX es la mediatriz de AB. Como L está sobre KX, L está sobre la mediatriz de AB, por lo que $LA = LB$.

Como $AB \| PT$, y como $LA = LB$, tenemos que $\angle BSR = \angle SBA = \angle RAB$ y como $\angle BSR = \angle RAB$, el cuadrilátero $ASRB$ es cíclico. Así, $\angle SRC = \angle BAC$, pero como $\angle RSC = \angle BAC$ por la paralelas, tenemos que $\triangle CSR$ es isósceles con $CS = CR$.

Por ángulos inscritos, $\angle BAP = \angle BCP$. Como $PT \| AB$, $\triangle CSR \sim \triangle CAB$, pero como $CS = CR$, entonces $CA = CB$ y así, $\triangle ABC$ es isósceles con $\angle BAC = \angle ABC$. Como $\angle BAC = 2\angle BAP$, entonces $\angle ABC = 2\angle BAP$. Además, $\angle ABC = \angle ABT + \angle TBC$ y, como $\angle BAC = 2\angle BAP$ y $\angle ABT = \angle BAP$, tenemos que $\angle TBC = \angle BAP$, pero por ángulos inscritos, $\angle TPC = \angle TBC$, así que $\angle TPC = \angle BAP = \angle BCP$ y así, $\triangle PRC$ es isósceles con $CR = RP$, pero como $CS = CR$, concluimos que $CS = RP$ y ya acabamos la ida.

Ahora la vuelta: suponiendo que $CS = PR$, demostraremos que KL biseca a AB.

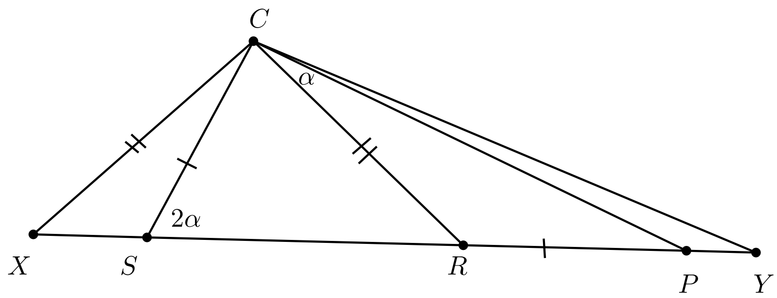
Como antes, podemos llegar a que $\angle PSC = 2\angle BAP$ y que $\angle PCB = \angle BAP$. Ahora, tomamos una parte del dibujo.



Probaremos que $CR = CS = RP$.

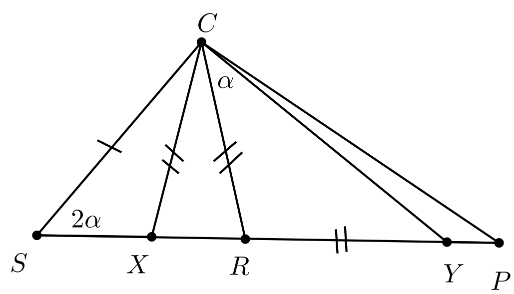
Caso 1: Supongamos que $CR > CS = RP$.

Tomemos un punto X sobre SP distinto de R tal que $CR = CX$ y un punto Y sobre el rayo RP tal que $CR = RY$. Por la desigualdad, Y queda fuera del segmento RP y X queda fuera del segmento RS.



En el dibujo, es fácil ver que $\angle CXR = \angle CRX = 2\angle RCY$, usando los triángulos isósceles construidos. Así, $\angle CXR = 2\angle RCY$, pero $RCY > \alpha$, y $\angle CXR = \angle CSR - \angle XCS = 2\alpha - \angle XCS$, claramente, por lo que $\angle CXR < 2\alpha$ y $\angle RCY > \alpha$, pero $\angle CXR = 2\angle RCY > 2\alpha$. De aquí que $2\alpha > \angle CXR > 2\alpha$, lo cual es una contradicción.

Caso 2: $CR < CS = RP$. Este caso es similar al anterior. Tomamos un punto X sobre PS, distinto de R, tal que $CR = CX$. Como $CR < CS$, es claro que X queda sobre el segmento SR. Nos tomamos un punto Y sobre el rayo $\overrightarrow{RP}$ de tal forma que $RC = RY$. Como $CR < CS = RP$, es claro que Y queda sobre el segmento RP.



Aquí, sucede que $\angle CXR = \angle CRX = \angle RCY + \angle RYC = 2\angle RCY$ usando los isósceles y que los ángulos internos de todo triángulo suman $180°$. Pero, como antes, es fácil ver que $\angle CXR > 2\alpha$ y que $\angle YCR < \alpha$. De aquí que $\angle CXR = 2\angle YCR < 2\alpha$. Luego, $2\alpha > \angle CXR > 2\alpha$, lo cual es una contradicción. Así, $CR < CS$ no se puede dar.

Como en ambos casos llegamos a una contradicción, no es posible que $CR > CS$ ni que $CR < CS$, por lo que $CR = CS$. Así, $CR = CS = RP$ y a partir de aquí, se pueden seguir (en orden inverso) los pasos de la ida. Es decir, a partir de aquí, la vuelta es análoga:

Como $CS = CR$ y $\triangle CSR \sim \triangle CAB$, tenemos que $CA = CB$. Como $CA = CB$ y $CS = CR$, entonces $SA = RB$. Así, en el cuadrilátero $SABR$ hay dos lados iguales y los otros dos son paralelos, por lo que el cuadrilátero $SABR$ es un trapecio isósceles. Así, como L es la intersección de sus diagonales, $LA = LB$ y entonces, K y L están sobre la mediatriz de AB. Por lo que KL pasa por el punto medio de AB.

Problema 3. Sean a, b, c números reales que satisfacen $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 1$ y $ab + bc + ca > 0$. Demostrar que,

$$a + b + c - \frac{abc}{ab + bc + ca} \geq 4.$$

Solución de Luis Xavier Ramos Tormo. Por hipótesis, $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 1$. Multiplicando por $(a + b)(b + c)(c + a)$ obtenemos que,

$$(b + c)(c + a) + (a + b)(c + a) + (a + b)(b + c) = (a + b)(b + c)(c + a).$$

Desarrollando el lado izquierdo obtenemos que,

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca) = (a + b)(b + c)(c + a).$$

Como $ab + bc + ca > 0$, la desigualdad a demostrar es equivalente con la desigualdad,

$$(ab + bc + ca)\left(a + b + c - \frac{abc}{ab + bc + ca}\right) \geq 4(ab + bc + ca),$$

es decir,

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + 2abc \geq 4(ab + bc + ca).$$

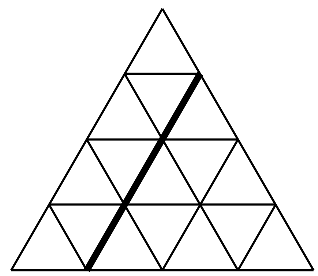
El lado izquierdo de esta desigualdad se puede factorizar como $(a + b)(b + c)(c + a)$. Luego, basta demostrar que $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 4(ab + bc + ca)$, o bien que $a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca) \geq 4(ab + bc + ca)$, pues sabemos que $a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca) = (a + b)(b + c)(c + a)$. Ahora,

$$\begin{aligned}
& a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca) \geq 4(ab + bc + ca) \\
\Leftrightarrow \quad & a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2) \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

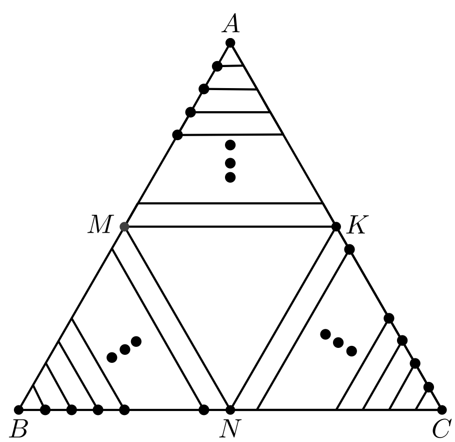
lo cual evidentemente es verdadero. Por lo tanto, la desigualdad original es verdadera.

