TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2009, No. 3

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.omm.unam.mx

Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Impreso y hecho en México.
Julio de 2009.

Contenido

Presentación

Tzaloa, que en náhuatl significa aprender, es una revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. El objetivo principal de esta publicación, es fomentar y estimular el estudio de las matemáticas como una disciplina del pensamiento que desarrolla la inteligencia del estudiante mediante métodos de razonamiento estructurados, deductivos y creativos.

Desde hace 22 años la Sociedad Matemática Mexicana, a través de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, ha detectado jóvenes con talento para las matemáticas y otras disciplinas afines. Muchos profesores y estudiantes que se han acercado a este programa han creado, de manera espontánea y altruista, innumerables talleres de resolución de problemas que han contribuido de manera sustancial a mejorar la enseñanza de las matemáticas en nuestro país. Asimismo, muchas universidades se han visto beneficiadas, no solamente por el ingreso de jóvenes con una excelente formación matemática, sino también por exolímpicos que desenvuelven su vida profesional en ellas.

El programa básico de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla anualmente en tres etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en olimpiadas internacionales.

23ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

En la 23ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1º de agosto de 1990. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2009-2010 y, para el 1º de julio de 2010, no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario. Para mayor información consulte la página:

`http://www.omm.unam.mx`

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 23^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 8 al 13 de noviembre de 2009 en Campeche, Campeche. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2010: la XXII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, que se llevará a cabo en el mes de marzo; la XII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, que se celebrará en el mes de junio en Puerto Rico; la 51^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se llevará a cabo en julio en Kazajstán y la XXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en el mes de septiembre en Paraguay.

La revista

En este tercer número de tu revista Tzaloa, incluimos un interesante artículo de Francisco Ruiz, que bajo el título *Demostrando por Inducción*, nos presenta una breve exposición sobre el uso del método de Inducción Matemática para la demostración de fórmulas y propiedades.
El tema de Inducción Matemática no está contemplado en la mayoría de los programas y por eso no suele enseñarse en los cursos típicos de secundaria y preparatoria. Sin embargo, la simplicidad del método junto con el enorme poder que tiene para resolver una gran variedad de problemas, nos motivó a prepar este trabajo que esperamos sea de mucha utilidad para tu preparación olímpica.
A través de las explicaciones y de los 5 ejemplos que se incluyen, podrás aprender cómo utilizar esta herramienta para la demostración de propiedades que se cumplen para algunos conjuntos infinitos de números enteros. Los ejemplos fueron cuidadosamente seleccionados de manera que se avanza gradualmente desde los casos más típicos o directos, hasta otros más elaborados donde el método fue adaptado según la situación. Con esta selección buscamos no sólo que comprendas el poder del método, sino que además puedas apreciar la gran flexibilidad que tiene.
Al final del artículo incluimos una serie de 7 ejercicios mediante los que podrás practicar lo aprendido y poner a prueba tus nuevas capacidades. Te invitamos a que nos hagas llegar tus soluciones, comentarios y sugerencias a nuestra dirección electrónica: `revistaomm@gmail.com`. Con gusto recibiremos tus contribuciones y opiniones de nuestro trabajo.

Demostrando por Inducción

Por Francisco Ruiz Benjumeda

La comprensión del infinito es uno de los retos más apasionantes que existen para el entendimiento humano. Todo lo que conoce el ser humano es finito[1] y su experiencia sobre el mundo también lo es. En matemáticas, el concepto de infinito es central. En la mayoría de las ocasiones, los matemáticos trabajan con conjuntos de objetos (como los números) que son infinitos. Muchas de las propiedades, resultados o teoremas se establecen para una infinidad de casos, objetos o situaciones. La demostración de dichas propiedades requiere de métodos ingeniosos que permitan validarlas, no sólo para un número finito de casos particulares, sino para una infinidad de ellos. Uno de éstos es el método de Inducción Matemática, mismo que sirve para probar o establecer que una determinada propiedad se cumple para todo número natural.
Es difícil establecer cuando se usó por primera vez este método de demostración, pero existen evidencias de que sus ideas principales se remontan a tiempos muy antiguos. Desde épocas anteriores a Cristo, es posible encontrar trabajos de matemáticos que contienen razonamientos cercanos a la inducción matemática, tal es el caso de la demostración de Euclides (300 AC) sobre la existencia de una infinidad de números primos.
Alrededor del siglo X, Al-Karaji (953-1029 DC), matemático persa musulmán, trabajó el terorema del binomio y la generación de sus coeficientes (triángulo de Pascal) utilizando un método que incluye los pasos principales de la Inducción Matemática moderna. Posteriormente, Samau‘al al-Maghribi (1130-1180 DC), extendió los trabajos de Al-Karaji, siendo su demostración el ejemplo más completo de razonamiento por Inducción Matemática de los tiempos antiguos.
Sin embargo, en ninguno de esos trabajos se establece explícitamente la hipótesis de inducción tal y como lo hacemos hoy en día. El primer matemático en hacer una exposición explícita del Principio de Inducción Matemática fue Blaise Pascal (1623-1662)[2]. También es importante mencionar las contribuciones que hizo en este campo Pierre de

[1] Finito: que tiene fin
[2] Traité du triangle arithmétique (1665)

Fermat (1601/8?-1665), quien usó ampliamente su método del Descenso Infinito, el cual es una variante del Principio de Inducción Matemática. Finalmente, en el siglo XIX, con base en los trabajos de Giuseppe Peano (1858-1932) y Richard Dedekind (1831-1916), se establece de manera definitiva el tratamiento sistemático y riguroso que se usa hoy en día para realizar demostraciones por Inducción Matemática.
Ahora, dejemos un poco de lado la historia y continuemos nuestra exposición haciendo énfasis en dos características fundamentales del conjunto de los números natrurales: en primer lugar, los naturales forman un conjunto infinito, ordenado y que cuenta con un primer elemento (el número 1) y, en segundo lugar, que el resto de los elementos del conjunto (los demás naturales) se generan a partir del número 1 mediante repetidas aplicaciones de la función sucesor: $s(n) = n + 1$.
Las propiedades anteriores son fundamentales, pues de ellas se derivan las bases lógicas que dan sustento a la validez de las demostraciones por Inducción. En su forma más básica, el método de Inducción Matemática consta de 2 etapas. Si deseamos probar que una determinada propiedad P se cumple para todo número natural, entonces procedemos aplicando el siguiente esquema[3]

- Paso 1 (Base de la Inducción).- Se demuestra que el primer natural (el número 1) cumple la propiedad: $P(1)$.

- Paso 2 (Paso Inductivo).- Partiendo de la suposición (Hipótesis de Inducción) de que un número natural cualquiera k cumple con la propiedad: $P(k)$, procedemos a demostrar que, en consecuencia, el número $k + 1$ también debe cumplir con dicha propiedad: $P(k + 1)$. Es decir, probamos la validez de la implicación $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$.

En caso de poder realizar exitosamente lo anterior, entonces concluimos que la propiedad P se cumple para todos los números naturales.
A continuación, veremos cómo funciona el método a través de revisar algunos ejemplos concretos.

Ejemplo 1. Pruebe que para todo número natural n

$$1 + 2 + \cdots + n = \tfrac{n(n+1)}{2}.$$

Solución. Probaremos la validez de la fórmula a través de Inducción Matemática.

- Paso 1 (Base de la Inducción).- Procedemos a mostrar la validez de la fórmula para el caso $n = 1$.

$$1 = \tfrac{1(1+1)}{2} = \tfrac{2}{2} = 1$$

[3]En algunos textos, al presentar el esquema de inducción suelen diferenciarse tres etapas en lugar de dos. En estos textos, la primera etapa consiste probar la validez de $P(1)$, la segunda etapa consiste en enunciar la Hipótesis de Inducción (i.e. suponer la validez de $P(k)$, para un natural cualquiera k) y en la tercera etapa se prueba la validez de $P(k + 1)$. Nótese que en estos textos, la primera etapa corresponde exactamente con nuestro Paso 1, mientras que la conjunción de las etapas 2 y 3 es lógicamente equivalente con nuestro Paso 2, donde se prueba $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$.

- Paso 2 (Paso Inductivo).- Suponemos que la fórmula es válida para un número natural cualquiera $n = k$.

  Hipótesis de Inducción: $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

  y a partir de esto establecemos la validez de la fórmula para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (k+1) &= (1 + 2 + \cdots + k) + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]}{2} \end{aligned}$$

  Con esto termina nuestra prueba por inducción y podemos concluir que la fórmula se cumple o es válida para todo número natural n.

Es importante darse cuenta que el principio de inducción funciona porque al demostrar que cada vez que la propiedad se cumple para un número natural cualquiera, entonces también se cumple para el siguiente. Sabiendo que la propiedad se cumple para el primer número natural (el número 1), entonces también se cumple para el número 2. Como se cumple para 2, entonces también se debe cumplir para 3 y así sucesivamente.

Ejemplo 2. Pruebe que para todo número natural n

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solución. Probaremos la validez de la fórmula a través de Inducción Matemática.

- Paso 1 (Base de la Inducción).- Procedemos a mostrar la validez de la fórmula para el caso $n = 1$.

$$1^2 = \tfrac{1(1+1)[2(1)+1]}{6} = \tfrac{1(2)(3)}{6} = \tfrac{6}{6} = 1$$

- Paso 2 (Paso Inductivo).- Suponemos que la fórmula es válida para un número natural cualquiera $n = k$.

  Hipótesis de Inducción: $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

y a partir de esto establecemos la validez de la fórmula para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + (k+1)^2 &= \left(1^2 + 2^2 + \cdots + k^2\right) + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)\left[k(2k+1) + 6(k+1)\right]}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= \frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]\left[2(k+1)+1\right]}{6}
\end{aligned}$$

Por lo que concluimos que la fórmula se cumple para todo número natural n.

Las demostraciones por Inducción pueden compararse con el efecto *dominó*. Si ponemos varias fichas de dominó paradas y colocadas en hilera una seguida de la otra, al tirar la primera ficha, ésta caerá sobre la segunda provocando su caída; la caída de la segunda provoca que caiga la tercera ficha; la tercera ficha derriba a la cuarta y así sucesivamente hasta que todas las fichas caen. En esta comparación, al caer la primera ficha se inicia una especie de reacción en cadena que termina provocando la caída de todas las fichas.
De igual forma, una vez que se han realizado las dos etapas de una demostración por Inducción, la validez de la propiedad para el número 1 (base de la inducción) implica la validez de la propiedad para el 2, la validez para el 2 implica la validez para el 3 y así sucesivamente (paso inductivo), de manera que podemos concluir que la propiedad es válida para todos los números naturales.
Aunque en su forma más simple la Inducción Matemática se usa para probar que determinada propiedad se cumple para todo número natural, es posible adaptar el método para probar la validez de una afirmación para otros conjuntos de números (no solamente los naturales). A continuación, presentamos un tercer ejemplo donde se prueba la validez de una propiedad que se cumple sólo para los números impares.

Ejemplo 3. Pruebe que para todo número impar n, el número $n^2 - 1$ es divisible entre 8.

Solución. Probaremos la validez de esta propiedad de divisibilidad por medio de Inducción Matemática. Cabe señalar que en la prueba se utilizará la notación de congruencias.[4]

[4]Diremos que $a \equiv b\,(mod\, m)$, cuando $a - b = km$ para algún entero k. Si deseas conocer más a fondo algunos detalles con respecto al concepto de congruencia módulo m, te sugerimos consultar el artículo sobre este tema que aparece en tu revista Tzaloa No.2, año 2009.

- Paso 1 (Base de la Inducción).- Procedemos a mostrar la validez de la fórmula para el caso $n = 1$.

$$1^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \equiv 0 \pmod 8.$$

- Paso 2 (Paso Inductivo).- Suponemos que la propiedad es válida para un número impar positivo cualquiera $n = 2k + 1$, donde $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

  Hipótesis de Inducción: $(2k + 1)^2 - 1 \equiv 0 \pmod 8$.

  Ahora, con base en esto, probamos la validez de la propiedad para el siguiente impar $n = 2k + 3$.

$$\begin{aligned}(2k+3)^2 - 1 &= [(2k+1)+2]^2 - 1\\ &= (2k+1)^2 + 2(2)(2k+1) + 4 - 1\\ &= (2k+1)^2 - 1 + 4(2k+1) + 4\\ &= \left[(2k+1)^2 - 1\right] + 8k + 8\end{aligned}$$

  Aplicando la hipótesis de inducción tenemos

$$(2k+3)^2 - 1 = \left[(2k+1)^2 - 1\right] + 8k + 8 \equiv 0 + 0 + 0 \pmod 8.$$

  Por lo que se concluye que $n^2 - 1 \equiv 0 \pmod 8$ para todo número impar n.

En este ejemplo, pudimos ver cómo el esquema de Inducción Matemática puede ser modificado para probar que una propiedad se cumple para un conjunto que no sea necesariamente el de los números naturales. Esto pudo hacerse porque el conjunto de los impares cumple con las dos propiedades básicas que fundamentan el Principio de Inducción: los impares forman un conjunto ordenado que tiene un elemento mínimo (el número 1) y el resto del conjunto se genera a partir de este elemento mínimo mediante aplicaciones repetidas de la función sucesor para impares $s(i) = i + 2$.

$$1,\ s(1) = 3,\ s(3) = 5,\ s(5) = 7,\ s(7) = 9, \text{etc.}$$

A este tipo de conjuntos se les llama conjuntos *bien ordenados*. Los naturales es el ejemplo más conocido de conjunto bien ordenado. De la misma manera que la Inducción Matemática tradicional se usa para demostrar que una propiedad se cumple para el conjunto de los números naturales, podemos usar métodos *adaptados* de inducción para probar que una propiedad se cumple para otros conjuntos, siempre y cuando estos sean bien ordenados.

Ejemplo 4. Pruebe[5] que $n! > 3^{n-2}$, para todo natural $n \geq 3$.

Solución. Procedemos a probar por Inducción la validez de la desigualdad para todo número natural $n \geq 3$.

[5] Recuerde que $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ \ldots \ \cdot n$.

- Paso 1 (Base de la Inducción).- Procedemos a mostrar la validez de la desigualdad para el primer caso $n = 3$.

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 > 3^1 = 3^{3-2}$$

- Paso 2 (Paso Inductivo).- Suponemos que la desigualdad es válida para $n = k$, donde k es un número natural cualquiera tal que $k \geq 3$.

  Hipótesis de Inducción: $k! > 3^{k-2}$

  Ahora probamos la validez de la desigualdad para $n = k + 1$, donde $k \geq 3$.

$$(k+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot \ k \cdot (k+1) = k! \cdot (k+1).$$

  Aplicando la hipótesis de inducción tenemos

$$(k+1)! = k!(k+1) > 3^{k-2} \cdot (k+1) > 3^{k-2} \cdot 3 = 3^{k-1} = 3^{(k+1)-2}.$$

  Por lo que se concluye que $n! > 3^{n-2}$, para todo natural $n \geq 3$.

En este último ejemplo pudimos observar cómo el método de inducción se puede usar comenzando en un natural distinto de uno. En algunos casos tenemos que una determinada propiedad se cumple para todo número natural $n \geq m$, en estos casos el esquema de Inducción se modifica, de manera que en vez de probar la base de la inducción para $n = 1$, se hace para $n = m$.
Para concluir nuestra exposición, trataremos otra variante del Principio de Inducción que para ciertos problemas suele ser más cómoda que la versión original. En esta variante, conocida como *Inducción Fuerte* o *Inducción Completa*, se plantea la hipótesis de inducción de manera más general: se supone que la propiedad es válida para $m \leq k$, en lugar de suponer que la propiedad es unicamente válida para k. Cabe mencionar que ambos principios (Inducción e Inducción Fuerte) son lógicamente equivalentes, por lo que pueden ser usados indistintamente y la elección de cuál de ellos usar no debe tener otra consideración adicional que la facilidad que presente uno u otro principio para resolver el problema.
Para ilustrar el uso del Principio de Inducción Fuerte, en el siguiente ejemplo expondremos la prueba de una propiedad de los números de Fibonacci. Antes de presentar el ejercicio recordemos cómo se define la sucesión de Fibonacci

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_n &= F_{n-2} + F_{n-1}, \text{ para } n \geq 3. \end{aligned}$$

Es así, que los primeros números de la sucesión de Fibonacci son

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \ldots$$

Ejemplo 5. Pruebe que para todo entero $n \geq 1,\ F_n < 2^n$.

Solución. Procedemos a probar por Inducción Fuerte la validez de esta propiedad de los números de Fibonacci.

- Paso 1 (Base de la Inducción).- Procedemos a mostrar la validez para los números F_1 y F_2

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 < 2^1 \\ F_2 &= 1 < 4 = 2^2 \end{aligned}$$

- Paso 2 (Paso Inductivo).- Sea k un número natural cualquiera tal que $k \geq 2$. Suponemos que la propiedad se cumple para todo número F_m, donde $1 \leq m \leq k$.

  $$\text{Hipótesis de Inducción: } F_m < 2^m,\ \text{ para } 1 \leq m \leq k.$$

  Usando la Hipótesis de Inducción para F_{k-1} y $F_k,$ establecemos la validez de la propiedad para F_{k+1}, con $k \geq 2$.

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= F_{k-1} + F_k \\ &< 2^{k-1} + 2^k \\ &= 2^{k-1} + 2 \cdot 2^{k-1} \\ &= (1+2) \cdot 2^{k-1} \\ &= 3 \cdot 2^{k-1} \\ &< 2^2 \cdot 2^{k-1} \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

  Por lo que se concluye que $F_n < 2^n,$ para todo natural n.

A pesar de que cuando usamos el esquema de Inducción Fuerte, en la hipótesis de inducción suponemos la validez de la propiedad para todos los casos donde $m \leq k$, es frecuente que en el desarrollo del paso inductivo sólo sea necesario utilizar algunas de las instancias posibles. Nótese que en el ejemplo anterior sólo usamos 2 instancias de la hipótesis de inducción: para $m = k$ y para $m = k - 1$.
Otro detalle del último ejemplo que merece especial atención está en la demostración de la base de la inducción: al probar la base de la inducción no sólo se hizo para F_1, sino que además fue necesario hacerlo también para F_2. Lo anterior obedece a la naturaleza misma de la sucesión de Fibonacci, ya que esta se genera a partir de F_1 y F_2 mediante la definición: $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, para $n \geq 3$. En este caso, el conjunto de Fibonacci es un conjunto bien ordenado con la propiedad especial de contar con 2 elementos mínimos: F_1 y F_2, que son los generadores del conjunto y, por lo tanto, la base de la inducción debe ser probada para ambos.
Como pudimos ver en este artículo, la Inducción Matemática permite probar la validez de fórmulas y propiedades que se cumplen para todos los números naturales. Asimismo, también vimos que este método es igualmente útil cuando se requiere probar una propiedad para otros conjuntos, siempre y cuando estos sean bien ordenados.

Las ideas que sustentan al Principio de Inducción se remontan a épocas muy antiguas y su formalización se ha venido refinando con el paso del tiempo. Debido a su enorme poder, actualmente se le utiliza de manera muy extensa tanto en matemáticas como en ciencias de la computación. Existen muchas variantes de este principio, que van desde las versiones equivalentes (como el Principio de Inducción Fuerte o el Principio del Buen Orden[6]) hasta los esquemas de inducción para el caso de ordinales transfinitos[7].

EJERCICIOS

1. Pruebe que 3 es divisor de $n^3 + 2n$ para todo entero positivo n.

2. Pruebe si n es un entero positivo cualquiera, entonces se cumple la siguiente fórmula para la suma de cubos

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \tfrac{n^2(n+1)^2}{4}$$

3. El juego de Nim se juega entre dos personas con las siguientes reglas: Se pone un número n de fichas iguales sobre la mesa. Cada jugador en su turno puede tomar 1, 2 ó 3 fichas. El jugador que toma la última ficha pierde. Demuestre que el primer jugador tiene una estrategia ganadora siempre y cuando $n \not\equiv 1 \pmod 4$.

4. Pruebe que el número total de diagonales que tiene un polígono convexo de n lados ($n \geq 3$), es $\frac{n(n-3)}{2}$.

5. Pruebe que para todo entero positivo n

$$\tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \tfrac{1}{n(n+1)} = \tfrac{n}{n+1}.$$

6. Considere la sucesión de Fibonacci $F_1, F_2, \ldots$ y demuestre que

$$(F_1)^2 + (F_2)^2 + \cdots + (F_n)^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

7. Pruebe que $(3n)! > 2^{6n-4}$ para todo entero positivo n.

Bibliografía

1. Swokowski, Earl. *Álgebra Universitaria*. CECSA, México 1987.

2. De Oteyza, et. al. *Temas Selectos de Matemáticas*. Prentice Hall, México 1988.

3. Courant R, H. Robbins. *¿Qué son las Matemáticas?* FCE, México 2002.

[6]El Principio del Buen Orden establece que: *Si P es un subconjunto no vacio de números naturales, entonces P tiene un elemento mínimo.*

[7]Los ordinales transfinitos son números construidos con la teoría de conuntos y que están *más allá* del infinito de los números naturales. El estudio de estos números (Aritmética Transfinita) tiene sus orígenes en los trabajos del matemático francés Georg Cantor (1845-1918).

Problemas de práctica

Como en el número anterior, en esta sección encontrarás 20 interesantes y variados problemas. En esta ocasión, hemos hecho nuestra selección considerando problemas de distintos grados de dificultad, desde problemas fáciles hasta problemas de concursos estatales.

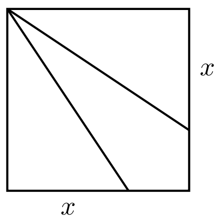
Te desafiamos para que pongas a prueba todas tus capacidades, pero no te desanimes ni te rindas si no puedes resolverlos al primer intento, recuerda que la perseverancia es la clave del éxito y que la práctica hace al maestro.

En la siguiente sección encontrarás las soluciones de todos ellos, pero te recomendamos que no la consultes sino hasta después de haber trabajado un poco en cada problema.

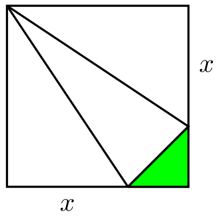
Problema 1. Encuentra todos los triángulos rectángulos tales que las medidas de uno de sus catetos y de la hipotenusa sean números enteros, y la medida del otro cateto sea igual a la raíz cuadrada de 2009.

Problema 2. Carlos tiene un cuadrado de papel de lado 1.

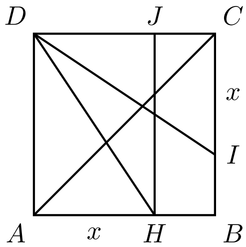
1. Quiere dividirlo en tres partes como se muestra en la figura. Si las tres partes deben tener la misma área, ¿cuánto debe medir x?



2. Ahora, quiere dividirlo en cuatro partes, de forma que los tres triángulos que no están sombreados tengan la misma área. ¿Cuánto debe medir x?



3. Con las medidas de la pregunta 2, Carlos traza la recta HJ perpendicular a AB. Muestra que las rectas AC, HJ y DI son concurrentes.



Problema 3. Decimos que un número entero mayor o igual a 2 es *bueno* si puede escribirse como la suma de números naturales, tales que la suma de sus recíprocos sea igual a 1. Por ejemplo, el número 3 no es bueno ya que

$$\begin{array}{ccc} 3 = 1 + 2 & \text{y} & \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \neq 1, \\ 3 = 1 + 1 + 1 & \text{y} & \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1. \end{array}$$

1. ¿Cuáles son los números naturales menores que 10 que son buenos?
2. Muestra que todos los cuadrados perfectos son buenos.
3. Muestra que si n es bueno, entonces los números de la forma $2n + 2$ y $2n + 9$ también son buenos.

Problema 4. En una escuela hay 10 salones. Cada estudiante de cada salón conoce exactamente a un estudiante de cada uno de los otros 9 salones. Demuestra que el número de estudiantes en cada salón es el mismo. (Nota: si el estudiante A conoce al estudiante B, entonces el estudiante B conoce al estudiante A).

Problema 5. Sea p un número primo. Encuentra todas las soluciones (x, y) de enteros que satisfacen la ecuación $p(x + y) = xy$.

Problema 6. Sea $n \geq 1$ un entero. Tienes n lámparas alineadas y numeradas, de izquierda a derecha, de 1 a n. Cada lámpara puede estar encendida o apagada. Cada segundo, determina la lámpara apagada de mayor número e invierte el estado de ésta (de apagada a encendida y viceversa) y de las lámparas posteriores (lámparas de mayor número).

1. Muestra que en algún momento todas las lámparas estarán encendidas.

2. Si inicialmente todas las lámparas están apagadas, ¿después de cuántos segundos todas las lámparas estarán encendidas?

3. Si $n = 11$ y al inicio sólo las lámparas 6, 9 y 10 están encendidas, ¿después de cuántos segundos todas las lámparas estarán encendidas?

Problema 7. En una pequeña ciudad se quiere establecer un sistema de transporte con por lo menos dos líneas de autobús, que debe cumplir que

1. cada línea pase por exactamente tres paradas;

2. cada dos líneas distintas tienen exactamente una parada en común;

3. para cada dos paradas de autobús distintas, exista una línea que pase por ambas.

Determina el número de paradas de autobús de la ciudad.

Problema 8. Considera un tablero de 3×3, donde todas las casillas inicialmente tienen un cero.

0	0	0
0	0	0
0	0	0

Para alterar los números del tablero, sólo se permite la siguiente operación: escoger un subtablero de 2×2 formado por casillas adyacentes, y sumar 1 a todos los números del subtablero.

1. Determina si es posible, después de una secuencia de operaciones permitidas, obtener el siguiente tablero

7	9	2
15	25	12
8	18	10

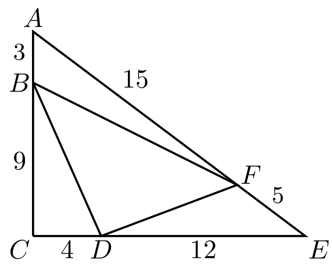
2. Utilizando únicamente operaciones permitidas, termina de llenar el siguiente tablero

14		
19	36	
	14	

Problema 9. En una olimpiada de Matemáticas los concursantes están ocupando todos los asientos de un salón rectangular donde los asientos están alineados en filas y columnas de manera que hay más de dos filas y en cada fila hay más de dos asientos. Cada concursante le da la mano a cada compañero que está junto a él (adelante, atrás, al lado y en diagonal). Si hay 1020 saludos, ¿cuántos concursantes hay?

Problema 10. Carlos escogió 5 dígitos distintos y formó con ellos un número de 5 dígitos. Sofía formó un número con los 5 dígitos que Carlos no escogió. ¿Puede la suma de los dos números ser igual a $122,222$?

Problema 11. Si el triángulo ACE es rectángulo, ¿cuál es la razón entre las áreas de los triángulos BDF y ACE?



Problema 12. Determina todas las parejas (m, n) de enteros positivos que satisfacen la ecuación $m^n = n^{m-n}$.

Problema 13. Considera todos los números de 9 dígitos en los que aparecen los dígitos $1, 2, 3, \ldots, 9$ una y sólo una vez. Calcula la suma de todos estos números.

Problema 14. Prueba que si una progresión aritmética de enteros contiene un cuadrado perfecto, entonces contiene una infinidad de cuadrados perfectos.

Problema 15. Sea $ABCD$ un cuadrilátero con ángulos $\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$ y $\angle C = 120°$. Las diagonales AC y BD se intersectan en un punto S tal que $2BS = SD$. Sean P el punto medio de AC, M el pie de la perpendicular desde P sobre la diagonal BD, y N el pie de la perpendicular desde S sobre BP. Demuestra que $SM = SN$ y que $AD = DC$.

Problema 16. Demuestra que todo entero que no es múltiplo de 2 ni de 5, tiene un múltiplo con todos sus dígitos iguales a 1.

Problema 17. La igualdad $2008 = 1111 + 444 + 222 + 99 + 77 + 55$ es un ejemplo de descomposición del número 2008 como suma de enteros positivos distintos de más de un dígito, cuya representación (en el sistema decimal) utiliza un solo dígito.

1. Encuentra una descomposición de este tipo para el número 2009.

2. Para el número 2009, determina todas las posibles descomposiciones de este tipo que utilizan el menor número posible de sumandos (el orden de los sumandos no se tiene en cuenta).

Problema 18. Se tienen en el plano $3n$ puntos: n de color blanco, n de color azul y n de color negro. Cada uno de los puntos está unido con puntos de color distinto al suyo mediante $n + 1$ segmentos exactamente. Si entre cualesquiera dos puntos hay a lo más un segmento, demuestra que hay por lo menos un triángulo formado por vértices de distinto color.

Problema 19. Determina si existen enteros positivos a y b tales que $a^4 + 1$ y $b^2 + 1$ no sean divisibles entre 39, pero que $(a^4 + 1)(b^2 + 1)$ sea divisible entre 39.

Problema 20. Un cuadrilátero convexo $ABCD$ no tiene lados paralelos. Los ángulos formados por la diagonal AC y los cuatro lados son $55°$, $55°$, $19°$ y $16°$ en algún orden. Determina todos los valores posibles del ángulo agudo entre AC y BD.

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones que hemos preparado para los 20 problemas de la sección anterior. Es importante que tengas en cuenta que las soluciones que aquí presentamos no son necesariamente las únicas o las mejores, tan sólo son ejemplos del tipo de razonamiento que se busca estimular en los problemas de olimpiada. Piensa que cada problema puede tener tantas soluciones como ideas creativas y originales se desarrollen con base en la lógica y en la argumentación correcta.
Si encontraste una solución diferente de las nuestras y no estás seguro de su validez, o simplemente quieres compartirla con nosotros, te invitamos para que nos escribas a nuestra dirección electrónica: `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Sea m la longitud de la hipotenusa y n la del otro cateto, entonces por el teorema de Pitágoras (ver el Teorema 13 del apéndice) tenemos que

$$n^2 + 2009 = m^2,$$

de donde es fácil ver que

$$2009 = (m+n)\,(m-n).$$

Observamos que ambos factores deben ser impares ya que su producto también lo es. Como $2009 = 7^2 \cdot 41$ sólo hay 3 posibilidades para estos factores, cada una de estas posibilidades genera una solución

- $m+n = 287$ y $m-n = 7$; de donde $m = 147$ y $n = 140$,
- $m+n = 49$ y $m-n = 41$; de donde $m = 45$ y $n = 4$,
- $m+n = 2009$ y $m-n = 1$; de donde $m = 1005$ y $n = 1004$.

Solución del problema 2.

1. El área de los dos triángulos iguales es $\frac{x}{2}$ (ver el Teorema 6 del apéndice). Luego, el área del rombo es $1-2(\frac{x}{2})=1-x$. Como las tres áreas son iguales, tenemos que $1-x=\frac{x}{2}$, de donde $x=\frac{2}{3}$.

2. El área de los dos triángulos iguales es $\frac{x}{2}$, y el área del triángulo sombreado es $\frac{(1-x)^2}{2}$. Luego, el área del otro triángulo es

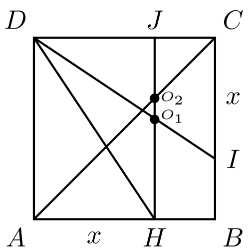
$$1-\frac{(1-x)^2}{2}-2\left(\frac{x}{2}\right)=1-\frac{(1-x)^2+2x}{2}=1-\frac{1+x^2}{2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{x}{2} &= 1-\frac{1+x^2}{2}\\ x^2+x-1 &= 0\\ x &= \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

Como $x>0$, concluimos que $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3. Supongamos que las rectas no son concurrentes. Llamemos O_1 a la intersección de HJ con DI y O_2 a la intersección de HJ con AC.



Como AD es paralela a HJ, los triángulos ACD y O_2CJ son semejantes (ver la definición 9 y el Teorema 10 del apéndice). Luego

$$\frac{1}{1-x}=\frac{DA}{JO_2},$$

es decir, $JO_2=1-x$. Por otro lado, los triángulos ICD y O_1JD son también semejantes. Luego

$$\frac{x}{1}=\frac{JO_1}{x},$$

o bien, $JO_1=x^2$. Como $x^2=1-x$, tenemos que O_1 y O_2 tienen que ser un mismo punto. Por lo tanto, las rectas AC, HJ y DI son concurrentes.

Solución del problema 3.

1. Observemos primero que si uno de los sumandos es igual a 1, la suma de los recíprocos va a ser mayor que 1. Esto implica que 2 y 3 no son buenos. Si nos fijamos en las sumas que no tienen al 1 como sumando tenemos que,

   - $4 = 2 + 2$ y $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, por lo que es bueno;
   - $5 = 2 + 3$, por lo que no es bueno;
   - $6 = 4 + 2 = 3 + 3 = 2 + 2 + 2$, por lo que no es bueno;
   - $7 = 5 + 2 = 4 + 3 = 2 + 2 + 3$, por lo que no es bueno;
   - $8 = 6+2 = 5+3 = 4+4 = 3+3+2 = 4+2+2 = 2+2+2+2$, por lo que no es bueno;
   - $9 = 3 + 3 + 3$ y $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, por lo que es bueno.

   Por lo tanto, los números naturales menores que 10 que son buenos son 4 y 9.

2. Tomemos un cuadrado perfecto, n^2. Entonces

$$n^2 = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{n-veces} \qquad \text{y} \qquad \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n-veces} = 1.$$

   Por lo tanto, n^2 es bueno.

3. Si n es un número bueno tenemos que existen números $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tales que

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_k &= n \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} &= 1. \end{aligned}$$

   Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_k + 2 &= 2n + 2 \\ \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= 1; \end{aligned}$$

   y

$$\begin{aligned} 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_k + 3 + 6 &= 2n + 9 \\ \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= 1. \end{aligned}$$

   Por lo que $2n + 2$ y $2n + 9$ son números buenos.

Solución del problema 4. Consideremos dos salones arbitrarios, digamos el salón X y el salón Y. Será suficiente demostrar que ambos salones tienen el mismo número de estudiantes. Procedamos por contradicción y supongamos, sin pérdida de generalidad, que el número de estudiantes de X es mayor que el de Y. Como cada estudiante de X

conoce exactamente a un estudiante de Y, tenemos que hay al menos dos estudiantes A y B de X que conocen al mismo estudiante C de Y, ya que X tiene más estudiantes que Y. Pero entonces el estudiante C de Y conoce al menos a dos estudiantes de X, lo que contradice la hipótesis del problema. Por lo tanto, X y Y tienen el mismo número de estudiantes.

Solución del problema 5. Como $p(x+y) = xy$, tenemos que p divide a xy, luego p divide a x ó p divide a y. Supongamos que p divide a x, es decir, $x = pa$ para cierto entero a. Entonces,

$$\begin{aligned} p(x+y) &= xy \\ p(pa+y) &= pay \\ pa+y &= ay \\ y(a-1) &= pa \\ y &= \frac{pa}{a-1}. \end{aligned}$$

Como y debe ser un número entero, entonces $\frac{pa}{a-1}$ debe ser entero, es decir, $a-1$ debe dividir a pa. Como a y $a-1$ son primos relativos (ver la definición 1 del apéndice), $a-1$ debe dividir a p, de donde $a-1 = \pm 1$ ó $a-1 = \pm p$.

- Si $a-1 = -1$, entonces $a = 0$, de donde $x = 0$ y $y = 0$.
- Si $a-1 = 1$, entonces $a = 2$, de donde $x = 2p$ y $y = 2p$.
- Si $a-1 = -p$, entonces $a = -p+1$, de donde $x = p(1-p)$ y $y = p-1$.
- Si $a-1 = p$, entonces $a = p+1$, de donde $x = p(p+1)$ y $y = p+1$.

Observemos que la ecuación es simétrica, luego las 6 parejas

$$(0,0); (2p,2p); (p(1-p), p-1); (p(p+1), p+1); (p-1, p(1-p)); (p+1, p(p+1)),$$

son todas las soluciones enteras de la ecuación.

Solución del problema 6. Representemos por 1 una lámpara encendida, por 0 una lámpara apagada y cada configuración de 0 y 1 corresponderá a un número escrito en base 2. Observemos que si en algún paso, el último dígito es 0, él será el único dígito alterado en el siguiente paso, es decir, el número aumentará en una unidad. Por ejemplo, supongamos que las lámparas representan al número $0\ldots010$, que corresponde en base 2 al número 2. Entonces, en el siguiente segundo el número será $0\ldots011$ que corresponde al 3 en base 2.
Ahora bien, supongamos que el número termina en un bloque de unos anticipado de un cero: $\ldots011\ldots11$. En el siguiente paso el número será $\ldots100\ldots00$, pero $(\ldots011\ldots11)+1 = \ldots100\ldots00$. Por lo tanto, en cualquier caso el número k es sucedido por el número $k+1$.

1. Observemos que el mayor número de n dígitos escrito en base 2, es aquel que tiene los n dígitos iguales a 1. Por lo tanto, en algún momento todas las lámparas estarán encendidas.

2. Observemos que en base 2, hay 2^n números de a lo más n dígitos. Luego, iniciando en 0 debemos llegar a $2^n - 1$, pasando por todos los enteros positivos intermedios. Por lo tanto, después de $2^n - 1$ segundos todas las lámparas estarán encendidas.

3. Si $n = 11$ y al inicio sólo las lámparas 6, 9 y 10 están encendidas, entonces la configuración inicial es 00000100110 que representa al número $2^5+2^2+2 = 38$. Luego, después de $(2^{11} - 1) - 38 = 2009$ segundos todas las lámparas estarán encendidas.

Solución del problema 7. Como tiene que haber por lo menos dos líneas, supongamos que por lo menos hay 4 paradas de autobús y denotemos por $R_x = abc$ a la línea de autobús que pasa por las paradas a, b y c, sin importar el orden, es decir, $R_x = abc = R_y = bca$ es la misma línea de autobús.
Ahora bien, supongamos que hay por lo menos 4 paradas: 1, 2, 3 y 4 y que $R_1 = 123$ es una de las líneas. Como para cada dos paradas de autobús distintas debe existir una línea de autobús que pase por ambas, tenemos que deben existir las líneas R_2, R_3 y R_4, que pasan por las paradas $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$ y $\{3, 4\}$, respectivamente. Consideremos, por ejemplo, que las paradas 2, 3 y 4 están en la misma línea de autobús R_2, es decir, $R_2 = 234$. Luego, R_1 y R_2 tienen dos paradas en común, lo cual es imposible. Además como cada una de las líneas R_2, R_3 y R_4 tienen exactamente una parada en común con $R_1 = 123$, tenemos que $R_2 = 14a$, $R_3 = 24b$ y $R_4 = 34c$, para a, b y c distintos entre sí y distintos a $1, 2, 3$ y 4.
Para mantener la notación, sean $a = 5$, $b = 6$ y $c = 7$, luego $R_2 = 145$, $R_3 = 246$ y $R_4 = 347$. Por lo tanto, hay por lo menos 7 paradas. Ahora supongamos que existe por lo menos una parada más, digamos la 8. Como para cada dos paradas de autobús distintas, existe una línea que pasa por ambas, tenemos que existe una línea R_s que pasa por las paradas 1 y 8. Como R_s tiene una parada común con $R_3 = 246$, entonces $R_s = 128$, $R_s = 148$ ó $R_s = 168$. Veamos que ninguno de los casos es posible.

- Si $R_s = 128$, entonces $R_s = 128$ y $R_1 = 123$ tienen dos paradas en común;
- si $R_s = 148$, entonces $R_s = 148$ y $R_2 = 145$ tienen dos paradas en común;
- si $R_s = 168$, entonces $R_s = 168$ y $R_4 = 347$ no tienen parada en común, contrario a la condición (2) del problema.

Por lo tanto, el número de paradas de autobús no puede ser menor que 7 ni mayor que 7. Ahora completemos la construcción del sistema de transporte para ver que efectivamente existe una solución con 7 paradas de autobús. Observemos que deben existir líneas R_5, R_6 y R_7 que pasen por las paradas $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$ y $\{3, 5\}$, respectivamente, luego las otras líneas son $R_5 = 167$, $R_6 = 257$ y $R_7 = 356$.
Por lo tanto, las 7 líneas $R_1 = 123$, $R_2 = 145$, $R_3 = 246$ $R_4 = 347$, $R_5 = 167$, $R_6 = 257$ y $R_7 = 356$, son un ejemplo del sistema de transporte que pasa por exactamente 7 paradas y cumple las condiciones del problema.

Solución del problema 8. Analicemos primero cómo se alteran cada uno de los números del tablero, dependiendo del subtablero de 2×2 que se escoja cada vez que se aplica una operación. Para ello, denotemos por a, b, c, d, e, f, g, h, i a cada casilla.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Los números de cada una las casillas a, c, g, i, sólo son alterados cuando se selecciona el subtablero de 2×2 que los contiene, luego esos números indican el número de veces que la operación permitida fue utilizada en ese subtablero.
Los números de cada una las casillas b, d, f, h son afectados por dos subtableros de 2×2 diferentes. Luego, el valor de cada una de estas casillas es igual a la suma de los valores de las casillas adyacentes, es decir,

$$\begin{aligned} b &= a + c, \\ d &= a + g, \\ f &= c + i, \\ h &= g + i. \end{aligned}$$

El número de la casilla e es afectado por todos los subtableros que se elijan, luego su valor corresponde al número de operaciones que se aplicaron al tablero, es decir, $e = a + c + g + i$.

1. Vemos que todos los números del tablero, excepto el de la casilla central, cumplen lo mencionado anteriormente. Pero como $25 \neq 7 + 2 + 8 + 10$, no se puede obtener dicho tablero.

2. Observemos que $g = 5$ y $f = 17$. De aquí que, $i = 9$, $c = 8$ y $b = 22$.

14	22	8
19	36	17
5	14	9

Solución del problema 9. Denotemos por n el número de filas del salón y por m el número de lugares en cada fila. Luego, en total hay mn concursantes sentados. Veamos cuántos apretones de manos da cada concursante según el lugar que ocupa dentro del salón.

1. Las personas que están sentadas en cada esquina del salón, sólo saludan a tres compañeros. Como son cuatro personas, hay 12 saludos.

2. Cada una de las personas que está sentada en la primera fila y en la última, y que no está en las esquinas, saluda a 5 compañeros. Lo mismo sucede con las personas que están sentadas en la primera y última columna. Ahora bien, como hay $2[(n-2)+(m-2)]$ personas en estos lugares, tenemos $10[(n-2)+(m-2)]$ apretones de manos.

3. Cada una de las personas que está sentada en el interior del salón, es decir, que no está en ninguna fila o columna de la orilla, saluda a 8 personas. Como en total hay $(m-2)(n-2)$ personas en estos lugares, tenemos $8[(n-2)(m-2)]$ saludos.

Entonces, como estamos contando dos veces cada apretón de mano, tenemos que

$$\begin{aligned} 12+10[(n-2)+(m-2)]+8[(n-2)(m-2)] &= 2040 \\ 12+10[n+m-4]+8[nm-2n-2m+4] &= 2040 \\ 8nm-6n-6m &= 2036 \\ 4nm-3n-3m &= 1018 \\ n(4m-3) &= 3m+1018. \end{aligned}$$

Entonces, $3m+1018 \equiv 0 \pmod{4m-3}$ (ver la definción 3 del apéndice), de donde

$$\begin{aligned} 12m+4072 &\equiv 0 \pmod{4m-3} \\ 3(4m-3)+4081 &\equiv 0 \pmod{4m-3} \\ 4081 &\equiv 0 \pmod{4m-3} \end{aligned}$$

Luego, 4081 debe ser divisor de $4m-3$. Como $4081 = 7 \times 11 \times 53$, tenemos que los valores posibles de $4m-3$ son $1, 7, 11, 53, 77, 371, 583$ y 4081. Analizando cada caso, vemos que los únicos dos valores posibles para m y n son, $m = 14$ y $n = 20$ o viceversa. Por lo tanto, hay $mn = 14 \cdot 20 = 280$ concursantes.

Solución del problema 10. Sean a, b, c, d, e los dígitos que escogió Carlos y h, i, j, k, l los dígitos restantes. Podemos escribir los números de Carlos y Sofía como

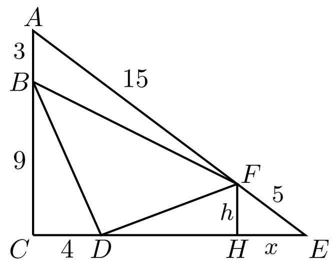
$$e + 10d + 10^2c + 10^3b + 10^4a \qquad \text{y} \qquad l + 10k + 10^2j + 10^3i + 10^4h.$$

Sea N la suma de los dos números. Entonces

$$\begin{aligned} N &= e+l+10(d+k)+10^2(c+j)+10^3(b+i)+10^4(a+h) \\ &= l+k+j+i+h+e+d+c+b+a+ \\ &+ 9(d+k)+99(c+j)+999(b+i)+9999(a+h) \\ &= 45+9(d+k)+99(c+j)+999(b+i)+9999(a+h), \end{aligned}$$

ya que $a+b+c+d+e+h+i+j+k+l = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+0 = 45$. Esto implica que N sea divisible entre 9. Sin embargo, el número $122,222$ no es divisible entre 9. Por lo tanto, no es posible que la suma de los números de Carlos y Sofía sea igual a $122, 222$.

Solución del problema 11. Tracemos la perpendicular a CE por F y llamemos h a su longitud y x a la distancia entre el pie de la perpendicular H y el punto E.



Denotemos por (BDF) al área de BDF. Tenemos que

$$(BDF) = (ACE) - (BCD) - (DEF) - (ABF).$$

Como ACE y BCD son triángulos rectángulos, tenemos que $(ACE) = \frac{16(12)}{2} = 96$ y $(BCD) = \frac{4(9)}{2} = 18$. Además, $(DEF) = 6h$ y $(ABF) = \frac{3(16-x)}{2}$.
Observemos que FH es paralela a AC, por lo que los triángulos ACE y FHE son semejantes (ver la definición 9 y el Teorema 10 del apéndice). Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{5}{h} &= \frac{AE}{AC} = \frac{20}{12} \\ \frac{5}{x} &= \frac{AE}{CE} = \frac{20}{16}, \end{aligned}$$

de donde, $h = 3$ y $x = 4$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (BDF) &= 96 - 18 - 6(3) - \frac{3(16-4)}{2} \\ &= 42, \end{aligned}$$

y $\frac{(BDF)}{(ACE)} = \frac{42}{96} = \frac{7}{16}$.

Solución del problema 12. Si $m < n$, entonces el lado derecho de la ecuación no es un entero. Luego, $m \geq n$. Sea d el máximo común divisor de m y n (ver la definición 2 del apéndice). Entonces $m = du$ y $n = dv$ con u y v enteros positivos y primos relativos (ver la definición 1 del apéndice). Como $m \geq n$, tenemos que $u \geq v$. Luego,

$$\begin{aligned} m^n &= n^{m-n} \\ (du)^{dv} &= (dv)^{d(u-v)} \\ (du)^v &= (dv)^{u-v}. \end{aligned}$$

Como $u \geq v$, tenemos que $du \geq dv$. Luego, si $v > u - v$ tendríamos que $(du)^v > (dv)^{u-v}$. Por lo tanto, $v \leq u - v$. De aquí que podemos dividir la última ecuación entre d^v y obtenemos

$$u^v = d^{u-2v} v^{u-v}.$$

De aquí se sigue que v divide a u^v, pero como u y v son primos relativos, la única posibilidad es que $v = 1$. Por lo tanto, la ecuación se simplifica a

$$u = d^{u-2}.$$

Si $u = 1$, entonces $d = 1$, $m = 1$ y $n = 1$. Si $u = 2$, entonces $2 = d^0 = 1$ que es un absurdo. Si $u = 3$, entonces $d = 3$, $m = 9$ y $n = 3$. Si $u = 4$, entonces $4 = d^2$ de donde $d = 2$, $m = 8$ y $n = 2$. Si $d > 4$, entonces $u > 4$ y $u = d^{u-2} > 4^{u-2}$, pero $4^{u-2} > u$ si $u \geq 3$. Luego, no hay soluciones si $d > 4$. Por lo tanto, las soluciones (m, n) son $(1, 1)$, $(8, 2)$ y $(9, 3)$.

Solución del problema 13. Primero consideremos a todos los números que empiezan con el dígito 9. En total hay $8!$ de estos números, esto porque se pueden elegir 8 dígitos para el segundo lugar (contado de izquierda a derecha), 7 para el tercer lugar, 6 para el cuarto, etc. Ahora, en la suma que estamos calculando, cada dígito 9 de estos números contribuye con $9 \cdot 10^8$, por lo que en la suma, el total de los dígitos 9 que están en la primera posición contribuye con $\left(9 \cdot 10^8\right) 8!$.
Análogamente, los dígitos 9 que están en la segunda posición contribuyen con $(9 \cdot 10^7)8!$, los que están en la tercera posición con $\left(9 \cdot 10^6\right) 8!$, etc. Siguiendo este razonamiento se concluye que la contribución total de los dígitos 9 a la suma es de

$$9\,(8!)\left(10^8 + 10^7 + \cdots + 10 + 1\right).$$

El razonamiento anterior puede reproducirse para calcular la contribución de los otros dígitos, de esta forma los dígitos 8 contribuyen con $8\,(8!)\left(10^8 + 10^7 + \cdots + 10 + 1\right)$, los dígitos 7 con $7\,(8!)\left(10^8 + 10^7 + \cdots + 10 + 1\right)$, etc.
Con base en lo anterior, es fácil ver que la suma buscada es

$$8!\,(9 + 8 + \cdots + 2 + 1)\left(10^8 + 10^7 + \cdots + 10 + 1\right) = 8!\,(45)\,(111, 111, 111)\,.$$

Solución del problema 14. Supongamos que el primer cuadrado perfecto de la sucesión es a^2 y que la diferencia común es r. Entonces la sucesión, a partir de a^2 puede verse como

$$\ldots,\ a^2,\ a^2 + r,\ a^2 + 2r,\ a^2 + 3r,\ \ldots$$

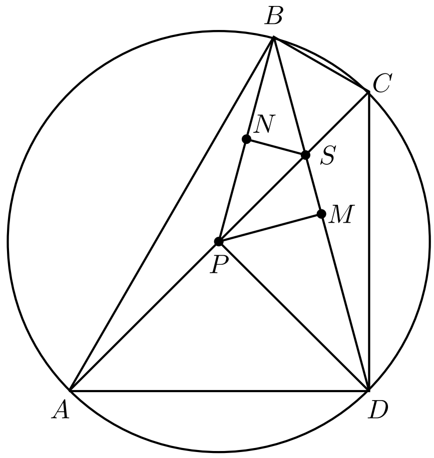
Es claro que eventualmente se llega al término

$$a^2 + (2a + r)\,r = (a + r)^2$$

Una vez que a partir del primer término cuadrado de la sucesión hemos podido encontrar uno mayor que él, este procedimiento puede repetirse infinitas veces. De esta forma podemos concluir que la sucesión contiene una infinidad de cuadrados perfectos, a saber

$$a^2,\ (a+r)^2,\ (a+2r)^2,\ (a+3r)^2,\ \ldots$$

Solución del problema 15. Como $\angle DAB + \angle BCD = 180°$, el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico (ver la definición 16 y el Teorema 17 del apéndice), y como $\angle ABC = 90°$ tenemos que AC es diámetro de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero (ver Teorema 15 del apéndice). Luego, P es el centro de dicha circunferencia, y como BD es una cuerda perpendicular al radio que pasa por M, tenemos M es punto medio de BD (ver Teorema 18 del apéndice).



Como $\angle DAB = 60°$, tenemos que $\angle DPB = 120°$ ya que abren el mismo arco. El triángulo BDP es isósceles, luego PM es bisectriz y $\angle MPB = 60°$ (ver la definición 7 del apéndice). Fijándonos en la suma de los ángulos internos de los triángulos BMP y BSN, tenemos que $\angle PBM = 30°$ y $\angle BSN = 60°$. Entonces, el triángulo BSN es la mitad de un triángulo equilátero de lado BS, es decir, $SN = \frac{BS}{2}$.
Denotemos por x a la longitud de BS. Entonces, $SD = 2x$ y $DM = \frac{DB}{2} = \frac{3x}{2}$.
Luego, $SM = DS - DM = 2x - \frac{3x}{2} = \frac{x}{2} = SN$.
Ahora, como $SN = SM$, tenemos que PS es bisectriz del ángulo $\angle MPB$. Por lo tanto, $30° = \angle MPS = \angle SPB = \angle CPB$. Entonces $\angle CAB = 15°$. De aquí que $\angle CAD = 45°$. Además, $\angle ADC = 90°$, pues AC es diámetro. Por lo tanto, el triángulo ADC es rectángulo e isósceles con $AD = DC$.

Solución del problema 16. Sea n un número entero que no es múltiplo de 2 ni de 5. Queremos mostrar que n tiene un múltiplo que se escribe con puros dígitos 1. Consideremos los primeros $n+1$ números que están formados sólo con el dígito 1, es decir

$$1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ \ldots,\ \underbrace{11\ldots1}_{n+1}.$$

Como al dividir entre n sólo hay n residuos posibles, al menos dos de estos números deben ser congruentes módulo n (ver la definición 3 del apéndice), es decir, al divirse entre n dejan el mismo residuo y su diferencia es un múltiplo de n. Supongamos que estos dos números son el i-ésimo y j-ésimo ($i < j$). Su diferencia es igual a

$$\underbrace{11\ldots1}_{j-i}\underbrace{00\ldots0}_{i}.$$

Como n divide a este número y además es primo relativo con 10, entonces n debe dividir a $\underbrace{11\ldots1}_{j-i}$.

Solución del problema 17.

1. Queremos encontrar una descomposición del número 2009 en la forma

$$2009 = 1111a + 111b + 11c,$$

donde a, b y c son enteros mayores o iguales que cero y menores o iguales que $1+2+\cdots+9 = 45$, pues los sumandos de la descomposición deben ser distintos, y se puede factorizar en un solo sumando a todos los números que tienen cuatro dígitos, en un solo sumando a todos los que tienen tres dígitos, y en un solo sumando a todos los que tienen dos dígitos. Como $2009 = 11(182)+7$, tenemos que

$$11(182) + 7 = 11(101a + 10b + c) + b,$$

de donde $182 = 101a + 10b + c + \frac{b-7}{11}$. Luego, 11 debe dividir a $b - 7$, es decir, $b = 11k+7$ para algún entero k con $0 \leq k \leq 3$, pues $0 \leq b \leq 45$. Sustituyendo, tenemos que

$$\begin{aligned} 182 &= 101a + 110k + 70 + c + k \\ 112 &= 101a + 111k + c. \end{aligned}$$

Es claro que $a < 2$, pues de lo contrario $111k + c = 112 - 101a < 0$ lo cual no es posible ya que $k \geq 0$ y $c \geq 0$. Por lo tanto, los valores posibles de a son 1 y 0.

Si $a = 1$, entonces $k = 0$ y $c = 11$. Luego, $b = 7$ y

$$\begin{aligned} 2009 &= 1111 + 777 + 121 \\ &= 1111 + 777 + 66 + 55, \end{aligned}$$

donde $c = 11$ se escribió como $6 + 5$.

Si $a = 0$, entonces $k = 1$ y $c = 1$. Luego, $b = 18$ que si lo escribimos como $18 = 9 + 6 + 3$, tenemos que

$$2009 = 999 + 666 + 333 + 11.$$

2. Analizando las soluciones con $a = 1$ y $a = 0$, vemos que no es posible obtener una descomposición para 2009 con menos de 4 sumandos. En el primer caso, tenemos que $a = 1$, $b = 7$ y 11. Como queremos encontrar todas las sumas con cuatro sumandos, tenemos que encontrar todas las formas de escribir a 11 como

suma de dos enteros positivos. Éstas son $c = 11 = 9+2 = 8+3 = 7+4 = 6+5$. Luego, hay 4 formas de expresar a 2009 en este caso.

En el segundo caso, tenemos que $a = 0$, $b = 18$ y $c = 1$. Entonces, debemos contar el número de formas de expresar a 18 como suma de tres enteros positivos. Claramente,

$$18 = 9+8+1 = 9+7+2 = 9+6+3 = 9+5+4 = 8+7+3 = 8+6+4 = 7+6+5,$$

por lo que hay 7 formas de expresar a 2009 en este caso.
Por lo tanto, en total hay 11 posibilidades.

Solución del problema 18. Consideremos el punto que tiene el mayor número de conexiones con puntos de otro color. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que este punto N es de color negro y que está conectado a k puntos de color blanco. Como $k \leq n$ y N está conectado a $n+1$ puntos, debe existir un punto A de color azul al que está conectado N. Ahora, el número de puntos negros con los que está conectado A es necesariamente menor o igual que k (pues N tiene el mayor número k de conexiones con puntos de otro color), por lo que A está conectado con por lo menos $n + 1 - k$ puntos blancos. Como sólo hay n puntos de color blanco y el número de puntos conectados con N más el número de puntos conectados con A suman por lo menos $n+1$, necesariamente hay un punto blanco conectado a ambos, con lo que ya tenemos el triángulo buscado.

Solución del problema 19. Supongamos que sí existen tales enteros. Como queremos que el número $(a^4+1)(b^2+1)$ sea divisible entre 39 y $39 = 3 \cdot 13$, tenemos que alguno de los números $a^4 + 1$ ó $b^2 + 1$ debe ser múltiplo de 3. Además, ya que los enteros a y b son congruentes con 0, 1 ó 2 módulo 3, tenemos que $a^4 \equiv 0$ ó $1 \pmod 3$ y $b^2 \equiv 0$ ó $1 \pmod 3$. Luego, $a^4 + 1 \equiv 1$ ó $2 \pmod 3$ y $b^2 + 1 \equiv 1$ ó $2 \pmod 3$. Por lo tanto, ninguno de los dos números $a^4 + 1$ y $b^2 + 1$ es divisible entre 3, y en consecuencia $(a^4 + 1)(b^2 + 1)$ tampoco es divisible entre 3, lo que es una contradicción. Luego, no existen tales enteros.

Solución del problema 20. Tenemos tres casos por considerar: que los dos ángulos iguales estén en el mismo vértice, que estén en vértices opuestos pero del mismo lado de la diagonal, y que estén en vértices opuestos y en lados opuestos de la diagonal. Este último caso se puede descartar debido a que el cuadrilátero no tiene lados paralelos (ver la definición 14 del apéndice).

1. En el primer caso, supongamos que los ángulos iguales están en el mismo vértice, el vértice C. Dibujemos el excírculo del triángulo BCD opuesto al vértice C y llamemos E a su centro. Sean P y Q los puntos de tangencia en las prolongaciones de los lados BC y CD, respectivamente. Como E está en la bisectriz del ángulo BCD y A también, tenemos que A, E y C son colineales. Por otra parte, tenemos que $\angle PBE = \angle EBD$ y $\angle QDE = \angle EDB$. Luego, $\angle BEC = \angle PBE - 55°$ y $\angle DEC = \angle QDE - 55°$. De aquí que la suma de los ángulos del triángulo BED es

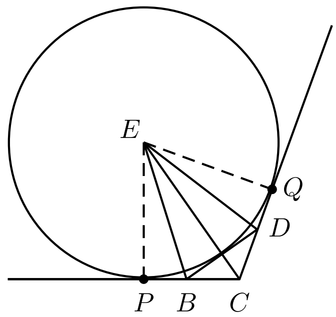
$$\angle BEC + \angle DEC + \angle EBD + \angle EDB = 2\angle EBD + 2\angle EDB - 110° = 180°.$$

Luego, $\angle EBD + \angle EDB = 145^\circ$, de donde $\angle BED = 35^\circ$. Pero $\angle BAD = 16^\circ + 19^\circ = 35^\circ$ y los puntos A, E y C están en la misma recta. Por lo tanto, el vértice A coincide con el punto E.

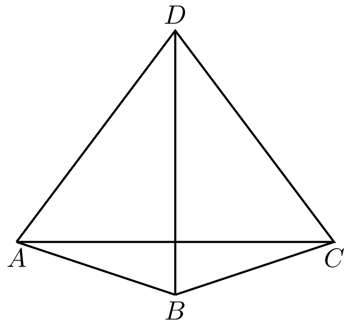
Supongamos que $\angle DAC = 16^\circ$. Entonces,

$$\angle ADB = \angle QDA = 55^\circ + 16^\circ = 71^\circ,$$

por ser ángulo externo del triángulo ACD (ver la definición 11 del apéndice). Por lo tanto, el ángulo agudo entre AC y BD es $71^\circ + 16^\circ = 87^\circ$. Análogamente, si $\angle DAC = 19^\circ$, entonces $\angle ADB = \angle QDA = 55^\circ + 19^\circ = 74^\circ$, y el ángulo agudo entre AC y BD es $180^\circ - 19^\circ - 74^\circ = 87^\circ$.



2. En el segundo caso, supongamos que los dos ángulos de 55° están en vértices opuestos pero del mismo lado, es decir, $\angle DAC = \angle DCA = 55^\circ$, $\angle BAC = 16^\circ$ y $\angle BCA = 19^\circ$.



Entonces $\angle ABC = 180^\circ - 16^\circ - 19^\circ = 145^\circ$ y $AD = DC$ ya que el triángulo ADC es isósceles. Si $DB < AD = DC$, entonces $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC > \angle BAD + \angle BCD = 145^\circ$, lo cual es un absurdo. Ahora, si $DB > AD = DC$, entonces $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC < \angle BAD + \angle BCD = 145^\circ$, que también es un absurdo. Luego, $DB = AD = DC$ de donde $\angle ABD = 55^\circ + 16^\circ = 71^\circ$. Por lo tanto, el ángulo agudo entre AC y BD es $71^\circ + 16^\circ = 87^\circ$. El caso en que $\angle BAC = 19^\circ$ y $\angle BCA = 16^\circ$ es análogo.

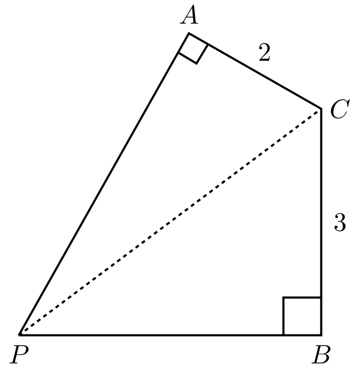
Por lo tanto, el único valor posible para el ángulo agudo entre AC y BD es 87°.

Problemas propuestos

Tzaloa es tu revista y no podrá estar completa sin ti. En esta sección te proponemos 5 nuevos problemas que necesitan de tu participación y ayuda para encontrar sus soluciones. Asimismo, en este número presentamos las soluciones de los problemas propuestos del número anterior.
A partir de este número, las soluciones de los problemas propuestos se publicarán dos números después con el objetivo de dar más tiempo para resolverlos.
Recuerda que nuestra dirección electrónica es `revistaomm@gmail.com` y a través de ella estaremos recibiendo todas las contribuciones que nos lleguen desde todos los rincones del país. No dudes en enviarnos tus soluciones y problemas que desees que se publiquen en esta sección.

Problemas propuestos.
Año 2009 No. 3.

Problema 1. (Principiante) Si $CA = 2$, $CB = 3$, $\angle CAP = 90°$, $\angle PBC = 90°$ y $\angle APB = 60°$, ¿cuánto mide PC?



Problema 2. (Intermedio) Demuestra que la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n} ix_i \leq \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_i^i$$

se cumple para todo entero $n \geq 2$ y todos los números reales no negativos $x_1, \ldots, x_n$.

Problema 3. (Intermedio) En un paralelogramo están marcados el centro y los puntos medios de los lados. Considera todos los triángulos cuyos vértices están en estos puntos marcados. Ahora, en cada triángulo marca los puntos medios de los lados y los puntos medios de la medianas. ¿Cuántos puntos marcados habrá en total?

Problema 4. (Avanzado) Con un plano, ¿cuál es el máximo número de caras de un cubo, un octaedro y un dodecaedro que puedes cortar?

Problema 5. (Avanzado) Determina el número de enteros $n > 1$ que cumplen que $a^{13} - a$ es divisible entre n para todo entero a.

Soluciones a los problemas propuestos. Año 2009 No. 2.

Problema 1. (Principiante) Considera 50 puntos en el plano tales que no hay tres colineales. Cada uno de estos puntos se pinta usando uno de cuatro colores disponibles. Demuestra que hay al menos 130 triángulos escalenos cuyos vértices están pintados del mismo color.

Solución. Ya que $50 = 4(12) + 2$, entonces por el principio de las casillas (ver el criterio 5 del apéndice) hay al menos 13 puntos pintados del mismo color. Usando estos 13 puntos, se pueden construir $\binom{13}{3} = \frac{13!}{10!\cdot 3!} = 286$ triángulos distintos (ver la definición 4 del apéndice), ya que no hay tres puntos que sean colineales. Además, tenemos $\binom{13}{2} = \frac{13!}{11!\cdot 2!} = 78$ segmentos de recta que son lados de los 286 triángulos. Si consideramos uno de estos segmentos, digamos l, hay 11 puntos más que están pintados del mismo color que los extremos del segmento l. Un triángulo isósceles que tiene a l como lado desigual, tiene su tercer vértice en la mediatriz de l (ver la definición 8 del apéndice). Luego, como no hay tres puntos que sean colineales, hay a lo más dos de estos triángulos. Por lo tanto, hay a lo más $2 \cdot 78 = 156$ triángulos isósceles cuyos vértices están pintados del mismo color, y al menos $286 - 156 = 130$ triángulos escalenos cuyos vértices están pintados del mismo color.

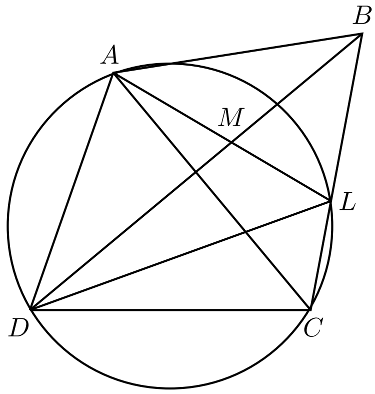
Problema 2. (Intermedio) Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $AB = AD$ y $CB = CD$. Si la bisectriz del ángulo BDC corta a BC en L, AL corta a BD en M y $BL = BM$, determina el valor de $2\angle A + 3\angle C$.

Solución. Como $AB = AD$ y $CB = CD$, tenemos que AC y BD son perpendiculares, pues los triángulos ABD y BCD son isósceles y el punto medio de BD es el pie de las alturas trazadas desde A y desde C. Sean $\alpha = \angle BDL$ y $\beta = \angle ALB$.

Como DL es bisectriz del ángulo $\angle BDC$, tenemos que $\angle BDC = 2\alpha$, y como el triángulo BCD es isósceles con $CB = CD$, tenemos que $\angle DBL = 2\alpha$. Como el triángulo LBM es isósceles con $BL = BM$, tenemos que $\angle BML = \beta$. Además, $\angle DLC = \angle BDL + \angle DBL = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$ por ser ángulo exterior del triángulo BDL. Por otro lado, $\beta = \angle BML = \angle DLA + \alpha$ ya que $\angle BML$ es un ángulo exterior del triángulo LMD. Luego, $\angle DLA = \beta - \alpha$. Por lo tanto,

$$180^\circ = \angle ALB + \angle DLA + \angle DLC = \beta + (\beta - \alpha) + 3\alpha = 2(\beta + \alpha),$$

de donde se sigue que $\alpha + \beta = 90^\circ$. Pero ya que $\angle AMD = \angle BML = \beta$ por ser opuestos por el vértice, y AC y BD son perpendiculares, tenemos que $\angle LAC = \alpha$. Luego, $\angle LAC = \angle LDC = \alpha$ y así el cuadrilátero $ALCD$ es cíclico.



Luego, $\angle DAC = \angle DLC = 3\alpha$ y $\angle DCA = \angle DLA = \beta - \alpha$. Como el triángulo BAD es isósceles y AC es perpendicular a BD, tenemos que $\angle BAC = \angle DAC = 3\alpha$, de donde $\angle A = 6\alpha$. Análogamente, como el triángulo BCD es isósceles, tenemos que $\angle BCA = \angle DCA = \beta - \alpha$, de donde $\angle C = 2(\beta - \alpha)$. Por lo tanto, $2\angle A + 3\angle C = 12\alpha + 6(\beta - \alpha) = 6(\alpha + \beta) = 6(90^\circ) = 540^\circ$.

Problema 3. (Intermedio) Demuestra que para cada entero positivo n existe un entero positivo k tal que la suma de los dígitos de k es n y la suma de los dígitos de k^2 es n^2.

Solución. Sea n un entero positivo y sea $s(n)$ la suma de los dígitos de n. Definimos

$$k(n) = \sum_{i=0}^{n-1} 10^{2^i - 1}.$$

Claramente, $s(k(n)) = n$ ya que cada uno de los n sumandos de $k(n)$ son distintos y cada sumando aporta un dígito 1.
Demostraremos que $s((k(n))^2) = n^2$.

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
(k(n))^2 &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} 10^{2^i-1}\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} 10^{2^j-1}\right)\\
&= \sum_{0\le i,j\le n-1} 10^{2^i-1}\cdot 10^{2^j-1}\\
&= \sum_{i=j=0}^{n-1} 10^{2^i-1}\cdot 10^{2^j-1} + \sum_{0\le i<j\le n-1} 10^{2^i-1}\cdot 10^{2^j-1} +\\
&\quad + \sum_{0\le j<i\le n-1} 10^{2^i-1}\cdot 10^{2^j-1}\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(10^{2^i-1})^2 + 2\left(\sum_{0\le i<j\le n-1} 10^{2^i-1}\cdot 10^{2^j-1}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} 10^{2^{i+1}-2} + \sum_{0\le i<j\le n-1} 2\cdot 10^{2^i+2^j-2}.
\end{aligned}
$$

En la última igualdad, la primera suma tiene n dígitos 1, y la segunda suma tiene $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ dígitos 2 (ver la definición 4 del apéndice). Como $j > i$, tenemos que $2^i + 2^j - 2 > 2^i + 2^i - 2 = 2^{i+1} - 2$, y por lo tanto, al sumar los resultados de las dos sumas, los dígitos del número que se obtiene son precisamente los dígitos de cada una de las dos sumas. Por lo tanto

$$s((k(n))^2) = n + 2\binom{n}{2} = n + n(n-1) = n + n^2 - n = n^2,$$

como queríamos.

Problema 4. (Intermedio) Determina todas las parejas de enteros positivos (a, b) tales que los números $a^2 - 4b$ y $b^2 - 4a$ sean cuadrados perfectos.

Solución. Si $a^2 - 4b$ y $b^2 - 4a$ son cuadrados perfectos, entonces $a^2 - 4b \ge 0$ y $b^2 - 4a \ge 0$, de donde $4a \le b^2 \le \frac{a^4}{16}$ y por lo tanto $a \ge 4$. De manera análoga se tiene que $b \ge 4$. Si $a = 4$, entonces $16 \le b^2 \le \frac{4^4}{16} = 16$, de donde $b = 4$.
Supongamos que $a = b$. De la ecuación $a^2 - 4a = x^2$ tenemos que $(a-2)^2 - x^2 = 4$, la cual se puede escribir en la forma $(a-2-x)(a-2+x) = 4$. Como los dos factores del lado izquierdo de esta ecuación tienen la misma paridad, es decir, son ambos pares o ambos impares, y el número $a-2+x$ es positivo, tenemos que $a-2-x = a-2+x = 2$ y de aquí obtenemos que $a = 4$. Por lo tanto, si $a = b$, entonces $a = b = 4$.
Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a > b \ge 5$. Entonces tenemos que

$$x^2 = a^2 - 4b > a^2 - 4a = (a-3)^2 + 2a - 9 > (a-3)^2 + 2(5) - 9 > (a-3)^2,$$

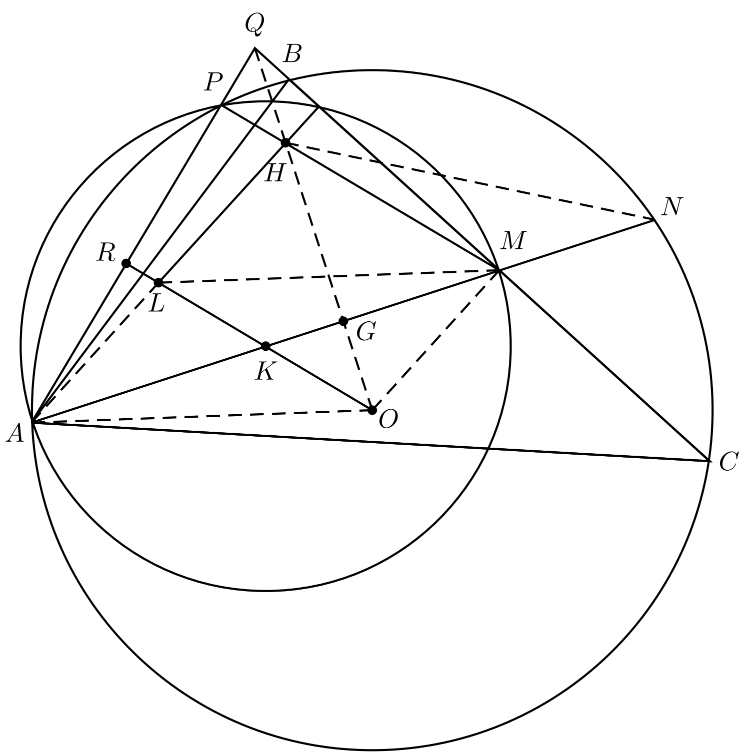
y en consecuencia $a^2 > x^2 > (a-3)^2$. Luego, $x^2 = (a-2)^2$ ó $x^2 = (a-1)^2$.
Si $x^2 = (a-2)^2$, entonces $a^2 - 4b = (a-2)^2$ y por lo tanto $b = a - 1$. Se sigue que

$$y^2 = b^2 - 4a = (a-1)^2 - 4a = a^2 - 6a + 1 = (a-3)^2 - 8,$$

y así $(a-3-y)(a-3+y)=8$. Como los dos factores del lado izquierdo de esta ecuación tienen la misma paridad, uno de ellos es 4 y el otro es 2. En ambos casos, se obtiene que $a=6$ y $b=5$.
Consideremos ahora el caso $x^2=(a-1)^2$. Tenemos que $a^2-4b=(a-1)^2$, de donde se sigue que $4b=2a-1$. Pero esto no es posible, pues $4b$ es par y $2a-1$ es impar.
Por lo tanto, las parejas (a,b) son $(4,4)$, $(5,6)$ y $(6,5)$.

Problema 5. (Avanzado) Sean H y O, respectivamente, el ortocentro y el circuncentro del triángulo acutángulo ABC con $AB\neq AC$. Sea Γ la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. La prolongación de la mediana AM del triángulo ABC, corta a Γ en el punto N y la circunferencia de diámetro AM corta a Γ en los puntos A y P. Demuestra que las rectas AP, BC y OH son concurrentes si y sólo si $AH=HN$.

Solución. Primero demostraremos que P, H y M son colineales.
Sea L el punto medio de AH y sea K el punto de intersección de LO y AM.



Es un resultado conocido que $AH=2OM$ (ver por ejemplo, capítulo 2 de [2]). Luego,

$AL = OM$ y como AL y OM son perpendiculares a BC, se sigue que $ALMO$ es un paralelogramo. De aquí que K es el punto medio de AM. Luego, K es el centro de la circunferencia de diámetro AM. Por otro lado, AP es la cuerda común de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC y de la circunferencia de diámetro AM. Entonces, OK es perpendicular a AP en su punto medio, al que llamaremos R. Como LK es paralela a HM (por ser L y K puntos medios de AH y AM), PH es paralela a RL (por ser R y L puntos medios de AP y AH) y los puntos R, L y K son colineales, tenemos que P, H y M son colineales.
Sea Q el punto de intersección de AP con BC. Como P está en la circunferencia de diámetro AM, tenemos que MP y AQ son perpendiculares. También tenemos que AH es perpendicular a QM. Luego, H es el ortocentro del triángulo AQM, de modo que QH es perpendicular a AM. Por lo tanto, Q, H y O son colineales si y sólo si HO es perpendicular a AN.
Sea G el punto medio de AN. Claramente $AH = HN$ si y sólo si HG es perpendicular a la cuerda AN. Como $AB \neq AC$, el punto O no está en la recta AN. Luego, OG es perpendicular a AN. Por lo tanto, $AH = HN$ si y sólo si HO es perpendicular a AN.
De lo anterior concluimos que $AH = HN$ si y sólo si Q, H y O son colineales, es decir, si y sólo si AP, BC y OH son concurrentes.

Olimpiadas Internacionales

En esta sección estaremos publicando los exámenes de las diferentes olimpiadas internacionales en las que participa México año con año.

La XXI Olimpiada de la Cuenca del Pacífico se llevó a cabo en el mes de marzo de 2009. Este año México no participó en este concurso, debido a que la preselección mexicana no pudo ser reunida para la aplicación del examen en la fecha indicada por Corea, país organizador de dicho certamen. En su lugar, se pidió al comité de la olimpiada de Estados Unidos, el examen de la primera fase que aplican a nivel nacional. Dicho examen consta de dos niveles, el AMC 10 y el AMC 12, y en cada nivel los concursantes tienen 75 minutos para resolverlo. Los estudiantes mexicanos que en ese momento eran parte de la preselección para la olimpiada Centroamericana y del Caribe, presentaron el examen AMC 10, y los estudiantes que en ese momento eran parte de la preselección para las olimpiadas iberoamericana e internacional, presentaron el examen AMC 12. Las hojas de respuestas fueron enviadas al comité correspondiente para su calificación.

A continuación presentamos el examen de la XXI Olimpiada de la Cuenca del Pacífico, y los exámenes del concurso AMC (American Mathematics Competition) de este año.

XXI Olimpiada de la Cuenca del Pacífico

Problema 1. En un pizarrón están escritos algunos números reales positivos. Considera el siguiente procedimiento: *se elige uno de los números del pizarrón, digamos r. Luego se borra r y se escriben dos números reales positivos a y b tales que $2r^2 = ab$.* Si al inicio hay un solo número real positivo r en el pizarrón, y se aplica este procedimiento $k^2 - 1$ veces, se obtienen k^2 números reales positivos, no necesariamente distintos. Demuestra que existe un número en el pizarrón que es menor o igual que kr.

Problema 2. Sean a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 números reales que satisfacen las siguientes ecua-

ciones
$$\frac{a_1}{k^2+1}+\frac{a_2}{k^2+2}+\frac{a_3}{k^2+3}+\frac{a_4}{k^2+4}+\frac{a_5}{k^2+5}=\frac{1}{k^2},$$
para $k=1,2,3,4,5$.
Determina el valor de $\frac{a_1}{37}+\frac{a_2}{38}+\frac{a_3}{39}+\frac{a_4}{40}+\frac{a_5}{41}$. (Expresa el resultado como una sola fracción).

Problema 3. Considera tres circunferencias en el plano Γ_1, Γ_2 y Γ_3 mutuamente externas y que no se intersectan. Para cada punto P del plano que se encuentre fuera de las tres circunferencias, construimos seis puntos distintos A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, tales que las rectas PA_i y PB_i son tangentes a la circunferencia Γ_i en los puntos A_i y B_i, para $i=1,2,3$. Llamaremos al punto P *excepcional*, si las rectas A_1B_1, A_2B_2 y A_3B_3 son concurrentes. Demuestra que todos los puntos excepcionales del plano, si existen, están sobre una misma circunferencia.

Problema 4. Demuestra que para cada entero positivo k, existe una sucesión aritmética
$$\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\ldots,\frac{a_k}{b_k}$$
de fracciones irreducibles, tales que los enteros positivos $a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_k,b_k$ son todos distintos.

Problema 5. Larry y Rob son dos robots que viajan en un coche desde Argovia a Zillis. Ambos robots tienen el control de la dirección del coche de acuerdo con el siguiente algoritmo: Larry da vuelta a la izquierda $90°$ después de cada l kilómetros recorridos, y Rob da vuelta a la derecha $90°$ después de cada r kilómetros recorridos, donde l y r son enteros positivos primos relativos. En caso de que se produzcan simultáneamente dos vueltas, el coche se mantiene sin cambiar su dirección. Suponga que el terreno es plano y que el coche puede moverse en cualquier dirección. Si el coche sale de Argovia en dirección de Zillis, ¿para qué elecciones de la pareja (l,r) se puede garantizar que el coche llegará a Zillis, independientemente de la distancia entre Argovia y Zillis?

American Mathematics Competition (AMC)

10^{th} AMC 10

Problema 1. Si un envase contiene 12 onzas de refresco, ¿cuál es el mínimo número de envases necesarios para llenar un galón (128 onzas) de refresco?

(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 11

Problema 2. Cuatro monedas se sacaron de una alcancía que contiene monedas de 1, 5, 10 y 15 centavos. ¿Cuál de los siguientes resultados no puede ser el valor total de las cuatro monedas?

(a) 15 (b) 25 (c) 35 (d) 45 (e) 55

Problema 3. ¿Cuál de los siguientes números es igual a $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+1}}$?

(a) $\frac{5}{4}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $\frac{5}{3}$ (d) 2 (e) 3

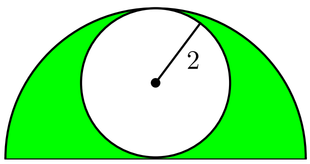
Problema 4. Eric planea competir en un triatlón. Su velocidad promedio en la competencia de natación de $\frac{1}{4}$ de milla, es de 2 millas por hora y su velocidad promedio en la carrera de 3 millas es de 6 millas por hora. Si su meta es terminar el triatlón en 2 horas, ¿cuál debe ser su velocidad promedio (en millas por hora) en la carrera de bicicleta de 15 millas?

(a) $\frac{120}{11}$ (b) 11 (c) $\frac{56}{5}$ (d) $\frac{45}{4}$ (e) 12

Problema 5. ¿Cuál es la suma de los dígitos del cuadrado de $111,111,111$?

(a) 18 (b) 27 (c) 45 (d) 63 (e) 81

Problema 6. Un círculo de radio 2 está inscrito en un semicírculo, como se muestra. El área del semicírculo que está afuera del círculo está sombreada. ¿Qué fracción del área del semicírculo está sombreada?



(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{2}{\pi}$ (d) $\frac{2}{3}$ (e) $\frac{3}{\pi}$

Problema 7. Una caja de leche contiene $2\,\%$ de grasa, cantidad que es $40\,\%$ menos grasa que la que contiene una caja de leche entera. ¿Cuál es el porcentaje de grasa en una caja de leche entera?

(a) $\frac{12}{5}$ (b) 3 (c) $\frac{10}{3}$ (d) 38 (e) 42

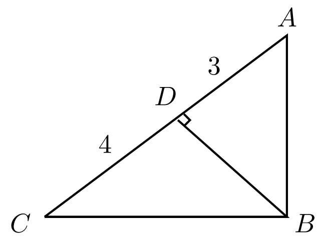
Problema 8. La familia Wen está formada por tres generaciones, y un día dos miembros de cada generación van al cine. Los dos miembros de la generación más joven reciben un $50\,\%$ de descuento como niños. Los dos miembros de la generación más vieja, reciben un $25\,\%$ de descuento como adultos mayores. Los dos miembros de la generación de en medio no reciben descuento. El abuelo Wen, cuyo boleto costó $\$6$, pagará la cuenta de todos los miembros. ¿Cuánto deberá pagar?

(a) $\$34$ (b) $\$36$ (c) $\$42$ (d) $\$46$ (e) $\$48$

Problema 9. Los enteros positivos a, b y 2009, con $a < b < 2009$, forman una sucesión geométrica cuya razón es un número entero. ¿Cuál es el valor de a?

(a) 7 (b) 41 (c) 49 (d) 287 (e) 2009

Problema 10. Un triángulo ABC tiene ángulo recto en B. El punto D es el pie de la altura desde B. Si se sabe que $AD = 3$ y $DC = 4$, ¿cuál es el área del triángulo ABC?

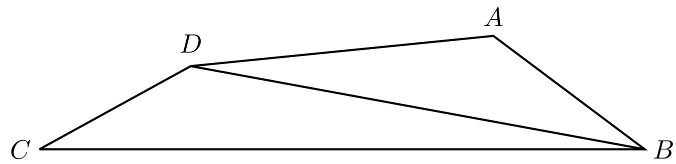


(a) $4\sqrt{3}$ (b) $7\sqrt{3}$ (c) 21 (d) $14\sqrt{3}$ (e) 42

Problema 11. Una dimensión de un cubo se incrementó en 1, otra se disminuyó en 1 y la tercera se quedó inalterada. Si el volumen del nuevo sólido rectangular es 5 unidades menor que el volumen del cubo, ¿cuál era el volumen del cubo?

(a) 8 (b) 27 (c) 64 (d) 125 (e) 216

Problema 12. En el cuadrilátero $ABCD$ se tiene que $AB = 5$, $BC = 17$, $CD = 5$, $DA = 9$ y BD es un entero. ¿Cuál es el valor de BD?

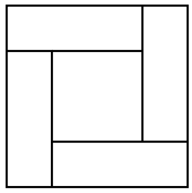


(a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 14 (e) 15

Problema 13. Suponga que $P = 2^m$ y $Q = 3^n$. ¿Cuál de los siguientes resultados es igual a 12^{mn} para toda pareja de enteros (m, n)?

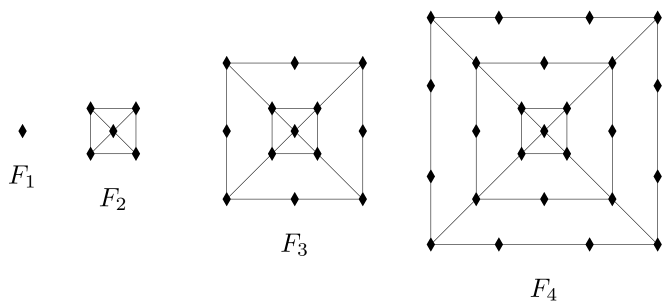
(a) P^2Q (b) P^nQ^m (c) P^nQ^{2m} (d) $P^{2m}Q^n$ (e) $P^{2n}Q^m$

Problema 14. Cuatro rectángulos congruentes están colocados como se muestra. El área del cuadrado exterior es 4 veces el área del cuadrado interior. ¿Cuál es la razón de la longitud del lado más largo de cada rectángulo entre la longitud de su lado más corto?



(a) 3 (b) $\sqrt{10}$ (c) $2+\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{3}$ (e) 4

Problema 15. Las figuras F_1, F_2, F_3 y F_4 que se muestran, son las primeras en una secuencia de figuras. Para $n \geq 3$, F_n se construye a partir de F_{n-1} formando un cuadrado a su alrededor y colocando un diamante más en cada lado del nuevo cuadrado que el que tenía F_{n-1} en cada lado de su cuadrado exterior. Por ejemplo, la figura F_3 tiene 13 diamantes. ¿Cuántos diamantes hay en la figura F_{20}?



(a) 401 (b) 485 (c) 585 (d) 626 (e) 761

Problema 16. Sean a, b, c y d números reales tales que $|a-b|=2$, $|b-c|=3$ y $|c-d|=4$. ¿Cuál es la suma de todos los valores posibles de $|a-d|$?

(a) 9 (b) 12 (c) 15 (d) 18 (e) 24

Problema 17. En un rectángulo $ABCD$ se tiene que $AB=4$ y $BC=3$. Se traza el segmento EF que pasa por B de forma que EF y DB sean perpendiculares, y A y C están sobre DE y DF, respectivamente. ¿Cuál es el valor de EF?

(a) 9 (b) 10 (c) $\frac{125}{12}$ (d) $\frac{103}{9}$ (e) 12

Problema 18. En un campamento de verano, el $60\,\%$ de los niños juegan futbol, el $30\,\%$ de los niños practican la natación, y el $40\,\%$ de los que juegan futbol practican la natación. ¿Cuál de los siguientes porcentajes enteros es el que más se aproxima al porcentaje de niños que no practican la natación y juegan futbol?

(a) $30\,\%$ (b) $40\,\%$ (c) $49\,\%$ (d) $51\,\%$ (e) $70\,\%$

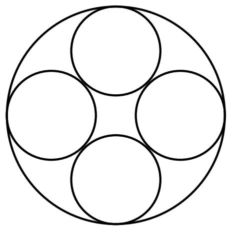
Problema 19. Una circunferencia A tiene radio de longitud 100. Una circunferencia B tiene radio de longitud entera $r < 100$ y permanece internamente tangente a la circunferencia A mientras rueda a lo largo de ella misma. Si las dos circunferencias tienen el mismo punto de tangencia al principio y al final del recorrido de B, ¿cuántos valores posibles puede tener r?

(a) 4 (b) 8 (c) 9 (d) 50 (e) 90

Problema 20. Andrea y Laura están a 20 kilómetros de distancia. Ambas manejan una bicicleta, cada una con dirección hacia la otra. Andrea conduce tres veces más rápido que Laura, y la distancia entre ellas disminuye a una velocidad de $1km/min$. Después de 5 minutos, Andrea deja de manejar su bicicleta debido a una llanta desinflada, y espera a Laura. ¿Después de cuántos minutos, contados desde el inicio, llega Laura a donde está Andrea?

(a) 20 (b) 30 (c) 55 (d) 65 (e) 80

Problema 21. Muchas de las catedrales góticas tienen ventanas con partes que contienen figuras formadas de círculos congruentes que están circunscritos a un círculo más grande. En la figura que se muestra el número de círculos pequeños es 4. ¿Cuál es la razón de la suma de las áreas de los cuatro círculos pequeños con respecto al área del círculo mayor?



(a) $3-2\sqrt{2}$ (b) $2-\sqrt{2}$ (c) $4(3-2\sqrt{2})$ (d) $\frac{1}{2}(3-\sqrt{2})$ (e) $2\sqrt{2}-2$

Problema 22. Dos dados cúbicos tienen, cada uno, números del 1 al 6 que se pueden extraer. Los doce números de los dos dados se retiran y se colocan en una bolsa. Luego, se van a extraer de la bolsa de uno en uno de manera aleatoria para colocarse nuevamente en las caras de los cubos, un número en cada cara. Los dados se lanzan y se suman los números de las caras hacia arriba. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 7?

(a) $\frac{1}{9}$ (b) $\frac{1}{8}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{2}{11}$ (e) $\frac{1}{5}$

Problema 23. En un cuadrilátero convexo $ABCD$ se tiene que $AB = 9$ y $CD = 12$. Las diagonales AC y BD se intersectan en E, $AC = 14$ y los triángulos AED y BEC tienen la misma área. ¿Cuál es el valor de AE?

(a) $\frac{9}{2}$ (b) $\frac{50}{11}$ (c) $\frac{21}{4}$ (d) $\frac{17}{3}$ (e) 6

Problema 24. Tres vértices distintos de un cubo se eligen al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el plano determinado por estos tres vértices contenga puntos en el interior del cubo?

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) $\frac{4}{7}$ (d) $\frac{5}{7}$ (e) $\frac{3}{4}$

Problema 25. Para $k > 0$, sea $I_k = 10\ldots064$, donde hay k ceros entre el 1 y el 6. Sea $N(k)$ el número de factores 2 en la factorización en primos de I_k. ¿Cuál es el máximo valor de $N(k)$?

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9 (e) 10

60^{th} **AMC** 12

Problema 1. El vuelo de Kim despegó de Newark a las $10:34$ a.m. y aterrizó en Miami a la $1:18$ p.m. Las dos ciudades se encuentran en el mismo huso horario. Si el vuelo duró h horas con m minutos, con $0 \leq m < 60$, ¿cuál es el valor de $h + m$?

(a) 46 (b) 47 (c) 50 (d) 53 (e) 54

Problema 2. ¿Cuál de los siguientes números es igual a $1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}$?

(a) $\frac{5}{4}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $\frac{5}{3}$ (d) 2 (e) 3

Problema 3. ¿Cuál de los siguientes números está a un tercio de la distancia entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$?

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{5}{12}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{7}{12}$ (e) $\frac{2}{3}$

Problema 4. Cuatro monedas se sacaron de una alcancía que contiene monedas de 1, 5, 10 y 15 centavos. ¿Cuál de los siguientes resultados no puede ser el valor total de las cuatro monedas?

(a) 15 (b) 25 (c) 35 (d) 45 (e) 55

Problema 5. Una dimensión de un cubo se incrementó en 1, otra se disminuyó en 1 y la tercera se quedó inalterada. Si el volumen del nuevo sólido rectangular es 5 unidades menor que el volumen del cubo, ¿cuál era el volumen del cubo?

(a) 8 (b) 27 (c) 64 (d) 125 (e) 216

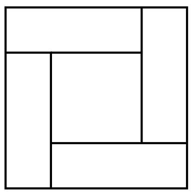
Problema 6. Suponga que $P = 2^m$ y $Q = 3^n$. ¿Cuál de los siguientes resultados es igual a 12^{mn} para toda pareja de enteros (m, n)?

(a) P^2Q (b) P^nQ^m (c) P^nQ^{2m} (d) $P^{2m}Q^n$ (e) $P^{2n}Q^m$

Problema 7. Los primeros tres términos de una sucesión aritmética son $2x-3$, $5x-11$ y $3x+1$, en ese orden. Si el n-ésimo término de la sucesión es 2009, ¿cuál es el valor de n?

(a) 255 (b) 502 (c) 1004 (d) 1506 (e) 8037

Problema 8. Cuatro rectángulos congruentes están colocados como se muestra. El área del cuadrado exterior es 4 veces el área del cuadrado interior. ¿Cuál es la razón de la longitud del lado más largo de cada rectángulo entre la longitud de su lado más corto?

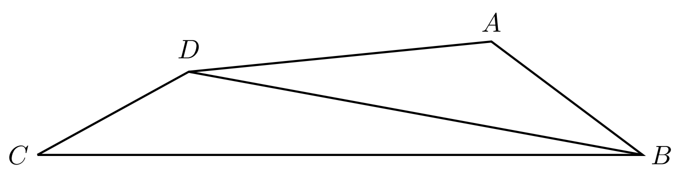


(a) 3 (b) $\sqrt{10}$ (c) $2+\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{3}$ (e) 4

Problema 9. Si $f(x+3) = 3x^2+7x+4$ y $f(x) = ax^2+bx+c$, ¿cuánto vale $a+b+c$?

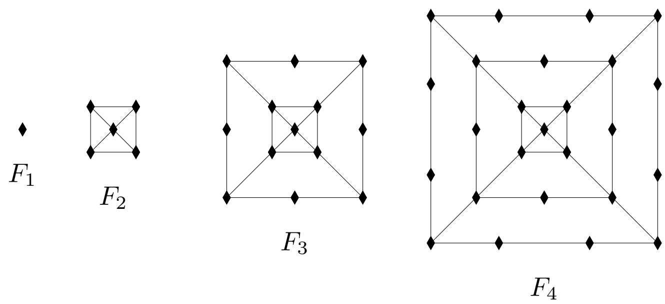
(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 2 (e) 3

Problema 10. En el cuadrilátero $ABCD$ se tiene que $AB = 5$, $BC = 17$, $CD = 5$, $DA = 9$ y BD es un entero. ¿Cuál es el valor de BD?



(a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 14 (e) 15

Problema 11. Las figuras F_1, F_2, F_3 y F_4 que se muestran, son las primeras en una secuencia de figuras. Para $n \geq 3$, F_n se construye a partir de F_{n-1} formando un cuadrado a su alrededor y colocando un diamante más en cada lado del nuevo cuadrado que el que tenía F_{n-1} en cada lado de su cuadrado exterior. Por ejemplo, la figura F_3 tiene 13 diamantes. ¿Cuántos diamantes hay en la figura F_{20}?

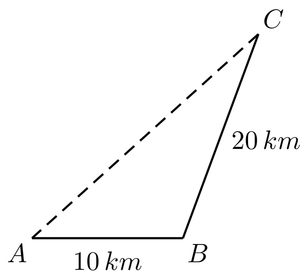


(a) 401 (b) 485 (c) 585 (d) 626 (e) 761

Problema 12. ¿Cuántos enteros positivos menores que 1000 son iguales a 6 veces la suma de sus dígitos?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4 (e) 12

Problema 13. Un barco navega $10\,km$ en línea recta de A a B, luego gira un ángulo entre $45°$ y $60°$, y navega otros $20\,km$ hasta C. Si medimos AC en kilómetros, ¿cuál de los siguientes intervalos contiene a AC^2?



(a) $[400, 500]$ (b) $[500, 600]$ (c) $[600, 700]$ (d) $[700, 800]$ (e) $[800, 900]$

Problema 14. En el plano, un triángulo tiene vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(6m, 0)$, y la recta $y = mx$ divide al triángulo en dos triángulos de la misma área. ¿Cuál es la suma de todos los valores posibles de m?

(a) $-\frac{1}{3}$ (b) $-\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{1}{2}$

Problema 15. Si $i = \sqrt{-1}$, ¿para que valor de n se cumple que

$$i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + ni^n = 48 + 49i?$$

(a) 24 (b) 48 (c) 49 (d) 97 (e) 98

Problema 16. Un círculo con centro en C es tangente a los ejes positivos del plano cartesiano, y es tangente externamente al círculo centrado en $(3, 0)$ de radio 1. ¿Cuál es la suma de las longitudes de todos los radios posibles del círculo centrado en C?

(a) 3 (b) 4 (c) 6 (d) 8 (e) 9

Problema 17. Sean $a + ar_1 + ar_1^2 + ar_1^3 + \cdots$ y $a + ar_2 + ar_2^2 + ar_2^3 + \cdots$ dos series geométricas infinitas distintas de números positivos con el mismo primer término. Si la primera serie tiene suma r_1 y la segunda serie tiene suma r_2, ¿cuál de los siguientes valores puede ser igual a $r_1 + r_2$?

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (e) 2

Problema 18. Para $k > 0$, sea $I_k = 10\ldots064$, donde hay k ceros entre el 1 y el 6. Sea $N(k)$ el número de factores 2 en la factorización en primos de I_k. ¿Cuál es el máximo valor de $N(k)$?

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9 (e) 10

Problema 19. Andrea dibujó un círculo inscrito y un círculo circunscrito a un pentágono regular, y calculó el área de la región comprendida entres los dos círculos. Begoña hizo lo mismo con un heptágono regular. Las áres de las dos regiones fueron A y B, respectivamente. Si los lados de cada polígono miden 2, ¿cuál de las siguientes expresiones es válida?

(a) $A = \frac{25}{49}B$ (b) $A = \frac{5}{7}B$ (c) $A = B$ (d) $A = \frac{7}{5}B$ (e) $A = \frac{49}{25}B$

Problema 20. En un cuadrilátero convexo $ABCD$ se tiene que $AB = 9$ y $CD = 12$. Las diagonales AC y BD se intersectan en E, $AC = 14$ y los triángulos AED y BEC tienen la misma área. ¿Cuál es el valor de AE?

(a) $\frac{9}{2}$ (b) $\frac{50}{11}$ (c) $\frac{21}{4}$ (d) $\frac{17}{3}$ (e) 6

Problema 21. Sea $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, con a, b, c números complejos. Si

$$p(2009 + 9002\pi i) = p(2009) = p(9002) = 0,$$

¿cuántas raíces no reales tiene el polinomio $x^{12} + ax^8 + bx^4 + c$?

(a) 4 (b) 6 (c) 8 (d) 10 (e) 12

Problema 22. Un octaedro regular tiene lado 1. Un plano paralelo a dos caras opuestas corta al octaedro en dos sólidos congruentes. El polígono formado por la intersección del plano con el octaedro tiene área $\frac{a\sqrt{b}}{c}$ con a, b y c números enteros positivos, tales que a y c son primos relativos y b no es divisible por el cuadrado de ningún primo. ¿Cuánto vale $a + b + c$?

(a) 10 (b) 11 (c) 12 (d) 13 (e) 14

Problema 23. Las funciones f y g son cuadráticas con $g(x) = -f(100 - x)$, donde la gráfica de g contiene al vértice de la gráfica de f. