# TZALOA

# Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

## Año 2012, No. 2

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.omm.unam.mx

Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53


Impreso y hecho en México.
Abril de 2012.

# Contenido

# Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Tzaloa es una publicación de interés para un público amplio. Está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, pero debido a que su columna vertebral es la resolución de problemas, también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

## Tzaloa, Año 2012, Número 2

Pensando en los estudiantes y profesores que se están preparando para participar en las diferentes etapas de los concursos estatales, fue que hicimos la selección del material que presentamos en este segundo número del año 2012. Es así, que las secciones *Problemas de Práctica* y *Problemas de Entrenamiento* (antes Problemas Propuestos), están integradas en su mayoría con material clasificado con niveles introductorio e intermedio. Se buscó que la variedad de temas y niveles de estos problemas fuera equilibrada, por lo que esperamos haber superado el reto de lograr un conjunto útil para la preparación de todos (novatos y expertos).

El artículo de matemáticas de esta ocasión es una sorpresa muy agradable que amplía y enriquece nuestra tradicional línea editorial. *El señor Burns y los infinitos monos*, no

[1] Palabra náhuatl cuyo significado es *aprender*.

es sólo un artículo de matemáticas, desde el primer párrafo el estilo de Eugenio Flores pone en evidencia su clara vocación literaria. Su trabajo deja el confort de los textos técnicos y explora, con notable éxito, el difícil terreno de la literatura de divulgación matemática de calidad para públicos no especialistas. Tiene la virtud de mantener la matemática a niveles accesibles para el principiante, al mismo tiempo que va tirando carnada para captar y capturar el interés del matemático profesional. Desde nuestra opinión este texto marcará punto y aparte para la revista. Eugenio, MUCHAS GRACIAS.

Además, también hemos incluido los problemas y soluciones del Concurso Nacional de 2011. En la sección correspondiente, se mencionan los nombres de los ganadores y se presentan algunas de las soluciones dadas por ellos. Por último, en el ámbito internacional presentamos los exámenes de la AMC 10 y de la Olimpiada de la Cuenca del Pacífico de este año.

## México y las Olimpiadas de Matemáticas

Hace más de 25 años que la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Desde sus inicios, este programa se ha visto fortalecido gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

## $26^{\text{a}}$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en $3$ etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delegaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la $26^a$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del $1^\circ$ de agosto de $1993$. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2012-2013 y, para el $1^\circ$ de julio de $2013$, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.omm.unam.mx`

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la $26^a$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 11 al 17 de noviembre de 2012 en Guanajuato, Guanajuato. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2013: la XXV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, que se llevará a cabo en el mes de marzo; la XV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, que se celebrará en el mes de junio; la $54^{\text{a}}$ Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se llevará a cabo en Colombia en el mes de julio, y la XXVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en el mes de septiembre.

# El Señor Burns y los Infinitos Monos

**Por Eugenio Daniel Flores Alatorre**

**Nivel Básico**

Cuando era niño, mi padre no me dejaba ver *Los Simpsons*. Por eso, todos los días poco antes de las siete, algo surgía para que yo estuviera en casa de mis vecinos, donde sí podían verlos. A veces ni siquiera tenía que entrar a su casa, pues su tele daba directo a la ventana de la sala y yo podía verlos desde la calle, imaginándome unos diálogos. Poco a poco se fue levantando la prohibición y hoy podemos disfrutarlos en familia; si uno ve los capítulos de las primeras temporadas con atención, puede darse cuenta que están llenos de buenos mensajes, incluso si están empapados en humor negro. Además, hay muchísimas referencias no sólo a la cultura popular sino a la literatura —Edgar Allan Poe, Lewis Carol, Walt Whitman, por ejemplo— y también a las matemáticas. Un poco más: con ya $500$ episodios, es común la idea de que la vida imita a los Simpsons (en el capítulo *Tomy y Daly y Marge*, Marge le prohíbe a sus hijos ver ese programa así que ellos se van a verlo a casa de sus amigos).

En el capítulo *La última salida a Springfield*, en el que Homero se hace líder sindical, el señor Burns lo lleva a conocer su mansión y en una habitación tiene mil monos con mil máquinas de escribir, pronto habrán terminado la novela más grande de la historia.

Después le da un zape por haber escrito “estávamos”. Quizás no se te hubiera ocurrido pensar que en esta pequeña escena, Los Simpsons hicieran referencia a un teorema matemático cuya idea original se le atribuye a Émile Borel, aunque ha sufrido muchas modificaciones a lo largo del tiempo y que podemos resumir en: Un mono tecleando por tiempo infinito en una máquina de escribir, produciría las obras enteras de Shakespeare una tras otra. Cuando menos, esa es la versión que me gusta. Es más, después de tiempo infinito, habría escrito también las obras enteras de Shakespeare una tras otra, en orden inverso; habría escrito Romeo y Julieta entero, en idioma F (Rofomefeofo,

Rofomefeofo, ¿poforquéfe eferefes túfu Rofomefeofo?); habría escrito todos los episodios de Los Simpsons; y, si le buscamos con cuidado, podríamos encontrar que también habría escrito este mismo articulito[2].

No vamos a demostrar este teorema límite de probabilidad, en cambio, vamos a centrarnos en ver qué tan complicado es esto en el mundo real, trabajando con la regla del producto, aproximaciones y números grandes.

No vamos a pensar en las obras completas de William Shakespeare, tan solo en una de sus frases más populares: "To be or not to be, that is the question.", es decir, "Ser o no ser, ésa es la cuestión". Mantenemos el inglés porque es más sencillo hacer las cuentas con un idioma cuya máquina de escribir no tiene acentos. Entonces, vamos a convenir que nuestra máquina de escribir tiene sólo $40$ teclas: $26$ letras, todas mayúsculas, los $10$ dígitos, el punto, la coma, signo de interrogación y el espacio; y además, que es igual de probable que nuestro amigo mono presione cualquiera de ellas.

Esto es muchísima ayuda para el mono: estamos reduciendo un teclado que incluye mayúsculas y minúsculas a uno con solo mayúsculas; nos estamos olvidando de muchísimos símbolos y estamos bajando de $128$ posibilidades en el teclado $\mathrm{ASCII}$ básico a tan solo $40$: menos de la tercera parte[3]. Además, estamos pidiendo que todos los símbolos tengan la misma probabilidad: en tu teclado, cuando quieres guardar un archivo con un nombre al azar, casi siempre termina llamándose adsasd o aslkdj.

Nuestra frase tiene $41$ caracteres contando las letras, los espacios, la coma y el punto final. Vamos a suponer que nuestro mono escribe frases de exactamente $41$ símbolos y que la máquina automáticamente hace el salto de línea. ¿Cuántas frases de $41$ símbolos podemos hacer usando $40$ símbolos? Como la frase que buscamos es una en particular, la probabilidad de que nuestro mono la escriba al azar será igual a $1$ dividido entre el número que encontremos.

Rápidamente recordemos los problemas de guardarropa: si Carmen tiene $5$ blusas y $3$ pantalones ¿de cuántas maneras se puede vestir? Una manera sencilla de resolver el problema cuando los números son chicos, es con un diagrama de árbol:

[2]Este es un tema también muy recurrido en la imaginación de Jorge Luis Borges, especialmente en dos hermosos cuentos suyos: *La Biblioteca de Babel* y *El libro de arena*. También hay algo de ello en *El Aleph* y seguramente en algunos más.

[3]Martin Gardner, en *One, Two, Three... Infinity* no es tan generoso y lo calcula para una frase todavía mayor, con un teclado bastante más completo.

$$\begin{cases} B_1 \begin{cases} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{cases} \\ \\ B_2 \begin{cases} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{cases} \\ \\ B_3 \begin{cases} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{cases} \\ \\ B_4 \begin{cases} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{cases} \\ \\ B_5 \begin{cases} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{cases} \end{cases}$$

Sólo necesitamos contar las ramas finales, que son $15$. Si ahora consideramos los $21$ pares de zapatos que tiene Carmen, puede volverse tardado hacer un diagrama de árbol. En lugar, vemos que cada una de las combinaciones que ya tenemos, puede combinarse con cada uno de los $21$ pares de zapatos. Si por una combinación tenemos $21$ combinaciones nuevas, por $15$ vamos a tener quince veces $21$; es decir, $21 \times 15 = 315$.

Nuestro problema se parece a este, pero no tanto. Vamos a pensar en otro problema distinto: Si el examen de la primera etapa de la Olimpiada tiene $15$ preguntas y cada una de ellas tiene $4$ opciones distintas, ¿de cuántas maneras distintas se puede llenar una hoja de respuestas? Por ejemplo:

AABCDBABCDCABCD.

Si en la primera contestamos $A$, tenemos $16$ maneras de contestar las $3$ primeras, porque en cada pregunta hay $4$ opciones. Si contestamos $B$, también hay $16$ maneras distintas, igual para $C$ y para $D$. Entonces, en total hay $16+16+16+16 = 64 = 4\times4\times4$ maneras distintas de contestar las primeras $3$ preguntas. Si agregamos una pregunta más, vamos a tener $4^4$; con cinco preguntas vamos a tener $4^5$ hasta que lleguemos a $15$ preguntas y en total hay $4^{15}$ maneras distintas de contestar el examen.

Volviendo a nuestro problema, en lugar de $5$ blusas tenemos $40$ letras, en lugar de $3$ pantalones tenemos $40$ letras y en lugar de Carmen tenemos un mono. Pero como podemos repetir letras, se parece más al segundo problema: si la primera letra puede ser cualquiera de las $40$ y la segunda letra puede ser cualquiera de las $40$ entonces para las primeras dos letras hay un total de $40 \times 40 = 1600$ combinaciones posibles. Como en total queremos $41$, vamos a tener $40^{41}$, que podemos encontrar, igual que el examen de opción múltiple.

¿Qué tan grande es este número? Probablemente tu calculadora no puede hacerlo. Estoy casi seguro que tu calculadora no puede hacerlo. Vamos a hacer un estimado:
$40 = 4 \times 10$, ¿verdad? Entonces $40^{41} = (4 \times 10)^{41} = 4^{41} \times 10^{41}$. Las potencias de $10$ son fáciles de calcular: nuestro número es $4^{41}$ seguido de $41$ ceros:

$$4^{41} \times 100,000'000,000'000,000'000,000'000,000'000,000'000,000.$$

Ahora, $4 = 2^2$, ¿verdad? Entonces $4^{41} = (2^2)^{41} = 2^{82}$. Si pensamos que $2^{10} = 1024 \approx 1000$, entonces

$$2^{82} = (2^{10})^8 \times 4 \approx 1000^8 \times 4 = 4'000,000'000,000'000,000'000,000.$$

Es decir, un $4$ seguido de $24$ ceros. Entonces, nuestro número es más o menos un $4$ seguido de $24 + 41 = 65$ ceros. O bien:

$$\begin{gathered}400,000'000,000'000,000'000,000'000,000'\ldots\\000,000'000,000'000,000'000,000'000,000'000,000.\end{gathered}$$

¿Tienes alguna idea de cómo se llama ese número? Yo no. Debe andar por el orden de decillones que ni siquiera estoy seguro que esa palabra exista. Preguntándole a calculadoras más poderosas como *Wolfram Alfa*, podemos ver que el número exacto es:

$$\begin{gathered}483,570'327,845'851,669'882,470'400,000'\ldots\\000,000'000,000'000,000'000,000'000,000'000,000.\end{gathered}$$

No estábamos tan lejos. Sólo nos equivocamos por varios miles de decillones. Cuando menos los números tienen el mismo tamaño que, con números muy grandes, es un muy buen avance.
Ahora, vamos a suponer que nuestro mono tiene la peor de las suertes y escribe la frase que quiere hasta el mero final. También, vamos a suponer que escribe una frase por segundo. Para ayudarle –y facilitar nuestras cuentas— vamos a mudarnos a un universo donde los minutos tienen $100$ segundos, las horas tienen $100$ minutos, los días tienen $100$ horas y los años tienen $1,000$ días. No querrías ir a la escuela en un universo así.
Haciendo unas cuentas sencillas, nuestro mono haría $1,000'000,000$ frases en cada año. Este número tiene sólo $9$ ceros y nuestra aproximación tiene $65$. Está increíblemente lejos. Si fuera un súper mono e hiciera $1,000$ frases por segundo, sólo le estamos agregando $3$ ceros al número, todavía nos faltan $65 - 9 - 3 = 53$ ceros.
Vamos a dejar que nuestro mono invite a todos sus amigos monos, que son igual de capaces que él. Según Wikipedia, no hay más de $1'000,000$ de monos, gorilas y chimpancés en el mundo —tristemente, la cifra es mucho menos. Nos siguen faltando $47$ ceros. Mejor que invite a todos los animales que pueda: según cifras de Wikipedia ligeramente alteradas por mí, por cada mono hay mil vacas, mil borregos, cuatro mil ratas, cuatro mil ratones y seis mil humanos. Si le sumamos perros, gatos, cabras, búfalos, caballos y elefantes, osos y mosquitos, vamos a decir que cada mono puede invitar

$100,000$ amigos —porque mosquitos hay muchos en las noches. Nos siguen faltando $42$ ceros. ¡Tenemos más de cien mil millones de animales tecleando mil frases por segundo y un año de mil días, con días de cien horas, con horas de cien minutos y minutos de cien segundos! ¡Y todavía nos faltan $42$ ceros!
Si los dejáramos teclear por mil años, nos faltarían $39$ ceros. Cien mil años, nos faltan $37$ ceros. La edad de la Tierra es de unos $5$ mil millones de años y la edad del Universo –el tiempo transcurrido desde el Big Bang— se cree que son unos $13,700$ millones de años; si fueran $100$ mil millones de años nos seguirían faltando $31$ ceros. ¡Todos los animales de la Tierra escribiendo desde el inicio del Universo no se acercan a la quintillonésima parte de frases posibles!
A estas alturas, estoy seguro, puedes estar de acuerdo conmigo en que escribir esa frase al azar es un evento extremadamente poco probable. Y sin embargo, sin lugar a dudas, un solo mono en tiempo infinito la escribe. Es más, la escribe una infinidad de veces.
¿Te gustaría probar tu suerte? Visita

http://escribesaurio.blogspot.com/p/editorial-dinosaurio.html

donde puedes encontrar un pequeño programa para simular un mono y puedas ver lo difícil que es que una frase tenga sentido.

**Ejercicios.**

1. En realidad, Carmen tiene $22$ blusas, $6$ pantalones, $4$ vestidos y $20$ pares de zapatos.

    *a*) ¿De cuántas maneras distintas puede vestirse si nunca usa un pantalón y un vestido al mismo tiempo?

    *b*) ¿De cuántas maneras distintas puede vestirse si sí puede usar pantalón y vestido al mismo tiempo?

2. Una boleta de *Progol* tiene $14$ partidos y en cada uno debes escoger Local, Empate o Visitante. ¿Cuántas boletas distintas hay?

3. Se tienen $15$ tiras de colores distintos. ¿De cuántas maneras se puede hacer una bandera tricolor con estas tiras?

4. Cinco personas de la planilla azul, ocho personas de la planilla roja y siete personas de la planilla verde quieren ser presidentes del Mundo. Si sólo uno de cada planilla puede ser candidato, ¿de cuántas maneras puede quedar la boleta electoral? ¿Cuántos posibles presidentes hay?

5. Las placas de automóvil en México tienen $3$ letras y $4$ dígitos (aunque las del Distrito Federal tienen $3$ dígitos y luego $3$ letras).

    *a*) Si todas las placas de Guanajuato empiezan con la letra G, ¿cuántas placas se pueden hacer?

    *b*) ¿Cuántas placas distintas se pueden hacer en el país, incluyendo al DF?

6. *a*) Once personas están formadas en la cola de las tortillas. Una señora es supersticiosa y no le gusta la forma en que están formadas y les dice que se reacomoden. ¿De cuántas maneras se pueden reacomodar?

   *b*) Llegan dos personas nuevas a la fila y en total son $13$. La señora supersticiosa les dice que sólo pueden hacer fila de $7$. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

7. Ocho personas están sentadas en una mesa redonda. ¿De cuántas maneras se pueden sentar? Consideramos que dos maneras son idénticas si una se puede obtener de la otra rotando la mesa.

8. Cinco amigos juegan carreras y nunca hay empates. ¿En cuántos resultados Luis le gana a Josué?

9. Un examen de Olimpiada tiene $30$ preguntas de opción múltiple. En cada pregunta hay cuatro opciones distintas. Supón que no sabes nada y contestas completamente al azar.

   *a*) ¿Cuál es la probabilidad de sacar todo mal?

   *b*) ¿Cuál es la probabilidad de sacar todo bien?

10. Una boleta del Melate tiene $56$ números distintos, de los cuales debes escoger $6$. ¿Cuál es la probabilidad de atinarle a los $6$ números con una única boleta? ¡OJO! Los números no se pueden repetir.

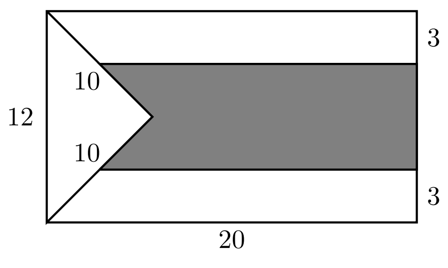
# Problemas de Práctica

Para el segundo número del año hemos incrementado un poco la dificultad de los problemas, de manera que en esta sección encontrarás material clasificado en los niveles introductorio e intermedio. Otra diferencia con respecto al número anterior, es que ahora abandonamos el formato de *opción múltiple*, mismo que se acostumbra usar en la primera eliminatoria de los concursos estatales, para adoptar el formato de *pregunta abierta* que caracteriza a las etapas más avanzadas de los concursos olímpicos.

Ahora, te invitamos a poner en práctica todas tus habilidades y usar todos tus conocimientos para encontrar la solución de los $20$ problemas de práctica de este número. Aunque en la siguiente sección podrás encontrar las respuestas de todos ellos, te recomendamos que no la consultes sino hasta después que hayas llegado por ti mismo a tu propia solución.

Por último, te invitamos a contribuir para que esta sección de la revista se siga enriqueciendo con la participación de todos. Estamos seguros que conoces y tienes problemas interesantes que proponer, por eso ponemos a tu disposición el correo electrónico `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus sugerencias.

**Problema 1.** Esta es la bandera de cierto país. Si las longitudes marcadas están dadas en centímetros, ¿Cuánto vale el área sombreada?

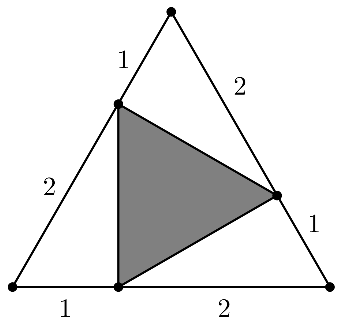


**Problema 2.** ¿Cuántos triángulos hay tales que sus lados tienen longitudes enteras y su perímetro es $30$? Dos triángulos congruentes se cuentan sólo una vez.

**Problema 3.** La familia de Yaneli está integrada por $4$ personas: el abuelo, mamá, papá y Yaneli. Si se duplica el monto de la beca mensual que recibe Yaneli, los ingresos de toda la familia aumentarán en $5\,\%$. Si en lugar de duplicar la beca de Yaneli, se duplicara el sueldo de su mamá, los ingresos familiares crecerán en $15\,\%$. El mismo procedimiento da $25\,\%$ en el caso de su papá. Ahora, ¿en qué porcentaje crecerían los ingresos familiares, si en vez de ello se duplica la pensión del abuelo?

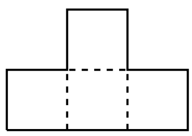
**Problema 4.** Definimos un triángulo *cuasi rectángulo*, como aquel que tiene un ángulo que no difiere de uno recto, en más de $15°$. Similarmente definimos un triángulo *cuasi isósceles*, como aquel que tiene dos ángulos que no difieren entre sí, en más de $15°$. Determina si es cierto o no que todo triángulo acutángulo es cuasi rectángulo o cuasi isósceles.

**Problema 5.** Encuentra el área sombreada.




**Problema 6.** Halla todos los números naturales de $4$ dígitos que son iguales al cubo de la suma de sus dígitos.

**Problema 7.** Determina los valores de $n$ para los que es posible construir un cuadrado de $n \times n$ ensamblando piezas del tipo:



**Problema 8.** Una expedición desea cruzar el desierto en jeep. En un tramo del camino existe una distancia de $800\ km$ entre dos estaciones de servicio. En el jeep sólo se puede almacenar un máximo de $50$ litros de combustible y su rendimiento es de $10$ kilómetros

por litro. La expedición puede preparar la ruta e ir dejando combustible almacenado en tanques en puntos elegidos a lo largo del camino. Por ejemplo, partiendo de una estación y con el jeep cargado al máximo ($50$ litros), se podrían recorrer $100\,km$, dejar alamacenados $30$ litros y regresar a la estación de origen, llegando a ella con carga cero de combustible. Ahora, suponga que al llegar a la estación que está al inicio del tramo de $800\,km$, el jeep llega con carga cero y que la oferta total de combustible en dicha estación es de tan solo $180$ litros. ¿Podrá atravesar el desierto? ¿se podrá lograr con $140$ litros?

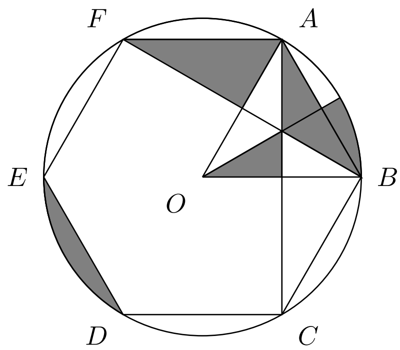
**Problema 9.** Un condenado queda en libertad cuando alcance el final de una escalera de $100$ escalones. Pero no puede avanzar a su antojo, puesto que está obligado a subir un solo escalón cada día de los meses impares y a bajar un escalón cada día de los meses pares. Si comienza el $1$ de enero de $2001$, ¿qué día quedará en libertad?

**Problema 10.** Se define una sucesión $(a_n)$ de la siguiente manera: $a_1 = 8$, $a_2 = 18$, y $a_n = a_{n-2} \cdot a_{n-1}$, para todo $n > 2$, por ejemplo $a_3 = 8(18) = 144$ y $a_4 = 18(144) = 2592$. Determina todos los valores de $n$ para los cuales $a_n$ es un cuadrado perfecto.

**Problema 11.** Todos los teléfonos en cierta ciudad son exactamente los números de $8$ dígitos que no comienzan en $0$ ni en $3$. ¿Qué proporción de estos números comienzan y terminan en $5$?

**Problema 12.** Nueve caballeros están sentados alrededor de una mesa redonda. A cada caballero le toca un número del $1$ al $9$ y todos tienen números diferentes de tal manera que siempre que tomemos tres caballeros que estén sentados en sillas consecutivas, la suma de sus números sea múltiplo de $3$. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

**Problema 13.** Si la circunferencia con centro $O$ tiene radio igual a $1\,cm$, ¿cuál es el área de la región sombreada?




**Problema 14.** En un programa de televisión te dan a elegir una de tres puertas. Atrás de solo una de ellas hay un premio. Eliges una y con la mano en la perilla el conductor del programa te detiene y abre una de las otras dos puertas, que evidentemente no tiene premio. Te pregunta, ¿cambiarías tu elección por la otra puerta cerrada? ¿Qué es lo que te conviene?

**Problema 15.** Tres números positivos $a$, $b$ y $c$ satisfacen la igualdad,

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}=\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}.$$

Demuestra que por lo menos dos de los números (entre $a$, $b$ y $c$), tienen que ser iguales entre sí.

**Problema 16.** En cierta ciudad hay sólo dos clases de habitantes, los honestos, que siempre dicen la verdad y los mentirosos, que siempre mienten. Un viajero llega a esta ciudad y se encuentra con cuatro habitantes, $A$, $B$, $C$, $D$.

- El habitante $A$ le dice: "Exactamente uno de nosotros cuatro es mentiroso".
- El habitante $B$ dice: "Nosotros cuatro somos mentirosos".
- A continuación el viajero le pregunta a $C$: "¿Es $A$ mentiroso?". Recibió una respuesta (sí o no) de la que le resultó imposible saber qué clase de habitante era $A$.

Determina si $D$ es honesto o mentiroso y justifica tu respuesta.

**Problema 17.** Un triángulo isósceles con base $BC$ está inscrito en una circunferencia $\mathcal{C}_1$. Sean $\alpha$ el ángulo $ABC$ y $\mathcal{C}_2$ una circunferencia tangente internamente a $\mathcal{C}_1$ y tangente al lado $BC$ en su punto medio por fuera del triángulo $ABC$. Encuentra el radio de $\mathcal{C}_2$ en términos del ángulo $\alpha$ y del lado $BC$.

**Problema 18.** Determina el mayor entero $n$ para el cual el número de ternas ordenadas que se pueden formar con $2n$ elementos es un múltiplo del número de ternas ordenadas que se pueden formar con $n$ elementos.

**Problema 19.** ¿Cuántos números primos $p$ cumplen que el número $p^2+11$ tiene exactamente seis divisores positivos?

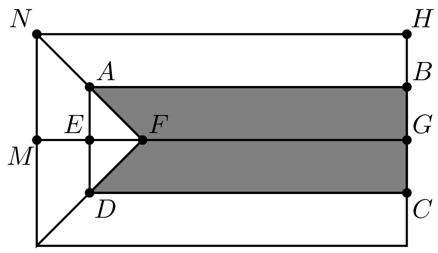
**Problema 20.** Por descuido al tomar sus apuntes, un estudiante omite un signo y registra una operación ($+$, $-$, $\times$, $\div$) entre dos números naturales de tres dígitos cada uno, como si fuera un número de seis dígitos. Curiosamente, el error provocó que la cantidad registrada fuera exactamente siete veces la correcta. Encuentra los números originales.

# Soluciones a los Problemas de Práctica

En esta sección te presentamos las soluciones que hemos preparado para los $20$ problemas de práctica que figuran en este número de tu revista. Date cuenta que para cada problema se incluye la explicación que justifica su validez. Observa que, en todos los casos, la argumentación se basa en resultados conocidos y/o en razonamientos lógicos y que para ningún problema la solución se presenta sin sustento.

Como siempre, las soluciones que presentamos no son únicas y probablemente tampoco son las mejores, por lo que es muy posible que tú hayas encontrado una solución distinta pero igualmente válida. Si este es el caso y no estás muy seguro de su validez o simplemente la quieres compartir con nosotros te invitamos para que nos escribas a `revistaomm@gmail.com`.

**Solución del problema 1.** Nombremos algunos de los puntos como lo muestra la siguiente figura.




Para obtener el área buscada simplemente hay que restar las áreas del rectángulo $ABCE$ y del triángulo $AFD$. Dado que $M$ es la mitad del lado que mide $12\,cm$, tenemos que $MN = 6\,cm$ y por el Teorema de Pitágoras $MF = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\,cm$. Como $BG = BH = 3\,cm$, por el teorema de Thales $A$ es el punto medio de $NF$. Luego, los

triángulos $FAE$ y $FNM$ son semejantes con razón $1:2$ y obtenemos que $EF = 4\,cm$ y $AE = 3\,cm$. Luego, el área del triángulo $FAD$ es $\frac{6\cdot 4}{2} = 12\,cm^2$.
Para calcular el área del rectángulo $ABCD$ notemos que $AB = NH - ME = 20 - 4 = 16\,cm$. Como $BC = 6\,cm$ el área es $16 \cdot 6 = 96\,cm^2$. Finalmente, podemos concluir que el área sombreada es $96 - 12 = 84\,cm^2$.

**Solución del problema 2.** Fijémonos en el lado más grande (podría haber dos o los tres que sean los más grandes, si hay empates). Como el promedio de los lados es $10$, el lado mayor mide al menos $10$. Y es menor que $15$, pues si fuera $15$ o más, la suma de los otros dos lados sería menor o igual a $15$ y no se cumpliría la desigualdad del triángulo. Dividamos en casos. Notemos que sólo tenemos que decidir la longitud del segundo lado más grande.

1. El lado mayor mide $10$. En este caso los tres lados miden $10$.
2. El lado mayor mide $11$. Tenemos que la suma de los otros dos lados es $19$ y como no pueden medir más de $11$, el segundo lado más grande puede medir $11$ o $10$. En total, hay 2 triángulos.
3. El lado mayor mide $12$. La suma de los otros dos es $18$, luego, el segundo puede medir $12$, $11$, $10$ o $9$. En total, hay $4$ triángulos.
4. El lado mayor mide $13$. La suma de los otros dos es $17$, luego, el segundo puede medir desde el $9$ hasta el $13$. En total, hay $5$ triángulos.
5. El lado mayor mide $14$. La suma de los otros es $16$, luego, el segundo puede medir desde el $8$ hasta el $14$. En total, hay $7$ triángulos.

Por lo tanto hay $1 + 2 + 4 + 5 + 7 = 19$ triángulos de los buscados.

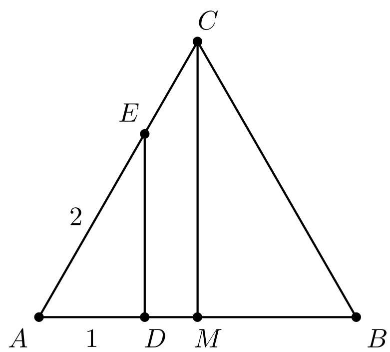
**Solución del problema 3.** En primer lugar, si se duplica la beca de Yaneli, el ingreso total de la familia crecería precisamente en el porcentaje que representa la beca de Yaneli para el ingreso familiar. Lo mismo sucede en el caso de la mamá y el papá. Entonces, sabemos que Yaneli, su mamá y su papá aportan $5\,\% + 15\,\% + 25\,\% = 45\,\%$, de donde se sigue que el abuelo aporta $55\,\%$. Por lo tanto, si se duplica su pensión, el ingreso familiar se incrementará en $55\,\%$.

**Solución del problema 4.** La afirmación es cierta. Sean $a \geq b \geq c$ las medidas de los ángulos de un triángulo cualquiera. Supongamos que el triángulo no es cuasi isósceles. Entonces $a - b > 15^\circ$ y $b - c > 15^\circ$, de donde se sigue que $a - c > 30^\circ$. Entonces,

$$180^\circ = a + b + c < a + a - 15^\circ + a - 30^\circ,$$

es decir $3a > 225^\circ$ y $a > 75^\circ$. Como el triángulo es acutángulo, $a < 90^\circ$, esto significa que el triángulo es cuasi rectángulo. En conclusión, tenemos que si el triángulo es acutángulo, entonces es cuasi rectángulo o cuasi isósceles.

**Solución del problema 5.** Sean $ABC$ el triángulo equilátero grande, $M$ el punto medio del lado $AB$, y $ED$ uno de los lados del triángulo interior como se muestra.




Como $M$ es el punto medio del lado $AB$, tenemos que $\frac{AC}{AM} = 2 = \frac{AE}{AD}$, luego, los triángulos $AMC$ y $ADE$ son semejantes y $DE$ es perpendicular a $AD$. Ahora, por el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo $ADE$, $ED = \sqrt{3}$. Por lo tanto cada lado del triángulo equilátero interior mide $\sqrt{3}$. Es un ejercicio sencillo ver que si un lado de un triángulo equilátero mide $a$, su área es $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$, por lo que el área buscada es $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

**Solución del problema 6.** Sea $n$ un número que cumpla las condiciones del problema, y sea $s$ la suma de sus dígitos.

Como $1000 \leq n \leq 9999$ y $n = s^3$, entonces $11 \leq s \leq 21$ ($s$ no puede ser $10$ pues $1000$ no cumple).

Si $n = xyzt$, tenemos que, $1000x + 100y + 10z + t = s^3$ y $x + y + z + t = s$, luego restando obtenemos, $999x + 99y + 9z = s^3 - s$. Luego, $s^3 - s = (s-1)s(s+1)$ es múltiplo de $9$. Como $11 \leq s \leq 21$, sólo hay tres posibilidades, $s = 17, 18$ o $19$.

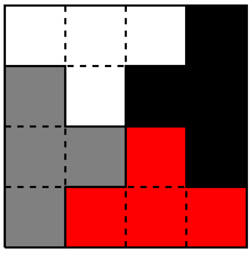
1. Si $s = 17$, entonces, $999x + 99y + 9z = 16 \cdot 17 \cdot 18$, de donde $111x + 11y + z = 544$. Luego, $x = 4$, $y = 9$ y $z = 1$, de donde, $t = 3$ y finalmente $n = 4913$.

2. Si $s = 18$, entonces, $999x + 99y + 9z = 17 \cdot 18 \cdot 19$, de donde, $111x + 11y + z = 646$. Luego, $x = 5$, $y = 8$ y $z = 3$, de donde $t = 2$ y finalmente $n = 5832$.

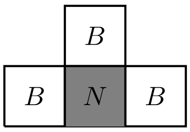
3. Si $s = 19$, entonces $999x + 99y + 9z = 18 \cdot 19 \cdot 20$, de donde, $111x + 11y + z = 760$. Luego, $x = 6$, $y = 8$ y $z = 6$, que no es posible, pues $6 + 8 + 6 > 19$.

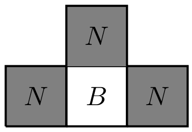
Por lo tanto, las únicas soluciones son: $4913$ y $5832$.

**Solución del problema 7.** Observemos que $n^2$ debe ser múltiplo de $4$ y por lo tanto $n$ necesariamente es par. Si $n = 4k$ podemos dividir cualquier cuadrado $n \times n$ en $k^2$ subcuadrados de $4 \times 4$, cada uno de los cuales lo podemos rellenar como se muestra:



Queda sólo considerar el caso $n = 4k + 2$. Veamos que en ese caso no es posible. Supongamos que sí lo es. Si pintamos cada cuadradito alternadamente de blanco y negro como en un tablero de ajedrez, hay dos posibilidades para cada pieza:




las cuales pueden estar giradas.
Sean $a$ el número de piezas del tipo de las de la izquierda y $b$ el número de piezas del tipo de las de la derecha. Tenemos que,

$$a + b = \frac{(4k+2)^2}{4} = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1,$$

luego $a + b$ es impar. Por otra parte, como hay tantas casillas blancas como negras, tenemos que, $3a + b = 3b + a$ si y sólo si $a = b$, luego $a + b$ es par, en contradicción con lo anterior.
Por lo tanto, la respuesta es todos los enteros positivos $n$ múltiplos de $4$.

**Solución del problema 8.** En primer lugar, veamos que contando con solo $140$ litros no es posible atravesar el desierto. Para lograr atravesar el desierto se requiere almacenar combustible en el kilómetro $300$ o más adelante (de no ser así, se tendrían que recorrer más de $500$ $km$ sin recargar combustible, lo cual no es posible). Llamemos $P$ a este punto de almacenamiento. Nótese que para ir a dejar el combustible al punto $P$ y regresar, se deberán recorrer al menos $600$ $km$, si a eso le sumamos los $800$ $km$ que hay entre las estaciones, es claro que no se puede atravesar el desierto con menos de $140$ litros. Para ver que tampoco se puede con exactamente $140$ litros basta observar que no se pude ir a dejar combustible al punto $P$ en un solo viaje.
Ahora, veamos que con $180$ litros sí es posible:

1. Primero se hacen $3$ viajes a un depósito ubicado a $50$ $km$ de la estación de origen. En cada viaje se consumen $10$ litros y se almacenan $40$ litros.

2. Después de estos $3$ viajes, se carga el jeep con los $30$ litros restantes y se avanza hacia el depósito, llegando con $25$ litros.

3. Partiendo de este primer depósito se hacen 2 viajes a un segundo depósito ubicado a $100\,km$, dejando almacenados en él 30 litros por cada viaje.

4. De vuelta en el primer depósito, se carga el jeep con los $45$ litros que aún quedan, para avanzar al segundo depósito al que se llega con $35$ litros.

5. Poner un tercer depósito a $150\,km$ del segundo y realizar un viaje dejando almacenados en él 20 litros.

6. Finalmente, de regreso en el segundo depósito se cargan los $45$ litros que todavía quedan y se avanza al tercer depósito donde se toman los 20 litros, con los que se puede completar el cruce de los $800\,km$.

**Solución del problema 9.** Observemos que el primer año va a moverse entre los escalones $1$ y $36$. Este, el $36$, lo alcanza el día $31$ de julio. El $31$ de diciembre de ese año, llegará al escalón 3. En general, si un 31 de diciembre está en el escalón $n$, el año siguiente se mueve entre los escalones $n+1$ y $n+36$ y termina en el $n+3$, si ese año siguiente no es bisiesto, o bien: se mueve entre los escalones $n+1$ y $n+35$, y termina en el $n+2$ si ese año siguiente es bisiesto. Así vemos que el $31$ de diciembre de $2024$ llegará al escalón 66, tras haber pasado el 31 de julio de ese mismo año por el escalón $99$ como punto más elevado. A partir de ahí, se observa lo siguiente respecto al año $2025$: el $31$ de enero termina en el escalón $97$, el $28$ de febrero en el $69$, y el $31$ de marzo, por fin en el $100$.

**Solución del problema 10.** Notemos que cada $a_n$ es de la forma $2^{\alpha_n} \cdot 3^{\beta_n}$. Entonces $a_n$ es un cuadrado perfecto si y sólo si $\alpha_n$ y $\beta_n$ son ambos pares. Ahora, como $a_n = a_{n-2} \cdot a_{n-1}$, tenemos que $\alpha_n = \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}$ y $\beta_n = \beta_{n-2} + \beta_{n-1}$. Como $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 = 2$, es fácil ver que $\beta_n$ es par para toda $n$. Además, también es fácil probar[4] que $\alpha_n$ es par si y sólo si $n$ es múltiplo de 3. En conclusión, $a_n$ es un cuadrado perfecto si y sólo si $n$ es múltiplo de 3.

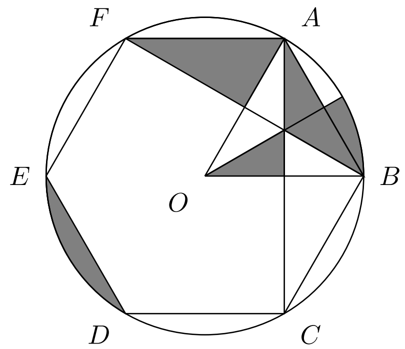
**Solución del problema 11.** Sea $A$ el número de números telefónicos de la ciudad y sea $B$ el número de los que cumplen que comienzan y terminan en 5. Para calcular $A$, notamos que cada dígito en el número, a excepción del primero tiene 10 opciones (cada uno de los diez dígitos) y para el primer dígito tenemos 8 opciones. Luego, $A = 8 \cdot 10^7$. Para calcular $B$, notamos que el primer y el penúltimo dígito ya están elegidos. Cada uno de los otros seis dígitos tiene $10$ posibilidades, por lo que $B = 10^6$. Por lo tanto, $\frac{A}{B} = \frac{8\cdot 10^7}{10^6} = 80$.

**Solución del problema 12.** Digamos que los números son $a_1, a_2, \ldots, a_9$ en el sentido de las manecillas del reloj. Como 3 es factor de $a_1+a_2+a_3$ y de $a_2+a_3+a_4$, también lo es de $a_4 - a_1$, por lo que $a_1$ y $a_4$ dejan el mismo residuo al ser divididos entre 3. De la misma manera obtenemos que $a_7$ deja el mismo residuo que $a_1$ y $a_4$.

[4] Tanto en el caso de esta afirmación como en el de la anterior, los resultados pueden ser demostrados fácil y formalmente por inducción. Se invita al lector, a manera de ejercicio, a escribir dichas demostraciones.

Con un argumento similar llegamos a que también los números $a_2$, $a_5$ y $a_8$ dejan el mismo residuo al ser divididos entre 3, y los números $a_3$, $a_6$ y $a_9$ también. Entre los números del 1 al 9 los que dejan los mismos residuos son: $\{1,4,7\}$, $\{2,5,8\}$ y $\{3,6,9\}$. Ahora sí, contemos. Tenemos $9$ opciones para elegir $a_1$. Para $a_2$ ya sólo nos quedarán $6$, pues tiene que ser de un conjunto diferente y para $a_3$ sólo 3, pues tiene que ser del conjunto restante. Para $a_4$ y $a_7$ tienen que ser los dos números restantes del conjunto en el que se eligió $a_1$ (y esto se puede hacer de dos maneras diferentes) y lo mismo para $a_5$, $a_8$ y $a_6$ y $a_9$. Luego, el número buscado es $9 \times 6 \times 3 \times 2^3 = 1296$.

**Solución del problema 13.** Como el triángulo $OAB$ es equilátero, se puede observar que su área sombreada es la mitad del área del triángulo $AFB$. Luego, el área sombreada es igual al área del triángulo $AFB$ que es igual al área del triángulo $AOB$.




Como $AOB$ es una triángulo equilátero de lado igual a $1\,cm$, su área es $\frac{\sqrt{3}}{4}\,cm^2$. Sólo resta encontrar las áreas entre las secantes $ED$ y $AB$, pero estas son iguales; luego, tenemos que sumar el área de $AOB$ más $\frac{3}{2}$ del área entre el arco y la secante $AB$. Esta última se puede calcular como la diferencia de áreas del sector circular $AB$ y el triángulo equilátero $AOB$, es decir, $\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$.
Por lo tanto, tenemos que el área de la figura sombreada es,

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{(2\pi - \sqrt{3})}{8}\,cm^2.$$

**Solución del problema 14.** Observemos que el hecho de que el conductor del programa siempre podrá abrir una de las dos puertas que inicialmente no elegiste porque él conoce en cuál se encuentra el premio. Cuando el conductor nos informa sobre la puerta que abrió, nos está diciendo mucho acerca de esa puerta: nos está diciendo que no tiene el premio; sin embargo, no nos está dando información adicional en lo absoluto sobre la posibilidad de que el premio esté en la puerta que elegimos inicialmente, porque esa elección la hicimos en ausencia de la información que se nos iba a dar. Por lo anterior, nos informó que la probabilidad de la puerta que abrió ahora es 0 y la probabilidad de la puerta que no abrió es ahora $\frac{2}{3}$, puesto que la probabilidad de nuestra puerta elegida inicialmente sigue siendo $\frac{1}{3}$. Por lo tanto, tenemos que decidir cambiar de puerta.

**Solución del problema 15.** Multiplicando por $abc$, la ecuación $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}=\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}$, se convierte en $a^2(ca)+b^2(ba)+c^2(bc)=a^2(ab)+b^2(cb)+c^2(ca)$, es decir,

$$a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)=0.$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\begin{aligned}
& a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a) \\
= \;& a^3(c-b)+a(b^3-c^3)+bc(c^2-b^2) \\
= \;& a^3(c-b)+a(b-c)(b^2+bc+c^2)+bc(c-b)(c+b) \\
= \;& (c-b)[a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(c+b)]
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(c+b) &= a^3-ab^2-abc-ac^2+bc^2+b^2c \\
&= a(a^2-c^2)-ab(b+c)+bc(b+c) \\
&= a(a-c)(a+c)-(b+c)b(a-c) \\
&= (a-c)[a(a+c)-b(b+c)] \\
&= (a-c)[a^2+ac-b^2-bc] \\
&= (a-c)[(a^2-b^2)+c(a-b)] \\
&= (a-c)(a-b)(a+b+c).
\end{aligned}$$

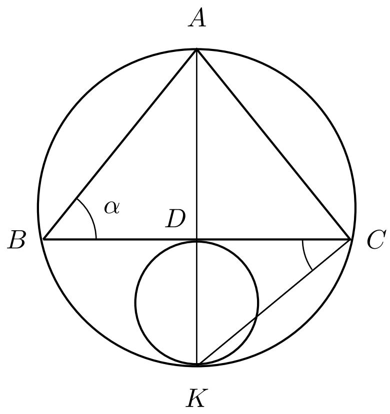
Luego, $0=a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)=(c-b)(a-c)(a-b)(a+b+c)$. Como $a+b+c>0$, tenemos que $(c-b)(a-c)(a-b)=0$, y por lo tanto al menos dos de los números $a$, $b$, $c$ son iguales.

**Solución del problema 16.** Notamos primero que $B$ es mentiroso, pues la frase "Nosotros cuatro somos mentirosos" siempre es falsa.
Ahora veamos que $C$ respondió "no". Si hubiese respondido "sí", podemos considerar dos casos:

- $C$ dice la verdad. En este caso $A$ sería mentiroso.
- $C$ miente. En este caso $A$ diría la verdad. Este caso es imposible, pues tendríamos al menos dos mentirosos y $A$ habría mentido.

Luego, si $C$ hubiese respondido "sí", el visitante hubiera podido deducir que $A$ es mentiroso. Por lo tanto $C$ respondió "no".
Si $C$ dice la verdad, tendríamos que $A$ también dice la verdad, por lo que sólo hay un mentiroso, el cual tiene que ser $B$ y $D$ sería honesto. Si $C$ miente tendríamos que $A$ es mentiroso. Como $A$, $B$ y $C$ son mentirosos, $D$ tiene que ser honesto, pues si fuesen los $4$ mentirosos $B$ diría la verdad, lo cual es imposible.
Por lo tanto, $D$ es honesto.

**Solución del problema 17.** La mediatriz del lado $BC$ es altura del triángulo y bisectriz del ángulo en $A$, luego ésta pasa por el centro de las dos circunferencias y por el punto de tangencia $K$ de las circunferencias. Además, pasa por el punto de tangencia $D$ de $\mathcal{C}_2$ con el triángulo $ABC$. Llamemos $a$ al lado $BC$.




Como $\alpha = \angle ABC$, tenemos que $\angle BCK = \angle BAK = 90^\circ - \alpha$, luego $DK = DC \tan \angle BCK = \frac{a}{2} \tan(90^\circ - \alpha)$. De donde, el radio de $\mathcal{C}_2$ es $\frac{a}{4} \tan(90^\circ - \alpha)$, ya que $DK$ es su diámetro.

**Solución del problema 18.** Sabemos que el número de ternas ordenadas que se pueden formar con $2n$ elementos es $T_{2n} = 2n(2n-1)(2n-2)$; y que el número de ternas ordenadas que se pueden formar con $n$ elementos es $T_n = n(n-1)(n-2)$. Como $T_{2n}$ es múltiplo de $T_n$, tenemos que existe un entero $k$, tal que $T_{2n} = kT_n$. Por lo tanto, $2n(2n-1)(2n-2) = k \cdot n(n-1)(n-2)$. Como $n \neq 0$ y $n \neq 1$, se sigue que $4(2n-1) = k(n-2)$; $8n-4 = k(n-2)$; $8(n-2)+12 = k(n-2)$; $12 = k'(n-2)$. Lo anterior muestra que $n-2$ tiene que ser divisor de 12 y por lo tanto el mayor valor posible para $n$ es 14.

**Solución del problema 19.** Si $p \neq 2$, $p \equiv \pm 1 \pmod 4$ y $p^2 \equiv 1 \pmod 4$. Si $p \neq 3$, entonces $p \equiv \pm 1 \pmod 3$ y $p^2 \equiv 1 \pmod 3$. Por lo tanto, si $p \geq 5$ tenemos que 3 y 4 (y por tanto 12) dividen a $p^2 + 11$. Como 12 tiene seis divisores positivos (1, 2, 3, 4, 6 y 12), $p^2 + 11$ tendrá al menos uno más, pues $p^2 + 11 \geq 5^2 + 11 = 36 > 12$. Finalmente, $2^2 + 11 = 15$ tiene 4 divisores positivos y $3^2 + 11 = 20$ tiene 6 divisores positivos. Por lo tanto, sólo $p = 3$ cumple.

**Solución del problema 20.** En primer lugar notemos que el signo debió ser de multiplicación. Si sumamos, restamos o dividimos 2 números de 3 dígitos el resultado será, a lo más, un número de 4 dígitos; el cual multiplicado por 7, tendrá, a lo más, 5 dígitos. Esto es contradictorio, pues la cantidad registrada es de 6 dígitos.
Ahora, sean $m$ y $n$ los números buscados, entonces el problema se reduce a resolver la ecuación $1000m + n = 7m \times n$. De donde se sigue que $m = \frac{n}{7n-1000}$. Dado que $100 \leq m \leq 999$, tenemos que $100 \leq \frac{n}{7n-1000} \leq 999$. Resolviendo esta última desigualdad se obtiene que $n = 143$ y entonces $m = 143$.

# Problemas de Entrenamiento

## Problemas de Entrenamiento.
## Año 2012 No. 2.

Tzaloa, está al servicio de una gran comunidad participativa, que gusta de compartir y reconocer el talento para hacer matemáticas de todos sus miembros. A partir de este número, la sección cambiará su tradicional nombre (Problemas Propuestos) para redefinirse como la sección de *Problemas de Entrenamiento*. La idea es que, en los próximos números, la sección cobre nuevo impulso y se convierta en un importante punto de encuentro para la comunidad olímpica. Lo mejor de todo es que, con los cambios, ahora tendremos el espacio que se necesitaba para incluir mayor cantidad de participaciones de todos los lectores.

Como siempre, la sección seguirá presentando problemas cuya solución creativa y elegante será dada por alguno de nuestros lectores. Para este número planteamos $5$ problemas, pero paulatinamente se incrementará este número. La idea es incluir mayor cantidad de problemas accesibles (principiantes), pero sin dejar de satisfacer el apetito de los más voraces (intermedios y avanzados).

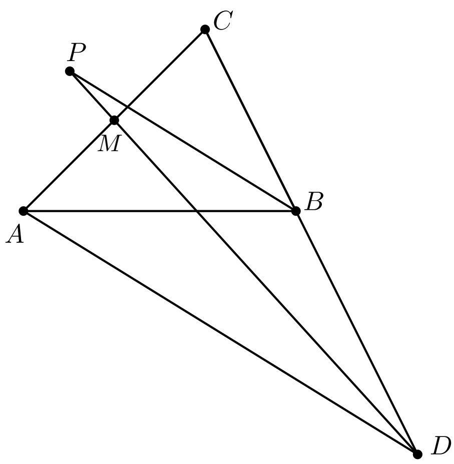
Recuerda que nuestra dirección electrónica es `revistaomm@gmail.com` y que a través de ella estaremos recibiendo todas las contribuciones que nos lleguen desde cualquier rincón del país. ¡Esperamos la tuya!

**Problema 1.** (Principiante) El hexágono $ABCDEF$ tiene sus seis ángulos internos iguales y cumple que $AB = CD = EF$. Demuestra que $BC = DE = FA$.

**Problema 2.** (Principiante) Los números del $1$ al $9$ son colocados sobre cada una de las casillas de un tablero de $3 \times 3$. Para cada fila, marcamos el segundo número más grande de esa fila. ¿Cuántos arreglos hay tales que el segundo número más grande de los tres marcados es el $5$?

**Problema 3.** (Intermedio) Dos números son tales que la suma de sus cubos es $5$ y la suma de sus cuadrados es $3$. Determina la suma de los dos números.

**Problema 4.** (Intermedio) Sea $ABC$ un triángulo. Sea $D$ el punto en el lado $BC$ más allá de $B$ tal que $BD = BA$ y sea $M$ el punto medio de $AC$. La bisectriz del ángulo $ABC$ intersecta a $DM$ en $P$. Prueba que $\angle BAP = \angle ACB$.




**Problema 5.** (Avanzado) Demuestra que hay una infinidad de ternas de enteros positivos $(x, y, z)$ tales que,

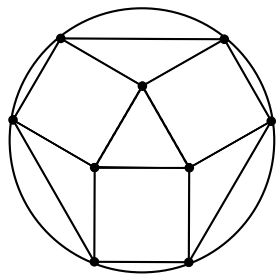
$$x^3 + y^5 = z^7.$$

# Soluciones a los Problemas Propuestos. Año 2011 No. 3.

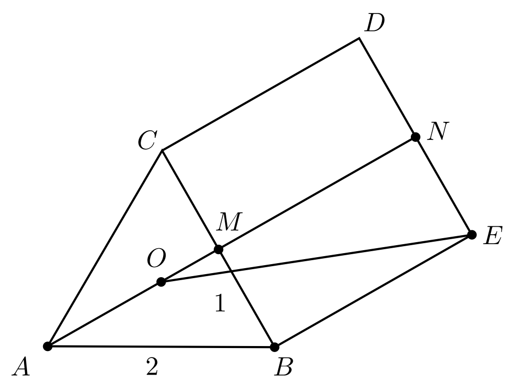
A continuación te presentamos las soluciones de los problemas propuestos en Tzaloa 3, año 2011.

Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas propuestos en Tzaloa 4, año 2011, por lo que todavía estás a tiempo para enviarnos la tuya y así podamos publicarla dándote todo el crédito y reconocimiento público que sólo tú mereces.

**Problema 1.** (Principiante) El siguiente hexágono está formado por un triángulo equilátero de lado $2$, tres cuadrados y tres triángulos isósceles. ¿Cuánto vale el radio de la circunferencia?



**Solución.** Por simetría, el centro del triángulo equilátero es el centro del círculo. Sea $O$ dicho centro y sean $ABC$ el triángulo equilátero, $BCDE$ uno de los cuadrados, $M$ el punto medio del segmento $BC$ y $N$ el punto medio del segmento $ED$, como muestra la figura.




Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo $ABM$, tenemos que $AM = \sqrt{3}$, y como el gravicentro $O$ divide al segmento $AM$ en razón $2:1$, tenemos que $OM = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $ON = \frac{\sqrt{3}}{3} + 2$. Además, $NE = MB = 1$. Finalmente, aplicamos de nuevo el teorema de Pitágoras en el triángulo $ONE$, y obtenemos que el radio buscado mide,

$$OE = \sqrt{NE^2 + ON^2} = 2\sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{3}} = 2\sqrt{\frac{(1+\sqrt{3})^2}{3}} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}(3+\sqrt{3}).$$

**Problema 2.** (Intermedio) Sea $n$ un entero positivo par y sean $a$, $b$ enteros positivos primos relativos. Determina todos los valores de $a$ y $b$ tales que $a + b$ sea divisor de $a^n + b^n$.

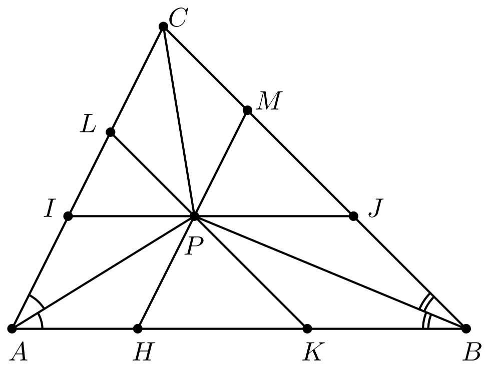
**Solución.** Como $n$ es par, podemos escribir,

$$a^n - b^n = (a^2 - b^2)(a^{n-2} + a^{n-4}b^2 + \cdots + a^2b^{n-4} + b^{n-2}).$$

Como $a+b$ es divisor de $a^2-b^2$, tenemos que $a+b$ también es divisor de $a^n-b^n$. Luego, $a+b$ divide también a los números $2a^n=(a^n+b^n)+(a^n-b^n)$ y $2b^n=(a^n+b^n)-(a^n-b^n)$. Como $a$ y $b$ son primos relativos, se sigue que $\text{mcd}(2a^n,2b^n)=2$. Luego, $a+b$ es divisor de 2, y de aquí la única posibilidad es $a=b=1$, pues $a$ y $b$ son positivos. Por último, es claro que $a=b=1$ satisfacen el problema. Por lo tanto, la única solución es $a=1$ y $b=1$.

**Problema 3.** (Intermedio) Sean $ABC$ un triángulo y $P$ un punto en su interior. Las rectas paralelas a los lados de $ABC$ que pasan por $P$ dividen a este triángulo en tres triángulos más pequeños y tres cuadriláteros con vértice común $P$. Demuestra que si dos de estos cuadriláteros son rombos, entonces el tercero también lo es.

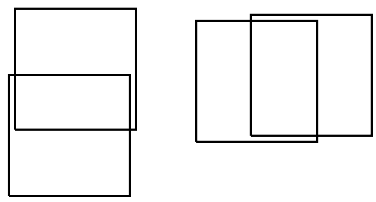
**Solución.** Supongamos que los tres cuadriláteros que se forman son $AHPI$, $BJPK$ y $CLPM$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que los rombos son $AHPI$ y $BJPK$. En un rombo cada diagonal biseca a su ángulo correspondiente, de modo que $AP$ y $BP$ son bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ en el triángulo $ABC$. De este modo, $P$ es el incentro del triángulo $ABC$ y $CP$ es bisectriz del ángulo en $C$. Además, por construcción, $CLPM$ es paralelogramo. Así, usando paralelas tenemos que, $\angle LPC=\angle PCM=\angle PCL=\angle MPC$. De este modo, por el criterio de congruencia ALA los triángulos $PLC$ y $PMC$ son congruentes, y por lo tanto $PM=MC=CL=LP$. Luego, $CLPM$ es un rombo.




**Problema 4.** (Intermedio) ¿De cuántas maneras se pueden colocar dos cuadrados de $2\times 2$ en una cuadrícula de $5\times 5$ sin que se traslapen?

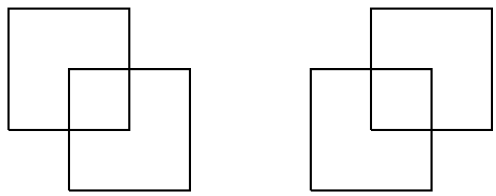
**Solución.** Primero contemos de cuántas maneras podemos poner los dos cuadrados de $2\times 2$ sin importar que se traslapen. Para poner un cuadrado de $2\times 2$ basta elegir cuál será la esquina superior izquierda. Esto lo podemos hacer de $4\cdot 4=16$ maneras diferentes. Así tenemos $\binom{16}{2}=120$ formas de poner los dos cuadrados en la cuadrícula. Ahora contemos cuántas de esas 120 maneras son traslapes. Hay traslapes de dos tipos:

- Los que tienen dos cuadrados en su traslape. Pueden ser de dos maneras:



En cada uno de estos, simplemente tenemos que elegir los rectángulos de $2 \times 3$ o de $3 \times 2$ que los contienen. De nuevo, para contar estos, basta elegir la esquina superior izquierda. Así, tenemos $3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 24$ traslapes contados.

- Los que tienen sólo un cuadrado en su traslape. Pueden ser de dos maneras:



De la misma manera, para contar estos, basta contar el cuadrado de $3 \times 3$ que los contiene. Y obtenemos $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ traslapes contados.

Por lo tanto, tenemos en total $120 - 24 - 18 = 78$ maneras de poner dos cuadrados de $2 \times 2$ sin que se traslapen.

**Problema 5.** (Avanzado) Sean $a$, $b$ y $c$ números reales positivos tales que $abc \leq 1$. Demuestra que,

$$\frac{a}{b^2+b} + \frac{b}{c^2+c} + \frac{c}{a^2+a} \geq \frac{3}{2}.$$

**Solución.** Primero haremos un cambio de variables. Sea $(a, b, c) = (\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$. Entonces, la desigualdad a demostrar es equivalente a la desigualdad,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}} + \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}} + \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}} &\geq \frac{3}{2} \\ \frac{y^2}{x(y+1)} + \frac{z^2}{y(z+1)} + \frac{x^2}{z(x+1)} &\geq \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

donde $x$, $y$ y $z$ son números reales positivos tales que $xyz \geq 1$.
Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz[5], tenemos que,

$$((xy+x)+(yz+y)+(zx+z))\left(\frac{y^2}{x(y+1)} + \frac{z^2}{y(z+1)} + \frac{x^2}{z(x+1)}\right) \geq (x+y+z)^2.$$

[5]Ver en el apéndice el Teorema 4.

Luego, basta demostrar que,

$$\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx+x+y+z} \geq \frac{3}{2},$$

es decir, $2(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)+3(x+y+z)$.
Pero la desigualdad anterior es inmediata dado que,

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$$

y

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= (x+y+z)(x+y+z)\\ &\geq 3\sqrt[3]{xyz}(x+y+z)\\ &\geq 3(x+y+z).\end{aligned}$$

# Problemas y Soluciones del Concurso Nacional 2011

Del 13 al 19 de noviembre de 2011 se llevó a cabo en San Luis Potosí, San Luis Potosí, el Concurso Nacional de la $25^{\text{a}}$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de todos los estados de la República. Los 16 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

José Ángel Sánchez Gómez (Baja California)
Alberto Manuel Astiazarán Tobín (Chihuahua)
Enrique Chiu Han (Distrito Federal)
Jorge Garza Vargas (Distrito Federal)
Ramón Iván García Álvarez (Guanajuato)
Marco Antonio Flores Martínez (Jalisco)
Jorge Ignacio González Cázares (Jalisco)
Adán Medrano Martín del Campo (Jalisco)
Juan Carlos Ortiz Rhoton (Jalisco)
Miguel Ángel Prado Godoy (Jalisco)
Diego Terán Ríos (Morelos)
José Alberto De la Paz Espinosa (Nayarit)
Diego Alonso Roque Montoya (Nuevo León)
Julio César Díaz Calderón (Oaxaca)
José Ramón Guardiola Espinosa (San Luis Potosí)
José Ángel de Jesús Sosa Salinas (San Luis Potosí)

Los 10 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Enrique Chiu Han (Distrito Federal)
Juan Carlos Ortiz Rhoton (Jalisco)

Miguel Ángel Prado Godoy (Jalisco)
Kevin William Beuchot Castellanos (Nuevo León)
Carlos Ignacio Carriera Ramírez (Colima)
Manuel Alejandro Ceballos Pech (Yucatán)
Diego Fajardo Rojas (Puebla)
Luis Xavier Ramos Tormo (Yucatán)
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco)
Siddhartha Emmanuel Morales Guzmán (San Luis Potosí)

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros $10$ lugares en el Concurso Nacional de la $25^a$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

1. Jalisco
2. Nuevo León
3. Yucatán
4. San Luis Potosí
5. Distrito Federal
6. Colima
7. Morelos
8. Guanajuato
9. Baja California
10. Querétaro

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó Copa "**Carlos Jacob Rubio Barrios**" y fue ganado por Nayarit. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, Colima y Durango, respectivamente.

A continuación presentamos los problemas del Concurso Nacional 2011. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

**Problema 1.** Se tienen $25$ focos distribuidos de la siguiente manera: los primeros $24$ se disponen en una circunferencia colocando un foco en cada uno de los vértices de un $24$-ágono regular, y el foco restante se coloca en el centro de dicha circunferencia.
Únicamente se permite aplicar cualquiera de las siguientes dos operaciones:

- Tomar dos vértices sobre la circunferencia tales que hay una cantidad impar de vértices en los arcos que definen, y cambiar el estado de los focos de estos dos vértices y el del foco del centro de la circunferencia.
- Tomar tres vértices sobre la circunferencia que formen un triángulo equilátero, y cambiar el estado de los focos en estos tres vértices y el del foco del centro de la circunferencia.

Muestra que partiendo de cualquier configuración inicial de focos encendidos y apagados, siempre es posible aplicar un número finito de operaciones para llegar a la configuración en la que todos los focos están encendidos.

(Sugerido por Luis Eduardo García Hernández)

**Solución de Olga Medrano Martín del Campo.** Tenemos dicho acomodo y nombramos a los focos alrededor del círculo $1, 2, \ldots, 24$ y $25$ para el del centro.
Para escoger $2$ vértices separados por una cantidad impar de vértices, estos tienen que tener en su posición la misma paridad.
Para escoger $3$ focos que formen un triángulo equilátero, estos deben ser equidistantes. Como son $24$ focos, los $3$ vértices que escojamos tienen que estar separados por $7$ vértices. Por lo tanto, los $3$ vértices tienen que ser congruentes módulo $8$, y consecuentemente tienen la misma paridad.
Podemos notar entonces que en cualquier movimiento que se haga, los focos sobre la circunferencia que van a cambiar de estado son de la misma paridad. Entonces nos fijaremos en los pares y los impares por separado, ignorando lo que sucede al centro, y al final lo encenderemos.
Para los pares, se encienden de $2$ en $2$ los focos apagados. Si queda un foco apagado, este se cambia de estado junto con el triángulo equilátero que lo incluye. Más tarde se encienden los $2$ focos que se apagaron con el último movimiento. El proceso para los impares es análogo.
Ahora los focos de alrededor están encendidos. Sólo falta el foco central. Si está encendido, terminamos pues todos los focos lo están. Si está apagado, podemos hacer un algoritmo como el siguiente: $(1, 9, 17, 25) \rightarrow (1, 17, 25) \rightarrow (9, 19, 25) \rightarrow (3, 11, 19, 25) \rightarrow (3, 11, 25)$.
Cada uno de los focos $1, 3, 9, 11, 17$ y $19$ cambiaron dos veces de estado, entonces quedaron igual, y el del centro cambió $5$ veces, luego, quedó encendido. Por lo tanto, sí es posible encontrar una configuración en la que todos los focos están encendidos.

**Solución alternativa.** Veamos cómo cambiar el estado de cualquier foco, con una cantidad finita de operaciones, sin alterar a los demás focos.
Hay dos casos: el foco está sobre la circunferencia y el foco está en el centro.

**Caso 1.** El foco está sobre la circunferencia.

Numeramos los focos sobre la circunferencia en el sentido de las manecillas del reloj, y los consideramos módulo $24$. Si queremos cambiar de estado al foco $i$, cambiamos con la segunda operación los focos $i$, $i - 8$ y $i + 8$; esto se puede ya que tales focos forman un triángulo equilátero. El foco $i$ cambió su estado, al igual que los focos $i - 8$ e $i + 8$, sin embargo podemos tomar estos dos últimos focos y cambiar su estado con la primera operación; esto se puede hacer ya que la distancia entre estos focos $(i + 8) - (i - 8) - 1 = 15$ es un número impar. Con este proceso solamente el foco $i$ cambió su estado.

**Caso 2.** El foco central.

Aplicamos la primera operación sucesivamente con los focos $1$ y $9$, $9$ y $17$, y $17$ y $1$. Los focos $1$, $9$ y $17$ quedaron igual, pues fueron cambiados dos veces y el foco del centro fue cambiado tres veces, por lo que cambió su estado.

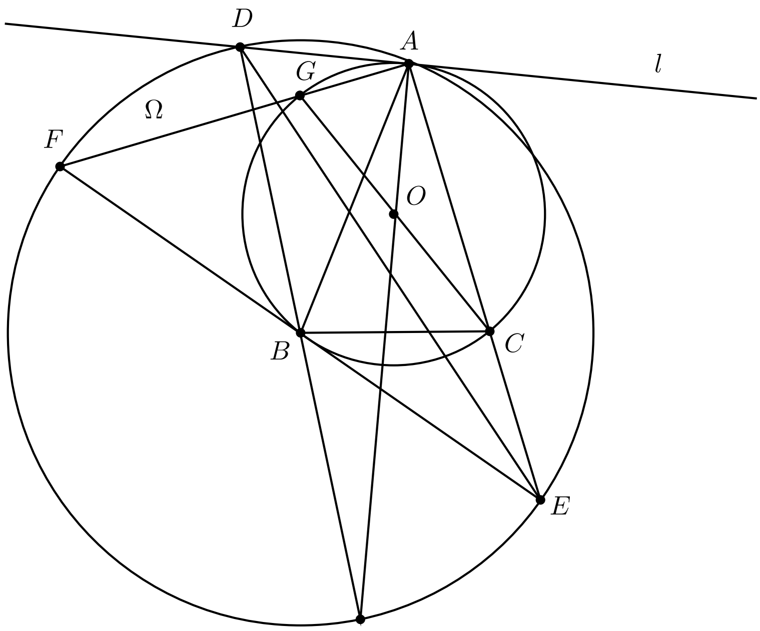
Otra manera de hacer esto es hacer una operación que modifique el foco central, por ejemplo, cambiando los focos 1 y 3, y luego aplicar el caso 1 a los focos 1 y 3 para que vuelvan a su estado original.

Finalmente aplicamos estos procedimientos a cada foco que no esté encendido.

**Problema 2.** Sea $ABC$ un triángulo acutángulo con sus vértices sobre la circunferencia $\mathcal{C}$. Sea $l$ la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto $A$. La circunferencia con centro $B$ y radio $BA$ intersecta a la recta $l$ en $D$ y a la recta $AC$ en $E$. Muestra que la recta $DE$ pasa por el ortocentro del triángulo $ABC$. *Nota: El ortocentro de un triángulo es el punto donde concurren las tres alturas del triángulo.*

(Sugerido por Luis Eduardo García Hernández)

**Solución de Adán Medrano Martín del Campo.** Sea $\Omega$ la circunferencia de centro $B$ y radio $BA$ y sea $O$ el centro de $\mathcal{C}$. Sea $F$ la intersección de $EB$ con $\Omega$ (distinta de $E$) y sea $G$ la intersección de $AF$ con $\mathcal{C}$.




Como $BD$, $BA$, $BF$ y $BE$ son radios de $\Omega$, entonces $BD = BA = BF = BE$.

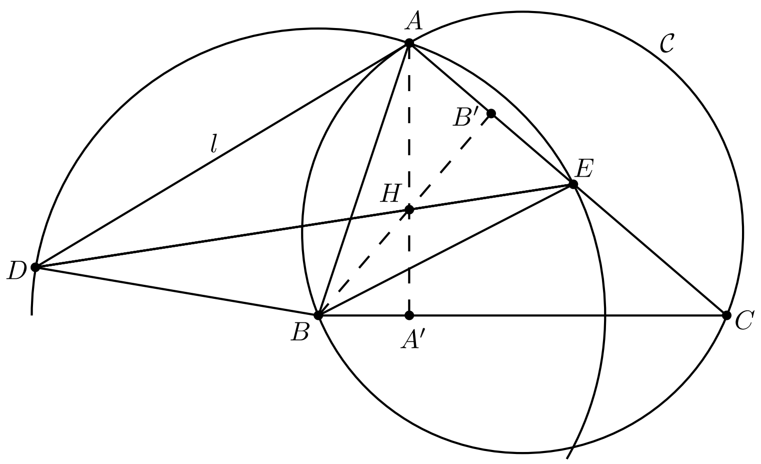
Sean $\angle BAC = \beta + \gamma$, $\angle CBA = \gamma + \alpha$ y $\angle ACB = \alpha + \beta$ (observe que $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ existen, pues basta tomar $\alpha = 90° - \angle CAB$, $\beta = 90° - \angle CBA$ y $\gamma = 90° - \angle ACB$). De este modo $2(\alpha + \beta + \gamma) = 180°$, luego $\alpha + \beta + \gamma = 90°$.

Como $EF$ es diámetro de $\Omega$, tenemos que $\angle FAE = 90°$, luego $\angle GAC = 90°$ y $CG$ es diámetro de $\mathcal{C}$.

Ahora, $\angle CBA = \angle CGA = \gamma + \alpha$. Como $\angle CAG = 90°$ entonces $\angle ACG = \angle GAD = \beta$. Pero también $\angle BCA = \angle BAD = \alpha + \beta$, dado que $l$ es tangente a $\mathcal{C}$. Entonces, $\angle BAG = \angle BCG = \alpha$.
Ahora vemos que $\angle BCG = \angle BAG = \angle BFA = \angle EDA = \alpha$, luego como $\angle BAD = \angle BDA = \alpha + \beta$, tenemos que $\angle BDE = \angle BED = \beta$. Como $\angle BAE = \angle BEA = \beta + \gamma$, entonces $\angle DEA = \gamma$.
Ahora bien, existe un punto $X$ sobre $DE$ tal que $\angle EAX = \gamma$. Entonces como $\angle ACB = \alpha + \beta$, tenemos que $AX$ es perpendicular a $BC$. Pero $\angle XAE = \angle XEA = \gamma$ y $\angle BEA = \angle BAE$, luego $B$ y $X$ están en la mediatriz de $AE$, por lo tanto $BX$ es mediatriz de $AE$, de donde $BX$ es perpendicular a $AC$. Por lo tanto, el ortocentro $H$ del triángulo $ABC$ es la intersección de $AX$ y $BX$, que es $X$ y que está sobre $DE$. Por lo tanto, el ortocentro $H$ del triángulo $ABC$ está sobre $DE$, que es lo que queríamos demostrar.

**Solución alternativa.** Sean $\gamma = \angle C$, $B'$ el pie de la altura desde $B$ sobre $AC$, $A'$ el pie de la altura desde $A$ sobre $BC$ y $H$ el ortocentro del triángulo $ABC$. Como $BA = BE$, se tiene que la altura $BB'$ es también mediatriz de $AE$, luego $HA = HE$, entonces por la semejanza de los tres triángulos $AA'C$, $AB'H$ y $EB'H$ se tiene que,

$$\angle B'HE = \angle B'HA = \gamma. \tag{1}$$




Por otro lado, como la recta $l$ es tangente al circuncírculo $\mathcal{C}$ en $A$ tenemos que $\angle BAD = \gamma$, y por construcción $BA = BD$, entonces $\angle BAD = \angle BDA = \gamma$. Como $\angle AHB = 180° - \gamma$ se tiene que el cuadrilátero $AHBD$ es cíclico. En este cuadrilátero cíclico se tiene que

$$\angle BHD = \angle BAD = \gamma. \tag{2}$$

De (1) y (2) se sigue que $D$, $H$ y $E$ son colineales.

**Problema 3.** Sea $n \geq 3$ un entero positivo. Encuentra todas las soluciones de números reales $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ que satisfacen el siguiente sistema de $n$ ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_1 - 1 &= a_2 \\ a_2^2 + a_2 - 1 &= a_3 \\ &\vdots \\ a_{n-1}^2 + a_{n-1} - 1 &= a_n \\ a_n^2 + a_n - 1 &= a_1. \end{aligned}$$

(Sugerido por Fernando Campos García)

**Solución de Enrique Chiu Han.** Sumando las $n$ ecuaciones tenemos lo siguiente:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - n = a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_1$$

de donde $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = n$, es decir, $\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n} = 1$. De aquí,

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} = 1.$$

Por otro lado, tenemos que para $i = 1, 2, \ldots, n$ se cumple que $a_i^2 + a_i - 1 = a_{i+1}$, es decir, $a_i(a_i + 1) = a_{i+1} + 1$ (con $a_{n+1} = a_1$). Entonces, el sistema original es equivalente al siguiente sistema,

$$\begin{aligned} a_1(a_1 + 1) &= a_2 + 1, \\ a_2(a_2 + 1) &= a_3 + 1, \\ &\vdots \\ a_{n-1}(a_{n-1} + 1) &= a_n + 1, \\ a_n(a_n + 1) &= a_1 + 1. \end{aligned}$$

Multiplicando estas $n$ ecuaciones obtenemos lo siguiente,

$$a_1 a_2 \cdots a_n (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_n + 1) = (a_2 + 1)(a_3 + 1) \cdots (a_n + 1). \quad (3)$$

Tenemos dos casos:
Caso 1: Alguno de los $a_i$'s es $-1$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a_1 = -1$. Demostraremos por inducción que $a_i = -1$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Supongamos que $a_k = -1$ para algún $k$ tal que $1 \leq k \leq n - 1$. Entonces, $a_{k+1} = a_k^2 + a_k - 1 = (-1)^2 - 1 - 1 = -1$ de donde se sigue que $a_i = -1$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Es fácil comprobar que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = -1$ es una solución del sistema de ecuaciones.

Caso 2: $a_i \neq -1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. De (3) obtenemos que $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, es decir, $\sqrt[n]{|a_1 a_2 \cdots a_n|} = 1$.
Aplicando las desigualdades media cuadrática - media aritmética y media aritmética - media geométrica[6], tenemos que,

$$\begin{aligned} 1 &= \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2}{n}} \\ &\geq \frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|}{n} \geq \sqrt[n]{|a_1||a_2| \cdots |a_n|} = \sqrt[n]{|a_1 a_2 \cdots a_n|} = 1, \end{aligned}$$

de donde $\sqrt{\frac{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2}{n}} = \frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|}{n}$. De aquí, $|a_1| = |a_2| = \cdots = |a_n|$. Luego,

$$1 = \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}{n}} = \sqrt{\frac{n|a_i|^2}{n}} = \sqrt{|a_i|^2} = |a_i|$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Así, $a_i = 1$ o $a_i = -1$. Como $a_i \neq -1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, concluimos que $a_i = 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Es fácil comprobar que $a_1 = a_2 = \cdots a_n = 1$ es una solución del sistema de ecuaciones.
Por lo tanto, las únicas soluciones del sistema dado son $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ y $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = -1$.

**Solución alternativa.** Como en la solución anterior, es fácil probar que si $a_j = 1$ para alguna $j$, entonces $a_i = 1$ para toda $i$, y si $a_j = -1$ para alguna $j$, entonces $a_i = -1$ para toda $i$. Además, $(1, 1, \ldots, 1)$ y $(-1, -1, \ldots, -1)$ son soluciones del sistema.
De acuerdo con la solución anterior, tenemos que $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = n$ y $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ si $a_i \neq -1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Aplicando la desigualdad media aritmética-media geométrica con los números no negativos $a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2$, tenemos que,

$$1 = \frac{n}{n} = \frac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \geq \sqrt[n]{a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2} = 1,$$

de donde se obtiene que $a_1^2 = a_2^2 = \cdots = a_n^2$, luego, la igualdad $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = n$ implica que $a_i^2 = 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, de donde $a_i = 1$ o $-1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces, por la primera observación de esta solución, tenemos que sólo hay dos soluciones: $(1, 1, \ldots, 1)$ y $(-1, -1, \ldots, -1)$.

**Problema 4.** Encuentra el menor entero positivo tal que al escribirlo en notación decimal utiliza exactamente dos dígitos distintos y que es divisible entre cada uno de los números del $1$ al $9$.
*Nota: Un ejemplo de un número que al escribirlo en notación decimal utiliza exactamente dos dígitos distintos es el* $2202022002$.

(Sugerido por Fernando Campos García)

[6] Ver en el apéndice los Teoremas 3 y 2.

**Solución de Carlos Ignacio Carriera Ramírez.** Sea $n$ el número buscado. Como $2 \mid n$ y $5 \mid n$, tenemos que $10 \mid n$ pues $2$ y $5$ son primos relativos. Luego, el dígito de las unidades de $n$ tiene que ser $0$. Como $n$ utiliza exactamente dos dígitos y uno de ellos es el $0$, supondremos que el otro es $a \neq 0$. Luego, podemos escribir $n = a(10^{p_1} + 10^{p_2} + \cdots + 10^{p_r})$ con $p_1 > p_2 > \cdots > p_r > 0$. Como $9 \mid n$ tenemos que $9$ divide a la suma de los dígitos de $n$, es decir, $9 \mid ar$ pues el dígito $a$ aparece $r$ veces en $n$. Si $9$ y $a$ son primos relativos, entonces $r \geq 9$, de donde hay al menos $9$ dígitos $a$ y al menos un cero. De aquí que $n$ tendría al menos $10$ dígitos. Tratemos de encontrar un número con menos de $10$ dígitos que cumpla la condición del problema.
Si el máximo común divisor de $a$ y $9$ es $3$, entonces $a = 3$ o $a = 6$ y por lo tanto, hay al menos $3$ dígitos $a$ y al menos un dígito cero. Si el máximo común divisor de $a$ y $9$ es $9$, entonces $a = 9$ y por lo tanto $n$ tiene al menos un dígito $a$ y al menos un cero.
Como $8 \mid n$, tenemos que $8 \mid a_2a_10$ donde $a_1$ y $a_2$ son los dígitos de las decenas y centenas de $n$, respectivamente. Si $a = 3$ o $9$, entonces $a_2 = a_1 = 0$ ya que $8 \nmid aa0$ y $8 \nmid a00$ en estos casos. Si $a = 6$, entonces $a_2 = 6$ o $0$, y $a_1 = 0$. Como $7 \mid n = a(10^{p_1} + \cdots + 10^{p_r})$ y $7$ es primo relativo con $a$, tenemos que $7 \mid 10^{p_1} + \cdots + 10^{p_r}$. Como queremos que $n$ tenga menos de $10$ dígitos, tenemos que $10 > p_1 > \cdots > p_r \geq 2$. Módulo $7$ tenemos que $10^2 \equiv 2$, $10^3 \equiv 6$, $10^4 \equiv 4$, $10^5 \equiv 5$, $10^6 \equiv 1$, $10^7 \equiv 3$ y $10^8 \equiv 2$. Para $a = 3$, $r \geq 3$ y $p_r \geq 3$, para que $8 \mid n$. Es fácil ver que la menor combinación se logra con $r = 3$, $p_1 = 7$, $p_2 = 5$ y $p_3 = 3$. Por lo tanto, el menor $n$ con $a = 3$ es $30303000$.
Ahora, si $a = 6$ tenemos que $p_r \geq 2$ para que $8 \mid n$. Considerando esto y que $r \geq 3$ vemos que el menor que cumple es con $r = 3$, $p_1 = 6$, $p_2 = 4$ y $p_3 = 2$, de donde $n = 6060600$.
Con $a = 9$ busquemos el menor número dependiendo del número de dígitos $a$. No puede tener sólo uno, pues $7 \nmid 9 \cdot 10^{p_1}$. Ahora, si $n$ tiene dos dígitos tenemos que $n = 9(10^{p_1} + 10^{p_2})$ con $p_2 \geq 3$ y el menor que cumple es $p_1 = 6$, $p_2 = 3$ y $n = 9009000$. Es fácil ver que no podemos encontrar uno menor que $9009000$. Por lo tanto, el menor con $a = 9$ es $9009000$. Por último, ya que $6060600 < 9009000 < 30303000$ y el número $6060600$ es divisible entre cada uno de los dígitos del $1$ al $9$, concluimos que el menor número que satisface el problema es $6060600$.

**Problema 5.** Una cuadrícula con lados de longitudes $(2^n - 1)$ y $(2^n + 1)$ se quiere dividir en rectángulos ajenos con lados sobre líneas de la cuadrícula y con un número de cuadraditos de $1 \times 1$ dentro del rectángulo igual a una potencia de $2$.
Encuentra la menor cantidad de rectángulos en los que se puede dividir la cuadrícula.
*Nota: El* $1$ *es considerado una potencia de* $2$ *pues* $2^0 = 1$.

(Sugerido por Daniel Perales Anaya)

**Solución de Juan Carlos Ortiz Rhoton.** Demostraremos que no es posible dividir la cuadrícula en menos de $2n$ rectángulos. Supongamos que sí es posible y que las áreas de los rectángulos son $2^{a_1}, 2^{a_2}, \ldots, 2^{a_k}$ con $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{k-1} \leq a_k$. Entonces, tendríamos que,

$$2^{2n} - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1) = 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_k}. \tag{4}$$

Demostraremos que esto no es posible, demostrando el siguiente resultado.
**Lema.** *Si $m$ es un entero positivo, entonces,*

$$2^m - 1 \neq 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_k}$$

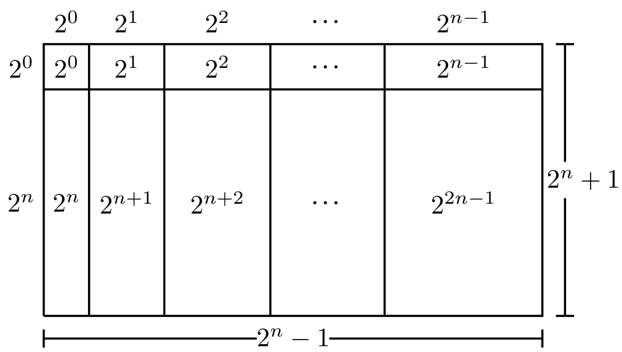
*para todo $k$ tal que $1 \leq k < m$ y cualesquiera enteros no negativos $a_1, \ldots, a_k$.*
**Demostración.** Si $k = 1 < m$, es claro que $2^m - 1 \neq 2^{a_1}$. Supongamos que $k > 1$ y que el resultado es falso. Sea $k < m$ el menor entero positivo tal que $2^m - 1 = 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_k}$ para algunos enteros no negativos $a_1, \ldots, a_k$. Si $a_i = a_j$ para algunos índices $i < j$, tendríamos que,

$$\begin{aligned} 2^m - 1 &= 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_i} + \cdots + 2^{a_j} + \cdots + 2^{a_k} \\ &= 2^{a_i} + 2^{a_j} + 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_{i-1}} + 2^{a_{i+1}} + \cdots + 2^{a_{j-1}} + 2^{a_{j+1}} + \cdots + 2^{a_k} \\ &= 2^{a_i+1} + (2^{a_1} + \cdots + 2^{a_{i-1}} + 2^{a_{i+1}} + \cdots + 2^{a_{j-1}} + 2^{a_{j+1}} + \cdots + 2^{a_k}), \end{aligned}$$

es decir, $2^m - 1$ se ha expresado como suma de $k - 1$ potencias de 2, lo que contradice la minimalidad de $k$. Por lo tanto, $a_i \neq a_j$ para cualesquiera $i, j$ distintos.
Ahora, ordenemos los índices de tal manera que $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$. Tenemos que $a_k < m$ ya que $2^{a_k} < 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_k} = 2^m - 1$. Luego, $a_k \leq m - 1$. De aquí, $a_{k-1} \leq m - 2$, $a_{k-2} \leq m - 3$, y así sucesivamente, pues $a_1 < \cdots < a_k$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 2^m - 1 &= 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_k} \leq 2^{m-1} + 2^{m-2} + \cdots + 2^{m-k} \\ &< 2^{m-1} + 2^{m-2} + \cdots + 2^0 = 2^m - 1, \end{aligned}$$

pues $k < m$. Es decir, $2^m - 1 < 2^m - 1$ lo que es una contradicción. Esto concluye la demostración del lema.
Haciendo $m = 2n$ en el lema se sigue que no se cumple la igualdad (4), lo que es una contradicción.
Finalmente, la siguiente división de la cuadrícula muestra que $2n$ es la respuesta.



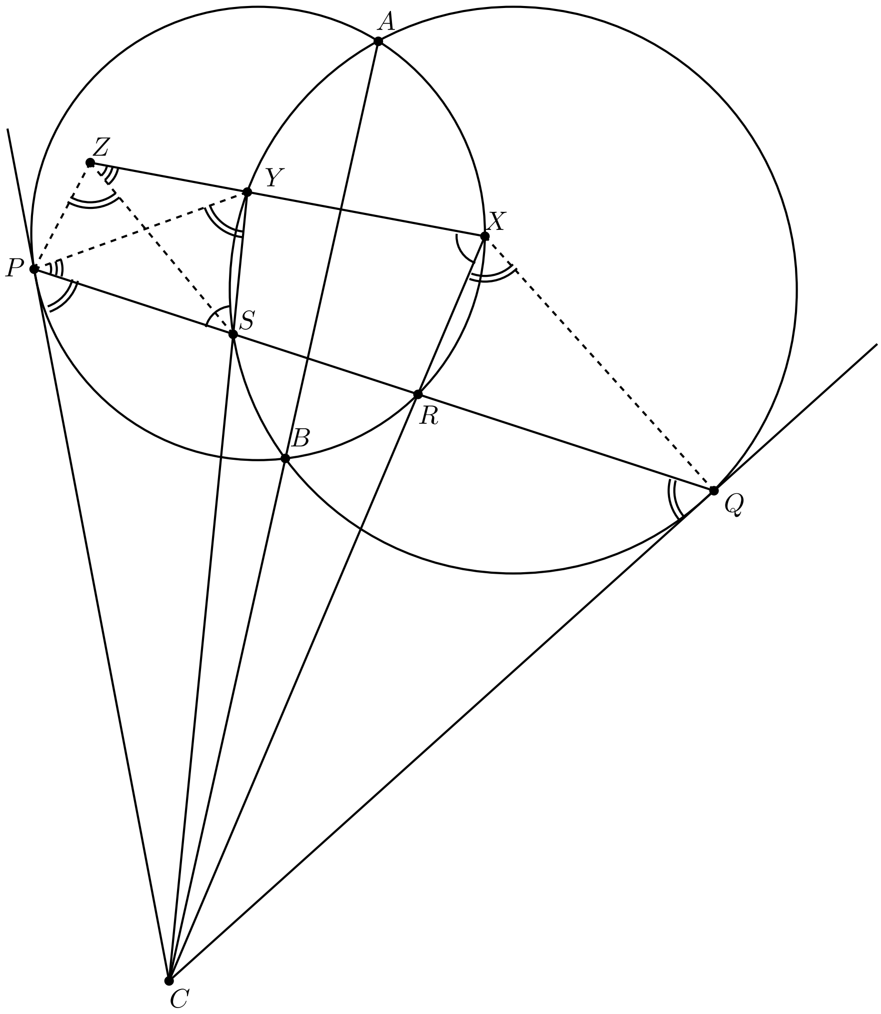

El lado vertical mide $2^n + 1$ y el lado horizontal mide $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$. Además, cada rectángulo tiene lados de longitudes una potencia de 2, y por lo tanto sus áreas también son potencias de 2.

**Problema 6.** Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias de radios diferentes que se cortan en los puntos $A$ y $B$. Consideremos un punto $C$ sobre la recta $AB$ de modo que $B$ queda entre $A$ y $C$. Sean $P$ y $Q$ puntos sobre $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente, tales que $CP$ es tangente a

$\mathcal{C}_1$, $CQ$ es tangente a $\mathcal{C}_2$, $P$ no está dentro de $\mathcal{C}_2$ y $Q$ no está dentro de $\mathcal{C}_1$. La recta $PQ$ corta de nuevo a $\mathcal{C}_1$ en $R$ y a $\mathcal{C}_2$ en $S$, ambos puntos distintos de $B$. Supongamos que $CR$ corta de nuevo a $\mathcal{C}_1$ en $X$ y $CS$ corta de nuevo a $\mathcal{C}_2$ en $Y$. Sea $Z$ un punto sobre la recta $XY$. Muestra que $SZ$ es paralela a $QX$ si y sólo si $PZ$ es paralela a $RX$.

(Sugerido por Daniel Perales Anaya)

**Solución de Diego Terán Ríos.** Notemos que $C$ está sobre el eje radical $AB$ de las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. Luego, por potencia tenemos que $CP^2 = CB \cdot CA = CQ^2$, entonces $CP = CQ$. Luego el triángulo $CPQ$ es isósceles y $\angle CPQ = \angle CQP = \beta$.




Por potencia de $C$ tenemos que, $CQ^2 = CR \cdot CX$, que nos dice que $CQ$ es tangente al circuncírculo del triángulo $RQX$, y por ángulos semi-inscritos tenemos que, $\angle CQP =$

$\angle CXQ = \beta$. Análogamente, como $CP^2 = CS \cdot CY$, resulta que $\angle CPQ = \angle CYP = \beta$.
Como $\angle CPQ = \angle CYP = \angle CQP = \angle CXQ = \beta$, tenemos que los cuadriláteros $CPXQ$ y $CPYQ$ son cíclicos. Pero como comparten los puntos $C$, $P$ y $Q$, y se sabe que sólo hay una circunferencia que pasa por tres puntos, entonces $CPYXQ$ es un pentágono cíclico.
De nuevo por potencia desde $C$, tenemos que $CS \cdot CY = CR \cdot CX$, por lo que $YSRX$ es un cuadrilátero cíclico y $\angle YXR = \angle YSP = \alpha$. Ahora como $YPQX$ es cíclico, entonces $\angle YPQ = 180° - \angle YXQ = 180° - \alpha - \beta$.
Finalmente, la recta $ZS$ es paralela a $XQ$ si y sólo si $\angle YZS + \angle YXQ = 180°$, si y sólo si $\angle YZS = \angle YPS = 180° - \alpha - \beta$, si y sólo si $\angle PZS = \angle PYS$, pues $PZYS$ sería cíclico, si y sólo si $\angle PZY + \angle PSY = \angle PZY + \angle YXR = 180°$, si y sólo si $PZ$ es paralela a $XR$.

# Olimpiadas Internacionales

## American Mathematics Competition (AMC)

Durante el entrenamiento de enero en Colima, se aplicaron los exámenes AMC 10 y AMC 12 (American Mathematics Competition). Dichos exámenes son los que se aplican como primera fase en los Estados Unidos. El AMC 10 es para estudiantes que están cursando, a lo más, primer año de preparatoria, por lo que este examen los presentaron los preseleccionados para la Olimpiada Centroamericana y los segundos lugares del concurso nacional pasado. El AMC 12 es para los que están cursando segundo o tercer año de preparatoria, de modo que lo presentaron los preseleccionados para la Olimpiada Internacional. Cada examen consta de $15$ preguntas de opción múltiple para resolver en un máximo de $75$ minutos y con un máximo puntaje de $150$ puntos. En esta ocasión, los tres puntajes más altos del AMC 10 fueron: Axel Omer Gómez Cásarez con 123 puntos, Kevin William Beuchot Castellanos con $118.5$ puntos y Diego Fajardo Rojas con $114$ puntos. Por otra parte, los tres puntajes más altos del AMC 12 fueron: Julio César Díaz Calderón con $103.5$ puntos, José Ramón Guardiola Espinosa con $100.5$ puntos y Jorge Ignacio González Cázares, con $99$ puntos.

A continuación presentamos el examen del concurso AMC 10 de este año.

### AMC 10A

**Problema 1.** Ana puede hornear un pastelito cada $20$ segundos y Juana lo puede hacer en $30$ segundos. Trabajando juntas, ¿cuántos pastelitos pueden hornear en $5$ minutos?

(a) $10$ (b) $15$ (c) $20$ (d) $25$ (e) $30$

**Problema 2.** Un cuadrado de lado $8$ se cortó por la mitad, formando dos rectángulos congruentes. ¿Cuáles son las dimensiones de uno de estos rectángulos?

(a) $2$ por $4$ (b) $2$ por $6$ (c) $2$ por $8$ (d) $4$ por $4$ (e) $4$ por $8$

**Problema 3.** Un insecto se mueve sobre la recta numérica comenzando en $-2$. Avanza al $-6$ y luego regresa al $5$. ¿Cuántas unidades recorrió en total?

(a) $9$ (b) $11$ (c) $13$ (d) $14$ (e) $15$

**Problema 4.** Si $\angle ABC = 24°$ y $\angle ABD = 20°$, ¿cuál es el mínimo número de grados posible que puede medir el ángulo $\angle CBD$?

(a) $0$ (b) $2$ (c) $4$ (d) $6$ (e) $12$

**Problema 5.** El año pasado $100$ gatos adultos, de los cuales la mitad eran hembras, fueron llevados a una tienda de mascotas. La mitad de las hembras adultas tenían una camada de gatitos. El número promedio de gatitos por camada era $4$. ¿Cuántos gatos y gatitos recibió la tienda de mascotas el año pasado?

(a) $150$ (b) $200$ (c) $250$ (d) $300$ (e) $400$

**Problema 6.** El producto de dos números positivos es $9$. El recíproco de uno de estos números es $4$ veces el recíproco del otro. ¿Cuál es la suma de los dos números?

(a) $\frac{10}{3}$ (b) $\frac{20}{3}$ (c) $7$ (d) $\frac{15}{2}$ (e) $8$

**Problema 7.** En una bolsa con canicas, $\frac{3}{5}$ de los canicas son azules y el resto son rojas. Si el número de canicas rojas se duplica y el número de canicas azules no cambia, ¿qué fracción de las canicas serán rojas?

(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{3}{7}$ (c) $\frac{4}{7}$ (d) $\frac{3}{5}$ (e) $\frac{4}{5}$

**Problema 8.** Las sumas de tres números tomados por parejas son $12$, $17$ y $19$. ¿Cuál es el número de en medio?

(a) $4$ (b) $5$ (c) $6$ (d) $7$ (e) $8$

**Problema 9.** Una pareja de dados de seis caras son etiquetados de tal manera que un dado sólo tiene números pares (el $2$, $4$ y $6$ en dos caras cada uno), y el otro dado tiene sólo números impares (el $1$, $3$ y $5$ en dos caras cada uno). Si se lanza el par de dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números de las caras de arriba de ambos dados es $7$?

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{1}{2}$

**Problema 10.** Mary divide un círculo en $12$ sectores. Los ángulos centrales de estos sectores, medidos en grados, son todos enteros y forman una progresión aritmética. ¿Cuántos grados mide el ángulo del sector más pequeño posible?

(a) $5$ (b) $6$ (c) $8$ (d) $10$ (e) $12$

**Problema 11.** Dos circunferencias tangentes externamente con centros en los puntos $A$ y $B$, tienen radios de $5$ y $3$, respectivamente. Una recta tangente externamente a ambos círculos intersecta a $AB$ en el punto $C$. ¿Cuánto mide $BC$?

(a) $4$ (b) $4.8$ (c) $10.2$ (d) $12$ (e) $14.4$

**Problema 12.** Un año es bisiesto si y sólo si es divisible entre $400$ (por ejemplo, el año $2000$) o es divisible entre $4$ pero no entre $100$ (por ejemplo, el año $2012$). El bicentenario del aniversario del nacimiento del novelista Charles Dickens fue celebrado el martes $7$ de febrero de $2012$. ¿En qué día de la semana nació Dickens?

(a) Viernes (b) Sábado (c) Domingo (d) Lunes (e) Martes

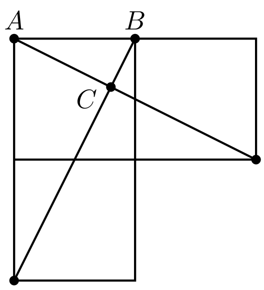
**Problema 13.** Un *promedio iterativo* de los números $1, 2, 3, 4$ y $5$ es calculado de la siguiente manera. Ordena los cinco números de alguna manera. Determina el promedio de los primeros dos números, luego determina el promedio del resultado anterior con el tercer número, después determina el promedio del resultado previo con el cuarto número, y por último determina el promedio del resultado anterior con el quinto número. ¿Cuál es la diferencia entre los valores máximo y mínimo posibles que pueden ser obtenidos usando este procedimiento?

(a) $\frac{31}{16}$ (b) $2$ (c) $\frac{17}{8}$ (d) $3$ (e) $\frac{65}{16}$

**Problema 14.** Pablo fabrica tableros de ajedrez no convencionales de $31 \times 31$ cuadrados. Los tableros tienen un cuadrado negro en cada esquina y se alternan cuadrados rojo y negro en cada renglón y columna. ¿Cuántos cuadrados negros hay en cada tablero?

(a) $480$ (b) $481$ (c) $482$ (d) $483$ (e) $484$

**Problema 15.** Se tienen tres cuadrados unitarios y dos segmentos de recta que conectan dos pares de vértices como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área del triángulo $ABC$?




(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{2}{9}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

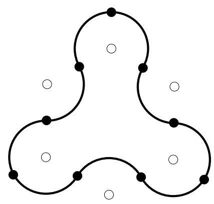
**Problema 16.** Tres corredores comienzan a correr simultáneamente desde el mismo punto sobre una pista circular de $500$ metros. Todos corren en sentido de las manecillas del reloj manteniendo velocidades constantes de $4.4$, $4.8$ y $5$ metros por segundo. Los corredores se detienen una vez que estén todos juntos nuevamente en algún lugar sobre la pista. ¿Cuántos segundos corren los corredores?

(a) $1000$ (b) $1250$ (c) $2500$ (d) $5000$ (e) $10000$

**Problema 17.** Sean $a$ y $b$ enteros primos relativos tales que $a > b > 0$ y $\frac{a^3-b^3}{(a-b)^3} = \frac{73}{3}$. ¿Cuánto vale $a - b$?

(a) $1$ (b) $2$ (c) $3$ (d) $4$ (e) $5$

**Problema 18.** La curva cerrada en la figura está hecha de $9$ arcos circulares congruentes, cada uno de longitud $\frac{2\pi}{3}$, donde cada uno de los centros de los correspondientes círculos es un vértice de un hexágono regular de lado $2$. ¿Cuál es el área encerrada por la curva?



(a) $2\pi + 6$ (b) $2\pi + 4\sqrt{3}$ (c) $3\pi + 4$ (d) $2\pi + 3\sqrt{3} + 2$ (e) $\pi + 6\sqrt{3}$

**Problema 19.** La pintora Paula y sus dos ayudantes pintan cada uno a velocidades constantes pero distintas. Todos ellos comienzan siempre a las 8:00 a.m., y los tres siempre tardan el mismo tiempo en tomar su almuerzo. El lunes los tres pintaron el $50\,\%$ de una casa, terminando a las 4:00 p.m. El martes, Paula no asistió a trabajar, y los dos ayudantes pintaron sólo el $24\,\%$ de la casa terminando a las 2:12 p.m. El miércoles Paula trabajó sola y terminó de pintar la casa trabajando hasta las 7:12 p.m. ¿Cuánto tiempo, en minutos, duró el almuerzo de cada día?

(a) $30$ (b) $36$ (c) $42$ (d) $48$ (e) $60$

**Problema 20.** Un cuadrado de $3 \times 3$ se dividió en $9$ cuadrados unitarios. Cada cuadrado unitario se pinta de color blanco o negro, con cada color siendo igualmente probable, elegido independientemente y al azar. Luego, el cuadrado es rotado $90°$ en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de su centro, y cada cuadrado blanco en una posición antes ocupada por un cuadrado negro se pinta de negro. Los colores del resto de los cuadrados no cambian. ¿Cuál es la probabilidad de que toda la cuadrícula sea ahora completamente negra?

(a) $\frac{49}{512}$ (b) $\frac{7}{64}$ (c) $\frac{121}{1024}$ (d) $\frac{81}{512}$ (e) $\frac{9}{32}$

**Problema 21.** Considera los puntos $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $C = (0,2,0)$ y $D = (0,0,3)$. Los puntos $E$, $F$, $G$ y $H$ son los puntos medios de los segmentos $BD$, $AB$, $AC$ y $DC$, respectivamente. ¿Cuál es el área de $EFGH$?

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (c) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ (d) $\sqrt{3}$ (e) $\frac{2\sqrt{7}}{3}$

**Problema 22.** La suma de los primeros $m$ enteros positivos impares es $212$ más que la suma de los primeros $n$ enteros positivos pares. ¿Cuál es la suma de todos los valores posibles de $n$?

(a) $255$ (b) $256$ (c) $257$ (d) $258$ (e) $259$

**Problema 23.** Ana, Curro, Marco, Carlos, Toño y Mila tienen cuentas de internet. Algunos de ellos, pero no todos, son amigos entre sí por internet, y ninguno de ellos tiene un amigo por internet fuera del grupo. Además cada uno de ellos tiene el mismo número de amigos por internet. ¿De cuántas formas distintas puede suceder esto?

(a) $60$ (b) $170$ (c) $290$ (d) $320$ (e) $660$

**Problema 24.** Sean $a$, $b$ y $c$ enteros positivos con $a \geq b \geq c$, tales que,

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 - c^2 + ab &= 2011, \\ a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 3ab - 2ac - 2bc &= -1997. \end{aligned}$$

¿Cuánto vale $a$?

(a) $249$ (b) $250$ (c) $251$ (d) $252$ (e) $253$

**Problema 25.** Los números reales $x$, $y$, $z$ son elegidos independientemente y al azar en el intervalo $[0, n]$ para algún entero positivo $n$. La probabilidad de que no hay dos de $x$, $y$ y $z$ que estén a lo más a una unidad el uno del otro es mayor que $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es el menor valor posible de $n$?

(a) $7$ (b) $8$ (c) $9$ (d) $10$ (e) $11$

# XXIV Olimpiada de la Cuenca del Pacífico

Desde 1991, los ganadores del Concurso Nacional participan anualmente en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, APMO, por sus siglas en inglés. En el mes de marzo, se aplicó el examen de la XXIV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico a los alumnos que en ese momento formaban parte de la preselección. Dicho examen se aplica y califica en México y los 10 mejores exámenes se enviarán a Japón para ser evaluados por el comité japonés. Los resultados de dicho concurso, aparecerán en el próximo número de Tzaloa, junto con las mejores soluciones de los participantes.

A continuación presentamos los problemas de la XXIV Olimpiada de la Cuenca del Pacífico. Los alumnos tuvieron 4 horas para resolverlos.

**Problema 1.** Sea $P$ un punto en el interior del triángulo $ABC$, y sean $D, E, F$, los puntos de intersección de la recta $AP$ con el lado $BC$ del triángulo, de la recta $BP$ con el lado $CA$ y de la recta $CP$ con el lado $AB$, respectivamente. Muestra que si el área de cada uno de los triángulos $PFA$, $PDB$ y $PEC$ es igual a $1$, entonces el área del triángulo $ABC$ es igual a $6$.

**Problema 2.** En cada cuadrito de un tablero de $2012 \times 2012$ se coloca un número real mayor o igual que $0$ y menor o igual que $1$. Considera las divisiones del tablero en $2$ rectángulos no vacíos formados por cuadritos del tablero que se obtienen al dibujar una recta paralela ya sea a los lados horizontales o verticales del tablero. Supón que, sin importar cuál división en $2$ rectángulos se tome, en al menos uno de los rectángulos resultantes de la división la suma de los números en los cuadritos de tal rectángulo es menor o igual a $1$. Determina el máximo valor posible de la suma de todos los $2012 \times 2012$ números colocados en los cuadritos.

**Problema 3.** Determina todas las parejas $(p, n)$ con $p$ un número primo y $n$ un entero positivo que cumplan que el número siguiente es entero,

$$\frac{n^p + 1}{p^n + 1}.$$

**Problema 4.** Sea $ABC$ un triángulo acutángulo. Denote por $D$ el pie de la perpendicular del punto $A$ sobre el lado $BC$, por $M$ el punto medio de $BC$, por $H$ el ortocentro de triángulo $ABC$ y por $\Gamma$ el circuncírculo de $ABC$. Sean $E$ el punto de intersección de $\Gamma$ y el rayo $MH$, y $F$ el punto de intersección de la recta $ED$ con $\Gamma$ (distinto de $E$). Muestra que se cumple,

$$\frac{BF}{CF} = \frac{AB}{AC}.$$

**Problema 5.** Sea $n$ un entero mayor o igual a $2$. Muestra que si los números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfacen $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = n$, entonces se cumple que,

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{n - a_i a_j} \le \frac{n}{2}.$$

# Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas de abril a junio de 2012.

**Abril**

Publicación del décimo cuarto número de la revista "Tzaloa."

**Mayo, del 3 al 13, Cuernavaca, Morelos**

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes selectivos para determinar la delegación que representará a México en la $53$ Olimpiada Internacional, la delegación que representará a México en la XIV Olimpiada Centroamericana y del Caribe y la preselección para la que nos representará en la XXVII Olimpiada Iberoamericana.

**Junio, primera quincena**

Límite para registro de delegados que quieran aplicar el examen propuesto por el Comité Organizador de la OMM como semifinal de su Concurso Estatal y envío de este examen semifinal.

**Junio**

Entrenamientos para los seleccionados nacionales que asistirán a la XIV Olimpiada Centroamericana y del Caribe.

**Junio, 16 al 26, San Salvador, El Salvador**

XIV Olimpiada Centroamericana y del Caribe.

**Junio, 15 y 16**

Aplicación de los exámenes semifinales en los estados (estados registrados con este propósito).

**Junio y julio, 24 al 1, Morelia, Michoacán**

Entrenamientos para los seleccionados nacionales para ir a la $53^a$ Olimpiada Internacional.

# Apéndice

**Criterios 1 (Criterios de divisibilidad)** *Un número entero es divisible,*

- *entre* $2$*, si el dígito de las unidades es un número par.*
- *entre* $3$*, si la suma de sus dígitos es divisible entre* $3$*.*
- *entre* $4$*, si el número formado por los dos últimos dígitos (el de las unidades y el de las decenas) es divisible entre* $4$*.*
- *entre* $5$*, si el dígito de las unidades es* $5$ *ó* $0$*.*
- *entre* $6$*, si es divisible entre* $2$ *y* $3$*.*
- *entre* $8$*, si el número formado por sus últimos tres dígitos es divisible entre* $8$*.*
- *entre* $9$*, si la suma de sus dígitos es divisible entre* $9$*.*

*Ver [7].*

**Teorema 2 (Desigualdad media aritmética - media geométrica)** *Para cualesquiera números reales positivos* $x_1, \ldots, x_n$ *se cumple que,*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

*con la igualdad si y sólo si* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$*.*
*Ver [2].*

**Teorema 3 (Desigualdad media cuadrática - media aritmética)** *Para cualesquiera números reales positivos* $x_1, \ldots, x_n$*, se cumple que,*

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

*con la igualdad si y sólo si* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$*.*
*Ver [2].*

**Teorema 4 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)** *Para cualesquiera números reales* $x_1$, $\ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ *se cumple que,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

*La igualdad se verifica si y sólo si existe un número real* $\lambda$ *tal que* $x_i = \lambda y_i$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$.
*Ver [2].*

**Teorema 5 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es* $180°$.
*Ver [1].*

**Teorema 6 (Teorema de Pitágoras)** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*
*Ver [1, 6].*

**Definición 7 (Congruencia de triángulos)** *Los triángulos* $ABC$ *y* $A'B'C'$ *son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo* $ABC$ *son iguales a los ángulos y los lados del triángulo* $A'B'C'$.
*Ver [1].*

**Criterio 8 (Criterio de congruencia LLL)** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*
*Ver [1].*

**Criterio 9 (Criterio de congruencia ALA)** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*
*Ver [1].*

**Definición 10 (Semejanza de triángulos)** *Los triángulos* $ABC$ *y* $A'B'C'$ *son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir,*

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$
$$\angle ACB = \angle A'C'B'$$
$$\angle BAC = \angle B'A'C'$$

*y sus lados homólogos son proporcionales, esto es*

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

*Ver [1].*

**Criterio 11 (Criterio de semejanza AA)** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos* $ABC$ *y* $A'B'C'$ *son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*
*Ver [1].*

**Definición 12 (Bisectriz)** *Dado un ángulo* $\angle ABC$ *su bisectriz es la recta que lo divide en dos ángulos iguales.*
*Ver [1].*

**Teorema 13 (Bisectrices)** *Las bisectrices internas de un triángulo concurren en un punto que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo. El punto de concurrencia se llama incentro.*
*Ver [1].*

**Teorema 14 (Medida del ángulo inscrito)** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco.*
*Ver [1].*

**Definición 15 (Cuadrilátero cíclico)** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*
*Ver [1].*

**Teorema 16 (Cuadrilátero cíclico)** *Un cuadrilátero convexo* $ABCD$ *es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a* $180°$*, es decir,*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

*Ver [1].*

# Bibliografía


[1] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Inequalities. A Mathematical Olympiad Approach*. Birkhäuser, 2009.

[3] J.A. Gómez Ortega. *Algunas maneras de usar la potencia*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 4, 2009.

[4] J.A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[5] I. Niven, H. Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[6] A. Rechtman Bulajich. *Algunas demostraciones del teorema de Pitágoras.* Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 1, 2010.

[7] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[8] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

[9] N. Vilenkin. *¿De cuántas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

# Directorio

## Directorio del Comité Organizador de la OMM

**José Antonio Gómez Ortega** (presidente)
Facultad de Ciencias, UNAM
jago@ciencias.unam.mx

**Irving Daniel Calderón Camacho**
Facultad de Ciencias, UNAM,
irvingdanelc@ciencias.unam.mx

**José Alfredo Cobián Campos**
Facultad de Ciencias, UNAM
cobian@ciencias.unam.mx

**Luis Cruz Romo**
Sistemas de Inteligencia Territorial
Estrátegica
lcruzromo@gmail.com

**Marco Antonio Figueroa Ibarra**
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Guanajuato
fuerunt@gmail.com

**Luis Miguel García Velázquez**
Instituto de Matemáticas, UNAM
garcia.lm@gmail.com

**Jesús Jerónimo Castro**
Facultad de Ingeniería,
Universidad Autónoma de Querétaro
jesusjero@hotmail.com

**Ignacio Barradas Bibriesca**
Universidad de Guanajuato
barradas@quijote.ugto.mx

**Fernando Campos García**
Facultad de Ciencias, UNAM
fermexico89@hotmail.com

**David Cossío Ruiz**
ITESM, Campus Ciudad Juárez
sirio11@gmail.com

**José Antonio Climent Hernández**
Facultad de Ciencias, UNAM
antoniocliment@ciencias.unam.mx

**Samantha Lizette Flores López**
Instituto Tecnológico de Colima
samflo_12@hotmail.com

**María Eugenia Guzmán Flores**
CUCEI, Universidad de Guadalajara
marugeniag@gmail.com

**Eréndira Jiménez Zamora**
Instituto Superior de Educación
Normal de Colima
ere_sweet@hotmail.com

**Leonardo Martínez Sandoval**
Facultad de Ciencias, UNAM
ssbmplayer@gmail.com

**María Luisa Pérez Seguí**
Facultad de Ciencias Fis-Mat,
Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo
psegui19@gmail.com

**Miguel Raggi Pérez**
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Universidad Michoacana de San Nicolás
de Hidalgo
mraggi@gmail.com

**Olga Rivera Bobadilla**
Facultad de Ciencias,
Universidad Autónoma del
Estado de México
olgarb@yahoo.com

**Carlos Jacob Rubio Barrios**
Facultad de Matemáticas,
Universidad Autónoma de Yucatán
carlos.rubio@uady.mx

**Elena Ruiz Velázquez**
eleniux@gmail.com

**David Guadalupe Torres Flores**
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Guanajuato
ddtorresf@gmail.com

**Rogelio Valdez Delgado**
Facultad de Ciencias,
Universidad Autónoma del Estado
de Morelos
valdez@uaem.mx

**Rita Vázquez Padilla**
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
ritavz14@gmail.com

**Eduardo Velasco Barreras**
Universidad de Sonora
hamsteritokeweb@hotmail.com

**Hugo Villanueva Méndez**
Instituto de Matemáticas, UNAM
hvillan@matem.unam.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior s/n, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@ciencias.unam.mx`

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

`http://www.omm.unam.mx/`