Problema 4. Trilandia es una ciudad muy peculiar. La ciudad tiene forma de triángulo equilátero de lado 2012. Las calles dividen la ciudad en varios bloques que tienen forma de triángulo equilátero de lado 1. También hay calles en el borde de Trilandia. En total hay 6036 calles. El alcalde quiere ubicar puestos de vigilancia en algunas esquinas de la ciudad, para vigilar las calles. Un puesto de vigilancia puede vigilar todas las calles en las que esté ubicado. ¿Cuál es la menor cantidad de puestos que se requieren para poder vigilar todas las calles de Trilandia?

En el siguiente modelo reducido se muestra una de las 12 calles.



Solución de Juan Carlos Ortiz Rhoton. Fijémonos en una configuración que tenga el mínimo número posible de policías. Considero C_i como el conjunto de calles de tamaño i, con i entre 1 y 1005. Considero C la unión de todas las C_i's. Es fácil ver que C contiene 3015 calles, y en C no hay ningún punto de intersección (ninguna esquina). Entonces hay mínimo 3015 policías, uno por cada calle de C. Además de C hay muchas calles, entre ellas las que miden 1006. Estas 3 calles de lado 1006 forman un triángulo equilátero de lado 1006. Entonces necesito al menos 2 policías para cubrir los tres lados de este triángulo (con 2 policías, una manera es ponerlos en dos de los vértices del triángulo). Así, sumando, hay mínimo 3017 policías. Es fácil ver que 3017 cumple, poniendo 1005 policías en cada lado del triángulo de lado 2012, así: Si el triángulo es ABC en sentido de las manecillas del reloj y M, N y K son puntos medios de AB, BC y CA, respectivamente, pongo 1005 policías en cada uno de estos segmentos: AM, BN y CK. Y además dos policías en el triángulo equilátero central de lado 1006.



Problema 5. Alejandro y Luisa son una pareja de ladrones. Cada día por la mañana,

Luisa le roba a Alejandro un tercio de su dinero, pero por la tarde sufre de un inusual ataque de conciencia y le da la mitad de todo el dinero que ella tiene. Si Luisa roba por primera vez en el día 1, y antes de eso no tenía dinero, ¿cuál es la menor cantidad entera positiva de dinero que Alejandro debe tener para que al final del día 2012 ambos tengan una cantidad entera de dinero?

Solución de Enrique Chiu Han. Es claro que la cantidad total de dinero de Luisa y Alejandro juntos es siempre constante. Para $i \geq 2$, sean a_i la cantidad de dinero de Alejandro al final del día $i-1$ y l_i la cantidad de Luisa al final del día $i-1$. Además, sean $a_1 = a$ la cantidad de dinero de Alejandro al inicio del día 1 y $l_1 = 0$ la cantidad de dinero de Luisa antes de robar por primera vez. Entonces, $a_i + l_i = a$ para toda $i \geq 1$ y de acuerdo con el enunciado del problema tenemos que,

$$l_i = \frac{l_{i-1} + \frac{a_{i-1}}{3}}{2} \quad \text{y} \quad a_i = a_{i-1} - \frac{a_{i-1}}{3} + \frac{l_{i-1} + \frac{a_{i-1}}{3}}{2}.$$

Entonces, para $i \geq 2$ tenemos que

$$\begin{aligned} a_i &= a_{i-1} - \frac{a_{i-1}}{3} + \frac{l_{i-1} + \frac{a_{i-1}}{3}}{2} \\ &= \frac{5}{6}a_{i-1} + \frac{1}{2}l_{i-1} \\ &= \frac{5}{6}a_{i-1} + \frac{1}{2}(a - a_{i-1}) \\ &= \frac{1}{3}a_{i-1} + \frac{1}{2}a. \end{aligned}$$

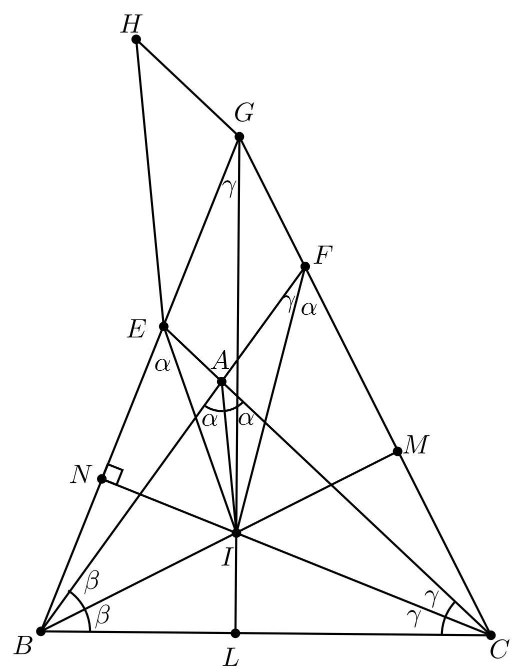
Aplicando la recursión anterior varias veces, obtenemos

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{3^{i-1}}a_1 + \frac{1}{2}a\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^{i-2}}\right) \\ &= \frac{1}{3^{i-1}}a + \frac{1}{2}a\left(\frac{1 - \frac{1}{3^{i-1}}}{1 - \frac{1}{3}}\right) \\ &= \frac{1}{3^{i-1}}a + \frac{1}{2}a\left(\frac{3(3^{i-1} - 1)}{2(3^{i-1})}\right) \\ &= \frac{1}{3^{i-1}}a + \frac{1}{2}a\left(\frac{3^i - 3}{2(3^{i-1})}\right) \\ &= a\left(\frac{1}{3^{i-1}} + \frac{3^i - 3)}{4(3^{i-1})}\right) \\ &= a\left(\frac{3^i + 1}{4(3^{i-1})}\right). \end{aligned}$$

Como queremos que a_{2013} sea un entero, de la relación $a_{2013} = a\left(\frac{3^{2013}+1}{4(3^{2012})}\right)$ tenemos que $4(3^{2012}) \mid a(3^{2013}+1)$. Como $4 \mid 3^{2013}+1$ (pues $3^{2k-1} \equiv -1 \pmod 4$ para todo entero positivo k), entonces $a_{2013} = a\left(\frac{\frac{3^{2013}+1}{4}}{3^{2012}}\right)$. Pero $\left(3^{2012}, \frac{3^{2013}+1}{4}\right) = 1$, entonces $3^{2012} \mid a$, y a cumple la condición si y sólo si $3^{2012} \mid a$. Como a y a_{2013} son enteros, entonces $l_{2013} = a - a_{2013}$ es un entero y $a = 3^{2012}$ es la menor solución.

Problema 6. Sea ABC un triángulo con $AB < BC$, y sean E y F puntos en AC y AB, respectivamente, tales que $BF = BC = CE$, ambos ubicados en el mismo lado que A respecto de BC. Sea G la intersección de BE con CF. Se toma un punto H sobre la paralela a AC por G tal que $HG = AF$ (con H en distinto lado que C respecto de BG). Demostrar que $\angle EHG = \frac{\angle BAC}{2}$.

Solución de Enrique Chiu Han. Sean I el incentro de $\triangle ABC$, $\angle CAB = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$ y $\angle BCA = 2\gamma$.



Nuestra demostración se basará en los siguientes puntos:

1. $\triangle IAF \sim \triangle IEG$.

Como I es el incentro de $\triangle ABC$, $\angle FBI = \angle CBI = \beta$, $\angle BCI = \angle ECI = \gamma$, y como $\triangle FBC$ y $\triangle ECB$ son isósceles con $FB = CB$ y $EC = CB$, tenemos que la bisectriz de $\angle FBC$ es altura de B a FC y mediatriz de FC, de donde $BI \perp FC$ y $CI = FI$. Análogamente, $CI \perp BE$ y $BI = EI$. Además, como $BI \perp CG$ y $CI \perp BG$, I es el ortocentro de $\triangle GBC$, de donde $GI \perp BC$. Sean L, M y N los pies de las alturas

en el $\triangle GBC$ desde G, B y C respectivamente. Como $\angle GLC = \angle GNC = 90°$, el cuadrilátero $GNLC$ es cíclico, de donde $\angle LCN = \angle LGN = \gamma$.
Por otro lado, $\angle BFC = \angle BCF = \frac{180°-2\beta}{2} = 90° - \beta$ y

$$\angle CFI = \angle FCI = \angle BCF - \angle BCI = 90° - \beta - \gamma = \alpha,$$

de donde,

$$\angle AFI = \angle BFC - \angle IFC = 90° - \beta - \alpha = \gamma = \angle EGI.$$

Además, $\angle IEB = \angle IBE = \angle CBE - \angle CBI = 90° - \gamma - \beta = \alpha$. Entonces $\angle IEG = 180° - \angle IEB = 180° - \alpha = 180° - \angle IAB = \angle IAF$.

Como $\angle IEG = \angle IAF$ y $\angle EGI = \angle AFI$, $\triangle IAF \sim \triangle IEG$, como queríamos.

2. $\triangle HGE \sim \triangle AIB$.

Por lo anterior, tenemos que $\frac{GE}{IE} = \frac{FA}{IA}$. Entonces $\frac{GE}{IB} = \frac{HG}{IA}$, aquí usamos que $IE = IB$ y $AF = HG$. Además, como $\angle HGE = \angle GEC$ (pues $HG \| EC$) y $\angle GEC = 180° - \angle BEC = 180° - (90° - \gamma) = 90° + \gamma = 180° - \alpha - \beta = \angle AIB$, obtenemos que $\triangle HGE \sim \triangle AIB$ según el criterio de semejanza LAL.

Entonces, $\angle EHG = \angle BAI = \alpha = \frac{\angle BAC}{2}$, como queríamos. (El caso en que A está fuera de $\triangle GBC$ es análogo).

53ª Olimpiada Internacional de Matemáticas

La 53^a Olimpiada Internacional de Matemáticas se llevó a cabo del 4 al 16 de julio de 2012 en Mar del Plata, Argentina, con la participación de 100 países.

En esta ocasión, México obtuvo una medalla de oro, una medalla de plata, dos medallas de bronce y dos menciones honoríficas. Es la segunda vez en la historia de las participaciones de México que se obtiene una medalla de oro y la ganó Diego Alonso Roque Montoya. A continuación presentamos los resultados del equipo mexicano.

Diego Alonso Roque Montoya (medalla de oro).
Adán Medrano Martín del Campo (medalla de plata).
Jorge Garza Vargas (medalla de bronce).
Julio César Díaz Calderón (medalla de bronce).
Juan Carlos Ortiz Rhoton (mención honorífica).
Jorge Ignacio González Cázares (mención honorífica).

Como delegación, México quedó en el lugar 31 de 100 países participantes.

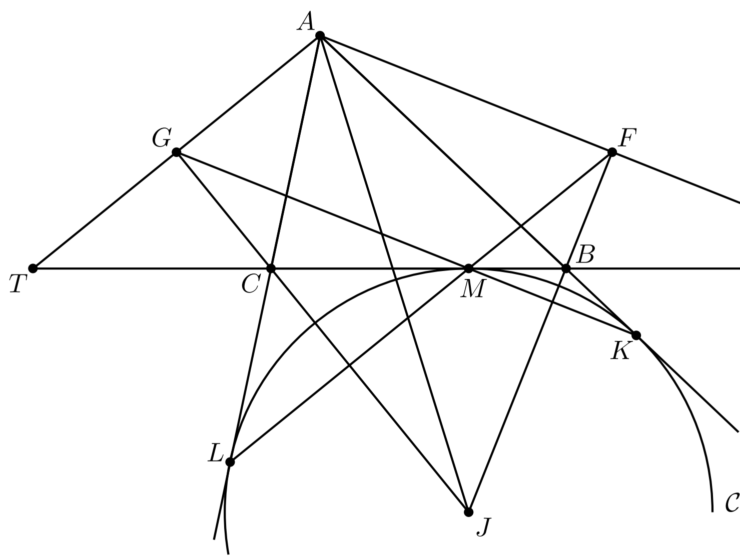
A continuación presentamos los problemas y soluciones de la 53^a Olimpiada Internacional. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Dado un triángulo ABC, el punto J es el centro del excírculo opuesto al vértice A. Este exírculo es tangente al lado BC en M, y a las rectas AB y AC en K

y L, respectivamente. Las rectas LM y BJ se cortan en F, y las rectas KM y CJ se cortan en G. Sea S el punto de intersección de las rectas AF y BC, y sea T el punto de intersección de las rectas AG y BC. Demostrar que M es el punto medio de ST. (El *exírculo* de ABC opuesto al vértice A es la circunferencia que es tangente al segmento BC, a la prolongación del lado AB más allá de B, y a la prolongación del lado AC más allá de C.)

(Problema sugerido por Grecia)

Solución de Julio César Díaz Calderón. Sean $\mathcal{C}$ el excírculo, $2\alpha = \angle CAB$, $2\beta = \angle ABC$ y $2\theta = \angle BCA$. Como la suma de los ángulos internos del triángulo ABC es $180°$ tenemos que $\alpha + \beta + \theta = 90°$.



Como $\angle BCL$ es exterior al triángulo ABC, se tiene que,

$$\angle MCL = \angle BCL = \angle BAC + \angle CBA = 2\alpha + 2\beta.$$

Como $CM = CL$ por ser tangentes a $\mathcal{C}$ se tiene que $\angle CML = \angle MLC$. Y como la suma de los ángulos internos del triángulo MCL es $180°$ se tiene que $\angle CML = \angle MLC = \theta$.

Como J es excentro, BJ es bisectriz del ángulo CBK, luego,

$$\angle FBA = \angle JBK = \angle CBJ = \frac{\angle CBK}{2} = \frac{180° - 2\beta}{2} = 90° - \beta,$$

además, $\angle FBM = 180° - \angle CBJ = 180° - (90° - \beta) = 90° + \beta$. Ahora, como la suma de los ángulos internos del triángulo FBM es $180°$, se tiene que

$$\angle LFJ = \angle MFB = 180° - \angle FBM - \angle BMF = 180° - (90° + \beta) - \theta = \alpha.$$

Por ser J excentro, AJ es bisectriz del ángulo BAC, se tiene que $\angle BAJ = \angle JAC = \alpha$. Luego, $\angle LAJ = \angle LFJ = \alpha$ por lo que el cuadrilátero $LAFJ$ es cíclico y $\angle AFJ + \angle JLA = 180°$. Pero, como $\mathcal{C}$ es tangente a la recta AC en L, tenemos que $\angle AFJ = 90°$.
Por ser radios de $\mathcal{C}$, $JK = JM$ y por ser tangentes a $\mathcal{C}$, $KB = BM$ por lo que el cuadrilátero $JKBM$ es un rombo y JB es perpendicular a MK. Como JB también es perpendicular a AS, tenemos que MK es paralelo a AS. Luego,

$$\angle BAS = \angle BKM = \angle BMK = \angle BSA,$$

de donde el triángulo BAS es isósceles con $AB = BS$. Análogamente $AC = CT$. Por ser tangentes a $\mathcal{C}$ desde un mismo punto, tenemos que $AL = AK$, $CL = CM$ y $BM = BK$. Finalmente,

$$TM = TC + CM = AC + CL = AL = AK = AB + BK = BS + MB = MS,$$

que es lo que se quería demostrar.

Problema 2. Sea $n \geq 3$ un entero, y sean $a_2, a_3, \ldots, a_n$ números reales positivos tales que $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Demostrar que,

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

(Problema sugerido por Australia)

Solución de Adán Medrano Martín del Campo. Para cada entero i con $2 \leq i \leq n$ tenemos lo siguiente,

$$1 + a_i = \underbrace{\frac{1}{i-1} + \frac{1}{i-1} + \cdots + \frac{1}{i-1}}_{i-1 \text{ veces}} + a_i$$

($i - 1$ es entero positivo). Tanto $\frac{1}{i-1}$ como a_i son positivos. Luego, por la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, tenemos que

$$\frac{\left(\overbrace{\frac{1}{i-1} + \frac{1}{i-1} + \cdots + \frac{1}{i-1}}^{i-1 \text{ veces}} + a_i\right)}{i} \geq \sqrt[i]{\frac{a_i}{(i-1)^{i-1}}},$$

esto es equivalente a

$$(1 + a_i)^i \geq \frac{i^i}{(i-1)^{i-1}} a_i.$$

Para cada entero i con $2 \leq i \leq n$. Además, la igualdad en esta desigualdad se da si y sólo si $a_i = \frac{1}{i-1}$. Es claro que estas igualdades no se pueden dar simultáneamente pues, si fuera así, tendríamos que

$$1 = a_2 a_3 \cdots a_n = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} < \frac{1}{1} = 1,$$

pues $n \geq 3$ y $(n-1)! \geq 2$. Entonces, como no se pueden dar todas las igualdades, se tiene que

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdots(1+a_n)^n > \frac{2^2}{1^1}\cdot\frac{3^3}{2^2}\cdots\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\cdot(a_2a_3\cdots a_n) = n^n,$$

como queríamos.

Problema 3. El *juego de la adivinanza del mentiroso* es un juego para dos jugadores A y B. Las reglas del juego dependen de dos enteros positivos k y n conocidos por ambos jugadores.
Al principio del juego, el jugador A elige enteros x y N con $1 \leq x \leq N$. El jugador A mantiene x en secreto, y le dice a B el verdadero valor de N. A continuación, el jugador B intenta obtener información acerca de x formulando preguntas a A de la siguiente manera: en cada pregunta, B especifica un conjunto arbitrario S de enteros positivos (que puede ser uno de los especificados en alguna pregunta anterior), y pregunta a A si x pertenece a S. El jugador B puede hacer tantas preguntas de ese tipo como desee. Después de cada pregunta, el jugador A debe responderla inmediatamente con *sí* o *no*, pero puede mentir tantas veces como quiera. La única restricción es que entre cualesquiera $k+1$ respuestas consecutivas, al menos una debe ser verdadera.
Cuando B haya formulado tantas preguntas como haya deseado, debe especificar un conjunto X de a lo más n enteros positivos. Si x pertenece a X entonces gana B; en caso contrario, pierde.
Demostrar que:

1. Si $n \geq 2^k$, entonces B puede asegurarse la victoria.

2. Para todo k suficientemente grande, existe un entero $n \geq 1.99^k$ tal que B no puede asegurarse la victoria.

(Problema sugerido por Canadá)

Solución oficial. Consideremos una respuesta $R \in \{\text{sí}, \text{no}\}$ a una pregunta del estilo "¿Está x en el conjunto S?". Diremos que R es inconsistente con un número i si $R = \text{sí}$ y $i \notin S$ o bien si $R = \text{no}$ y $i \in S$. Notemos que una respuesta inconsistente con el número elegido x es una mentira.

a) Supongamos que B ha determinado un conjunto T de tamaño m que contiene a x. Esto es cierto al inicio con $m = N$ y $T = \{1, 2, \ldots, N\}$. Para $m > 2^k$ mostraremos cómo B puede encontrar un número $y \in T$ que no sea x. Tras realizar este proceso repetidamente, B puede reducir T a ser de tamaño $2^k \leq n$ y entonces ganar.

   Como sólo el tamaño $m > 2^k$ de T es relevante, supondremos por comodidad que $T = \{0, 1, \ldots, 2^k, \ldots, m-1\}$. El jugador B comienza preguntando repetidamente si x es 2^k. Si A responde no $k+1$ veces consecutivas, entonces en efecto $x \neq 2^k$. De otra forma, B deja de preguntar por 2^k al primer sí. Entonces, luego pregunta para cada $i = 1, 2, \ldots, k$ si la representación binaria de x tiene un 0 en el i-ésimo dígito. Sin importar qué k respuestas se den, todas son inconsistentes con algún número $y \in \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$. La respuesta de sí con 2^k también es inconsistente con y y como A no puede mentir $k+1$ veces consecutivas, entonces $y \neq x$.

De cualquier forma, B puede encontrar un número en T que no sea x, como queríamos mostrar.

b) Probaremos que si $1 < \lambda < 2$ y $n = \lfloor (2-\lambda)\lambda^{k+1} \rfloor - 1$ entonces B no puede ganar. Para completar la demostración, bastaría tomar λ tal que $1.99 < \lambda < 2$ y k suficientemente grande de modo que,

$$n = \lfloor (2-\lambda)\lambda^{k+1} \rfloor - 1 \geq 1.99^k.$$

Consideremos la siguiente estrategia para A. Primero, escoge $N = n+1$ y $x \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ de manera arbitraria. Después de cada respuesta, A determina, para cada $i = 1, 2, \dots, n+1$, el número m_i de preguntas consecutivas que ha dado hasta ahora que sean inconsistentes con i. Para decidir su siguiente respuesta, A considerará la cantidad,

$$\phi = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^{m_i}.$$

Sin importar qué pregunte B, A eligirá la respuesta que minimize ϕ.

Afirmamos que con esta estrategia ϕ siempre va a ser menor que λ^{k+1}. De esta manera, ningún exponente m_i en ϕ podrá exceder k. En particular, siempre se tendrá que $m_x < k+1$ y A nunca mentirá más de k veces consecutivas. En particular, esto aplica para $i = x$ y por tanto nunca mentirá más de k veces. Esto verificaría que la estrategia de A es legal y como no depende de x, entonces B no puede hacer deducciones acerca de x.

Así, basta probar que $\phi < \lambda^{k+1}$ en cada momento. Al principio cada m_i es 0 y por tanto se cumple al inicio pues $1 < \lambda < 2$ y $n = \lfloor (2-\lambda)\lambda^{k+1} \rfloor - 1$. Supongamos que $\phi < \lambda^{k+1}$ en un momento dado y que B acaba de preguntar si $x \in S$ para un conjunto S. Conforme A conteste sí o no, el nuevo valor de ϕ se volverá,

$$\phi_1 = \sum_{i \in S} 1 + \sum_{i \notin S} \lambda^{m_i+1} \quad \text{o} \quad \phi_2 = \sum_{i \in S} \lambda^{m_i+1} + \sum_{i \notin S} 1.$$

Como A minimiza ϕ, entonces la nueva ϕ será $\text{mín}(\phi_1, \phi_2)$ y tenemos,

$$\begin{aligned} \text{mín}(\phi_1, \phi_2) &\leq \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i \in S}(1 + \lambda^{m_i+1}) + \sum_{i \notin S}(\lambda^{m_i+1} + 1)\right) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda\phi + n + 1). \end{aligned}$$

Ya que $\phi < \lambda^{k+1}$, las suposiciones $\lambda < 2$ y $n = \lfloor (2-\lambda)\lambda^{k+1} \rfloor - 1$ llevan a,

$$\min(\phi_1, \phi_2) < \frac{1}{2}(\lambda^{k+2} + (2-\lambda)\lambda^{k+1}) = \lambda^{k+1}.$$

De modo que con esto se completa la solución.

Problema 4. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que cumplen la siguiente igualdad:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a),$$

para todos los enteros a, b, c que satisfacen $a + b + c = 0$.
($\mathbb{Z}$ denota el conjunto de los números enteros.)

(Problema sugerido por Sudáfrica)

Solución de Jorge Garza Vargas. Denotaremos por (x, y, z) la sustitución de $a = x$, $b = y, c = z$ en $f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2 = 2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a)$ (haremos sustituciones para valores que cumplan $x + y + z = 0$).
$(0, 0, 0)$ implica que $3f(0)^2 = 6f(0)^2$. Si $f(0) \neq 0$, llegamos a que $3 = 6$, lo cual es falso. Luego, $f(0) = 0$.
Para cualquier entero a, $(a, -a, 0)$ implica que $f(-a)^2 + f(a)^2 = 2f(a)f(-a)$ o $(f(a) - f(-a))^2 = 0$ y $f(a) = f(-a)$.
$(a, a, -2a)$ implica que $2f(a)^2 + f(-2a)^2 = 4f(a)f(-2a) + 2f(a)^2$ o $f(2a)^2 = 4f(a)f(2a)$. Luego, si $f(2a) \neq 0$ tenemos que $f(2a) = 4f(a)$.
Sea $d = f(1)$. Si $d = 0$, con $(n + 1, -n, -1)$ y una sencilla inducción, es fácil ver que se obtiene la función constante 0. Supongamos para el resto de la prueba que $d \neq 0$. Si $f(2) = 0$, si n es entero, $(2, n-2, -n)$ implica que $f(n)^2+f(n-2)^2 = 2f(n)f(n-2)$ o $(f(n) - f(n-2))^2 = 0$ de donde $f(n) = f(n-2)$ para todo entero n. Con una sencilla inducción se ve que $f(2k) = f(0) = 0$ y $f(2k-1) = f(1) = d$ para todo entero k. Veamos que esta función es solución para todo valor de d. Si $a + b + c = 0$ pueden ser 1 o 3 pares entre a, b y c. Si los tres son pares, tenemos que,

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 0 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a),$$

y si sólo uno es par, tenemos que,

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2d^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

Falta ver el caso cuando $f(2) \neq 0$. Como $f(2)^2 = 4f(2)f(1)$ tenemos que $f(2) = 4d$. $(1, 2, -3)$ da $d^2 + 16d^2 + f(3)^2 = 10df(3) + 8d^2$. Resolviendo la cuadrática para $f(3)$ obtenemos que $f(3) = d$ o $f(3) = 9d$. Veamos estos dos casos.

- $f(3) = d$. De $(4, -3, -1)$ obtenemos que $f(4) = 0$. Ahora, con $(4, n-4, -n)$ obtenemos que $(f(n) - f(n-4))^2 = 0$ de donde $f(n) = f(n-4)$ para todo entero n, luego, la función resulta ser

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0 \text{ (mod 4)}, \\ d & \text{si } n \equiv 1 \text{ (mod 4)}, \\ 4d & \text{si } n \equiv 2 \text{ (mod 4)}, \\ d & \text{si } n \equiv 3 \text{ (mod 4)}. \end{cases}$$

Para ver que esta función cumple, hay que ver que funciona para cada opción módulo 4 de a, b, c tales que $a+b+c=0$.

- $f(3)=9d$. Demostraremos, con inducción fuerte, que $f(n)=n^2d$ para todo entero n. Ya sabemos que esto es cierto para $n=0$, 1, 2 y 3. Eso es nuestra base de inducción. Supongamos que $f(n)=n^2d$ es cierto para todo entero n tal que $0\leq n<k$. $(k,-(k-1),-1)$ da,

  $$f(k)^2+f(k-1)^2+f(1)^2=2f(k)f(k-1)+2f(k-1)f(1)+2f(1)f(k).$$

  Sustituyendo los valores dados por la hipótesis de inducción y usando la fórmula general en $f(k)$ obtenemos que $f(k)=(k-1\pm 1)^2d$.
  Si $f(k)=(k-2)^2d$, con $(k,-(k-2),-2)$ obtenemos que,

  $$(2(k-2)^4+16)d^2=2d^2((k-2)^4+8(k-2)^2),$$

  de donde $1=(k-2)^2$ y $k=3$, lo que es una contradicción. Luego, $f(k)=k^2d$ y la inducción está completa. Finalmente, es fácil verificar que esta función también cumple la condición del problema.

Por lo tanto, las funciones que cumplen el problema son la función constante 0 y las tres familias de funciones que hemos obtenido.

Problema 5. Sea ABC un triángulo tal que $\angle BCA=90^\circ$, y sea D el pie de la altura desde C. Sea X un punto interior del segmento CD. Sea K el punto en el segmento AX tal que $BK=BC$. Análogamente, sea L el punto en el segmento BX tal que $AL=AC$. Sea M el punto de intersección de AL y BK. Demostrar que $MK=ML$.

(Problema sugerido por la República Checa)

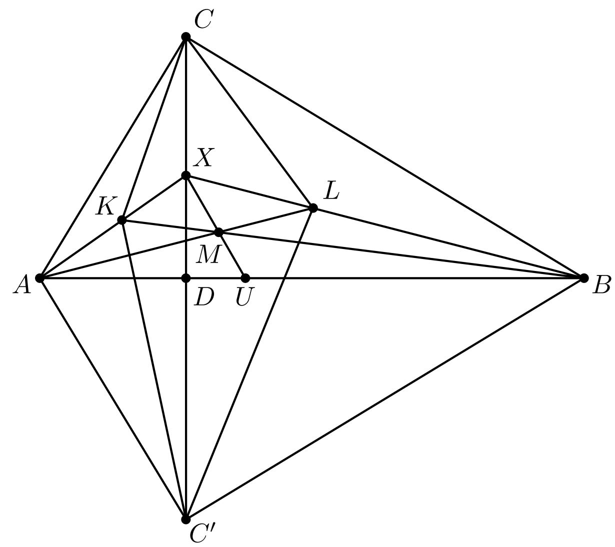
Solución de Diego Alonso Roque Montoya. Sean C' la reflexión de C sobre AB, U la intersección de XM con BA, $\alpha=\angle BAC$, $\beta=ABC$, $2\varepsilon=\angle CBK$, $2\theta=\angle CAL$, Γ_A la circunferencia con centro en A de radio AC y Γ_B la circunferencia con centro en B de radio BC.
Como CA es perpendicular a CB y $C'A$ es perpendicular a $C'B$, tenemos que Γ_A es tangente a CB y a $C'B$, y Γ_B es tangente a CA y a $C'A$. Por ángulos inscritos, tenemos que,

$$\angle ACK=\frac{\angle CBK}{2}=\varepsilon \quad \text{y} \quad \angle LCB=\frac{\angle LAC}{2}=\theta.$$

Además, $\angle ACD=90^\circ-\angle CAD=90^\circ-\alpha=\beta$, análogamente, $\angle DCB=\alpha$. Luego, $\angle KCX=\beta-\varepsilon$ y $\angle XCL=\alpha-\theta$. Por otro lado,

$$\angle BC'L=\frac{\angle C'AL}{2}=\frac{\angle C'AC-\angle CAL}{2}=\frac{2\alpha-2\theta}{2}=\alpha-\theta$$

y $\angle LC'C=\angle BC'C-\angle BC'L=\alpha-(\alpha-\theta)=\theta$. Análogamente, $\angle CC'K=\varepsilon$ y $\angle KC'A=\beta-\varepsilon$.



Por el teorema de Ceva en el triángulo BXA con el punto M y en el triángulo BMA y el punto X, tenemos que

$$\frac{BU}{UA}\cdot\frac{AK}{KX}\cdot\frac{XL}{LB}=-1 \text{ y } \frac{BU}{UA}\cdot\frac{AL}{LM}\cdot\frac{MK}{KB}=-1.$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda,

$$\frac{AK}{KX}\cdot\frac{XL}{LB}\cdot\frac{LM}{AL}\cdot\frac{KB}{MK}=1$$

y al despejar $\frac{LM}{MK}$ tenemos que,

$$\frac{LM}{MK}=\frac{KX}{AK}\cdot\frac{LB}{XL}\cdot\frac{AL}{KB}. \tag{2}$$

Demostraremos que esta última expresión es igual a 1. Por el teorema generalizado de la bisectriz en el triángulo AXC con la ceviana CK y en el triángulo BXC con la ceviana CL, tenemos que,

$$\frac{KX}{AK}=\frac{CX}{CA}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\beta-\varepsilon)}{\operatorname{sen}(\varepsilon)} \quad \text{y} \quad \frac{LB}{XL}=\frac{CB}{CX}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(\alpha-\theta)}.$$

Sustituyendo estas dos expresiones en (2) y usando que $AL=AC$ y $BK=BC$, tenemos que,

$$\frac{LM}{MK}=\frac{\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\beta-\varepsilon)}{\operatorname{sen}(\varepsilon)\operatorname{sen}(\alpha-\theta)}. \tag{3}$$

De la misma manera, por el teorema generalizado de la bisectriz en el triángulo $C'XA$ con la ceviana $C'K$ y en el triángulo $XC'B$ con la ceviana $C'L$ tenemos que

$$\frac{KX}{AK} = \frac{C'X}{C'A} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\varepsilon)}{\operatorname{sen}(\beta - \varepsilon)} \quad \text{y} \quad \frac{LB}{XL} = \frac{C'B}{C'X} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}.$$

Sustituyendo estos valores en (2) obtenemos que,

$$\frac{LM}{MK} = \frac{\operatorname{sen}(\varepsilon)\operatorname{sen}(\alpha - \theta)}{\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\beta - \varepsilon)}. \tag{4}$$

Finalmente, por (3) y por (4) tenemos que $\frac{LM}{MK} = \frac{MK}{LM}$ de donde $LM = MK$.

Problema 6. Hallar todos los enteros positivos n para los cuales existen enteros no negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que,

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

(Problema sugerido por Serbia)

Solución oficial. Supongamos que cierto entero positivo n cumple y sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros no negativos tales que,

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Sea $m = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Multipliquemos el segundo y el tercer miembro de la igualdad por 3^m para obtener puros números enteros. Tenemos que,

$$3^{m-a_1} + 2 \cdot 3^{m-a_2} + \cdots + n \cdot 3^{m-a_n} = 3^m.$$

Considerando esta igualdad módulo 2 llegamos a que $1 + 2 + \cdots + n \equiv 1 \pmod 2$ o $\frac{n(n+1)}{2} \equiv 1 \pmod 2$. Ahora, para que $\frac{n(n+1)}{2}$ sea par, necesitamos que el par entre n y $n+1$ no sea múltiplo de 4. Esto se da exactamente cuando $n \equiv 1, 2 \pmod 4$, por lo que n tiene que cumplir esto. Ahora, demostraremos que toda $n \equiv 1, 2 \pmod 4$ cumple el problema.

La clave en este problema es observar que,

$$\frac{a}{3^r} = \frac{3a - x}{3^{r+1}} + \frac{x}{3^{r+1}}$$

para cualquier x con $0 < x < 3a$. Si tenemos una igualdad del estilo $\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1$, podemos cambiar uno de los sumandos $\frac{a}{3^r}$ de la segunda parte de la igualdad por los dos sumandos $\frac{3a-x}{3^{r+1}}$, $\frac{x}{3^{r+1}}$ (la triple igualdad se conserva, pues $\frac{1}{2^r} = \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{2^{r+1}}$). Denotaremos este cambio como $a \to \{x, 3a - x\}$. Por ejemplo, si tenemos que (este es el caso $n = 5$),

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^3} = 1,$$

como $\frac{3}{3^2} = \frac{3}{3^3} + \frac{6}{3^3}$, tenemos que

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^3} + \frac{6}{3^3} = 1,$$

(en este usamos el cambio $3 \to \{3, 6\}$) lo cual demuestra que $n = 6$ cumple el problema. Veamos los primeros ejemplos.

Primero veamos que, siempre que tengamos un ejemplo para $n = 4m + 1$, haciendo el cambio $2m + 1 \to \{2m + 1, 4m + 2\}$ llegamos a un ejemplo para $4m + 2$. Luego, sólo tenemos que encontrar los ejemplos para $n = 4m + 1$.

Para $n = 1$ simplemente hay que tomar $a_1 = 0$. Para $n = 5$ una opción es $a_1 = a_2 = a_3 = 2$, $a_4 = a_5 = 3$. Para $n = 9$ una opción es $a_1 = 2$, $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 3$, $a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 4$. No es difícil encontrar construcciones similares para $n = 13$, 17 y 21.

Ahora, demostraremos tres cosas:

1. Si $n = 12m + 1$ cumple (con $m \geq 1$), también cumple $n = 12m + 13$.
2. Si $n = 12m + 5$ cumple (con $m \geq 1$), también cumple $n = 12m + 17$.
3. Si $n = 12m + 9$ cumple (con $m \geq 1$), también cumple $n = 12m + 21$.

Al demostrar que estas tres proposiciones son ciertas, como $n = 13$, 17 y 21 cumplen, también cumplen $n = 25$, 29 y 33. Y con estos tres, demostramos que $n = 37$, 41 y 45 cumplen. Siguiendo este proceso, vemos que cumplen todos los enteros $n = 4m + 1$, como queremos. Resta demostrar estas tres proposiciones.

1. Sea $n = 12m + 1$ (con $m \geq 1$) un número que cumple. Para los pares $2k$ desde el $12m + 2$ al $12m + 12$ usamos el cambio $k \to \{k, 2k\}$ (aquí usamos que $m \geq 1$). Con esto, en la segunda parte de la igualdad ya sólo faltan los impares desde el $12m + 3$ al $12m + 13$. Como podemos hacer las operaciones $4m + 2 \to \{4m + 2, 8m + 4\}$ y $8m + 4 \to \{12m + 3, 12m + 9\}$ o $\{12m + 5, 12m + 7\}$, podemos hacer la siguiente serie de cambios,

$$\begin{aligned} 4m + 2 &\to \{4m + 2, 8m + 4\} \to \{4m + 2, 8m + 4, 8m + 4\} \\ &\to \{4m + 2, 12m + 3, 12m + 9, 12m + 5, 12m + 7\}, \end{aligned}$$

   y de una manera similar, podemos hacer

$$4m + 4 \to \{4m + 4, 8m + 8\} \to \{4m + 4, 12m + 11, 12m + 13\},$$

   y ya con estas dos operaciones obtenemos todos los denominadores (sin repetirse) hasta el $12m + 13$ en el segundo miembro de la igualdad. Luego $n = 12m + 13$ cumple.

2. Sea $n = 12m+5$ (con $m \geq 1$) un número que cumple. Para los pares $2k$ desde el $12m+6$ al $12m+16$ usamos el cambio $k \to \{k, 2k\}$ (aquí usamos que $m \geq 1$). Con esto, en la segunda parte de la igualdad ya nomás faltan los impares desde el $12m + 7$ al $12m + 17$. Como podemos hacer las operaciones $4m + 4 \to$

$\{4m+4, 8m+8\}$ y $8m+8 \to \{12m+7, 12m+17\}$, $\{12m+9, 12m+15\}$ o $\{12m+11, 12m+13\}$, podemos hacer la siguiente serie de operaciones,

$$\begin{aligned}
& 4m+4 \\
\to\quad & \{4m+4, 8m+8\} \to \{4m+4, 8m+8, 8m+8\} \\
\to\quad & \{4m+4, 8m+8, 8m+8, 8m+8\} \\
\to\quad & \{4m+4, 12m+7, 12m+17, 12m+9, 12m+15, 12m+11, 12m+13\},
\end{aligned}$$

y con esto obtener el ejemplo para $n = 12m+17$, como queríamos.

3. Sea $n = 12m+9$ (con $m \geq 1$) un número que cumple. Para los pares $2k$ desde el $12m+10$ al $12m+20$ usamos el cambio $k \to \{k, 2k\}$ (aquí usamos que $m \geq 1$). Con esto, en la segunda parte de la igualdad ya nomás faltan los impares desde el $12m+11$ al $12m+21$. Como podemos hacer las operaciones $4m+6 \to \{4m+6, 8m+12\}$ y $8m+12 \to \{12m+15, 12m+21\}$ o $\{12m+17, 12m+19\}$, podemos hacer la siguiente serie de operaciones,

$$\begin{aligned}
4m+6 \quad & \to \quad \{4m+6, 8m+12\} \to \{4m+6, 8m+12, 8m+12\} \\
& \to \quad \{4m+6, 12m+15, 12m+21, 12m+17, 12m+19\},
\end{aligned}$$

y de una manera similar,

$$4m+4 \to \{4m+4, 8m+8\} \to \{4m+4, 12m+11, 12m+13\},$$

y con eso concluir el ejemplo para $n = 12m+21$.

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas de enero a abril de 2013.

Enero

Publicación del 17° número de la revista "Tzaloa".

Enero, 10 al 20, Cuernavaca, Morelos

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes de entrenamiento y de los exámenes AMC.

Febrero, primera quincena

Envío de material a los estados (convocatoria, tríptico, nombramiento de delegado).

Marzo, 7 al 17, Ciudad de México

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de dos exámenes de entrenamiento, del examen AIME y del examen de la XXV Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Marzo, 21 al 24, CIMAT, Guanajuato

Curso de Entrenadores.

Abril

Publicación del 18° número de la revista "Tzaloa".

Abril 9

Envío a los estados, el primer examen de práctica propuesto por el Comité Organizador de la OMM.

Abril 13

Aplicación en los estados registrados con este propósito, del primer examen de práctica propuesto por el Comité Organizador de la OMM (puede aplicarse después).

Apéndice

Criterios 1 (Criterios de divisibilidad) *Un número entero es divisible,*

- *entre* 2*, si el dígito de las unidades es un número par.*
- *entre* 3*, si la suma de sus dígitos es divisible entre* 3*.*
- *entre* 4*, si el número formado por los dos últimos dígitos (el de las unidades y el de las decenas) es divisible entre* 4*.*
- *entre* 5*, si el dígito de las unidades es* 5 *o* 0*.*
- *entre* 6*, si es divisible entre* 2 *y* 3*.*
- *entre* 8*, si el número formado por sus últimos tres dígitos es divisible entre* 8*.*
- *entre* 9*, si la suma de sus dígitos es divisible entre* 9*.*

Definición 2 (Divisibilidad) *Si* a *y* b *son enteros, se dice que* b *divide* a *si* $a = bq$ *para algún entero* q*, y se denota por* $b \mid a$*.*

Teorema 3 (Propiedades de la divisibilidad) *Sean* a, b*,* c *y* d *números enteros.*

1. *Si* $a \mid b$ *y* $b \mid c$*, entonces* $a \mid c$*.*
2. *Si* $a \mid b$ *y* $a \mid c$*, entonces* $a \mid b + c$*.*
3. *Si* $a \mid b$ *y* $a \mid b + c$*, entonces* $a \mid c$*.*
4. *Si* $a \mid b$ *y* $c \mid d$*, entonces* $ac \mid bd$*.*
5. *Si* $a \mid b$*, entonces* $a^n \mid b^n$ *para todo entero positivo* n*.*
6. *Si* $a \mid b$*, entonces* $|a| \leq |b|$*.*

Teorema 4 (Inducción) *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición* $P(n)$ *es verdadera para todo entero* $n \geq k_0$*, donde* k_0 *es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que* $P(k_0)$ *es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición* $P(k)$ *para algún entero* $k \geq k_0$.
3. *Se demuestra que* $P(k+1)$ *es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ *es verdadera para todo entero* $n \geq k_0$.

Teorema 5 (Principio de las casillas) *Si* $kn+1$ *objetos son colocados en* n *casillas, entonces al menos una casilla contiene* $k+1$ *objetos. En particular, si* $n+1$ *objetos son colocados en* n *casillas, entonces al menos una casilla contiene dos o más objetos.*

Teorema 6 (Suma de los ángulos internos de un triángulo) *La suma de los ángulos internos de un triángulo es* $180°$.

Teorema 7 (Teorema de Pitágoras) *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 8 (Congruencia de triángulos) *Los triángulos* ABC *y* $A'B'C'$ *son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo* ABC *son iguales a los ángulos y los lados del triángulo* $A'B'C'$.

Criterio 9 (Criterio de congruencia LLL) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 10 (Criterio de congruencia ALA) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 11 (Semejanza de triángulos) *Los triángulos* ABC *y* $A'B'C'$ *son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir,*

$$\begin{aligned}
\angle ABC &= \angle A'B'C' \\
\angle ACB &= \angle A'C'B' \\
\angle BAC &= \angle B'A'C'
\end{aligned}$$

y sus lados homólogos son proporcionales, esto es

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Criterio 12 (Criterio de semejanza AA) *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos* ABC *y* $A'B'C'$ *son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 13 (Teorema de Thales) *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y sólo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 14 (Desigualdad del triángulo) *Los números positivos a, b y c son las medidas de los lados de un triángulo si y sólo si se cumplen las siguientes relaciones,*

$$\begin{aligned} a+b &> c, \\ a+c &> b, \\ b+c &> a. \end{aligned}$$

Definición 15 (Bisectriz) *Dado un ángulo $\angle ABC$ su bisectriz es la recta que lo divide en dos ángulos iguales.*

Teorema 16 (Bisectrices) *Las bisectrices internas de un triángulo concurren en un punto que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo. El punto de concurrencia se llama incentro.*

Teorema 17 (Medida del ángulo inscrito) *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco.*

Definición 18 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 19 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, es decir,*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Bibliografía

[1] T. Andreescu, D. Andrica. *Number Theory. Structures, Examples and Problems.* Birkhäuser, 2009.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[4] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2012.

[5] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[6] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[7] I. Niven, H. Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[8] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[9] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

[10] N. Vilenkin. *¿De cuántas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Directorio

Directorio de los delegados estatales

Aguascalientes–*Efraín Casillas Carrillo*

CONALEP Prof. J. Refugio Esparza Reyes
pay3@hotmail.com

Baja California–*Carlos Yee Romero*

Universidad Autónoma de Baja California, Facultad de Ciencias
carlos.yee@uabc.edu.mx, www.ommbc.org

Baja California Sur–*Jesús Eduardo Ríos Torres*

CBTIS #62,
eduardo.rios.73@gmail.com
www.institutomardecortes.edu.mx

Campeche–*Hernán Rafael Díaz Martín*

Coordinación de Intervención Académica, Dirección General CONALEP
herrdiaz@me.com

Chiapas–*María del Rosario Soler Zapata*

Centro de Estudios en Física y Matemáticas Básicas y Aplicadas, UNACH
msolerza@unach.mx

Chihuahua–*Ernesto Salgado Armendáriz*

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
esalgado@ommch.org, esalgado@uacj.mx

Coahuila–*Silvia Carmen Morelos Escobar*

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila
silvia.morelos@gmail.com

Colima–*Eréndira Jiménez Zamora*

Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Colima
ommcolima.ucol.mx

Distrito Federal–*Alejandro Bravo Mojica*

Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, UNAM
abm@ciencias.unam.mx

Durango–*Armando Mata Romero*

Universidad Juárez del Estado de Durango, Escuela de Matemáticas
angelhiram@hotmail.com

Estado de México–*Benito Fernando Martínez Salgado*

Facultad de Ciencias, UAEMex
masabemx@yahoo.com.mx

Guanajuato–*Manuel Cruz López*

Departamento de Matemáticas, Universidad de Guanajuato
manuel.cruzlopez@gmail.com

Guerrero–*Gonzalo Delgado Espinoza*

Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas
deggonzalo@yahoo.com.mx

Hidalgo–*Itzá Ortiz Benjamín Alfonso*

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, CIMA
itza@uaeh.edu.mx

Jalisco–*Julio Rodríguez Hernández*

Universidad de Guadalajara CUCEI, Departamento de Matemáticas
juliorod@sems.udg.mx

Michoacán–*Armando Sepúlveda López*

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Michoacana
asepulve@umich.mx

Morelos–*Larissa Sbitneva Tavdishvili*

Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Facultad de Ciencias
larissa@uaem.mx

Nayarit–*Francisco Javier Jara Ulloa*

Universidad Autónoma de Nayarit
jaraulloa@gmail.com

Nuevo León–*Alfredo Alanís Durán*

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UANL
aalanis56@hotmail.com, sites.google.com/site/eommnl

Oaxaca–*Sara Carrillo Uribe*

Escuela de Ciencias, Universidad Autónoma "Benito Juárez" de Oaxaca
sara.carrillo.u@gmail.com

Puebla–*María Araceli Juárez Ramírez*

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
arjuarez@fcfm.buap.mx,

Querétaro–*Iván González García*

Universidad Autónoma de Querétaro, Facultad de Ingeniería
zelaznog_navi@hotmail.com, ommqro@gmail.com

Quintana Roo–*Alicia Ramón Barrios*

Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo Plantel Cancún 2
olimpiadasquintanaroo@hotmail.com

San Luis Potosí–*Eugenio Daniel Flores Alatorre*

Casa Olímpica, San Luis Potosí, San Luis Potosí
floreseugenio@hotmail.com, ommslp.blogspot.com

Sinaloa–*Maria Guadalupe Russell Noriega*

Universidad Autónoma de Sinaloa
mgrussell@uas.uasnet.mx

Sonora–*Misael Avendaño Camacho*

Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas
misaelave@mat.uson.mx

Tabasco–*Jaír Remigio Juárez*

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Div. Académica de Ciencias Básicas
jair.remigio@ujat.mx

Tamaulipas–*Ramón Jardiel Llanos Portales*

Universidad Autónoma de Tamaulipas
Unidad Académica Multidisciplinaria de Ciencias, Educación y Humanidades
rllanos@uat.edu.mx, www.matetam.com

Tlaxcala–*Mauro Cote Moreno*

Secretaría de Educación Pública de Tlaxcala
anpmlogimat@hotmail.com

Veracruz–*Porfirio Toledo Hernández*

Universidad Veracruzana, Facultad de Matemáticas
ptoledo@uv.mx

Yucatán–*Didier Adán Solís Gamboa*

Universidad Autónoma de Yucatán, Facultad de Matemáticas
didier.solis@uady.mx

Zacatecas–*Nancy Janeth Calvillo Guevara*

Universidad Autónoma de Zacatecas, Unidad Académica de Matemáticas
ncalvill@mate.reduaz.mx

Directorio del Comité Organizador de la OMM

José Antonio Gómez Ortega (presidente)
Facultad de Ciencias, UNAM
jago@ciencias.unam.mx

Ignacio Barradas Bibriesca
Universidad de Guanajuato
barradas@quijote.ugto.mx

Irving Daniel Calderón Camacho
Facultad de Ciencias, UNAM
irvingdanelc@ciencias.unam.mx

Fernando Campos García
Facultad de Ciencias, UNAM
fermexico89@hotmail.com

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
cobian@ciencias.unam.mx

David Cossío Ruiz
Depto. de Física y Matemáticas
Universidad Autónoma de Cd. Juárez
sirio11@gmail.com

Luis Cruz Romo
Sistemas de Inteligencia Territorial
Estrátegica
lcruzromo@gmail.com

José Antonio Climent Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
antonioclimen t@ciencias.unam.mx

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Departamento de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
fuerunt@gmail.com

Samantha Lizette Flores López
Instituto Tecnológico de Colima
samflo_12@hotmail.com

Luis Eduardo García Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
microtarxcaty@ciencias.unam.mx

Luis Miguel García Velázquez
Instituto de Matemáticas, UNAM
garcia.lm@gmail.com

María Eugenia Guzmán Flores
CUCEI, Universidad de Guadalajara
marugeniag@gmail.com

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Facultad de Ciencias, UNAM
ssbmplayer@gmail.com

Daniel Perales Anaya
Facultad de Ciencias, UNAM
dperanaya@hotmail.com

María Luisa Pérez Seguí
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo
psegui19@gmail.com

Miguel Raggi Pérez
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás
de Hidalgo
mraggi@gmail.com

Olga Rivera Bobadilla
Facultad de Ciencias,
Universidad Autónoma del
Estado de México
olgarb@yahoo.com

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
carlos.rubio@uady.mx

David Guadalupe Torres Flores
Departamento de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
ddtorresf@gmail.com

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
valdez@uaem.mx

Rita Vázquez Padilla
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
ritavz14@gmail.com

Eduardo Velasco Barreras
Universidad de Sonora
hamsteritokeweb@hotmail.com

Hugo Villanueva Méndez
Instituto de Matemáticas, UNAM
hvillan@matem.unam.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@ciencias.unam.mx`

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

`http://www.ommenlinea.org`

¡Síguenos en facebook!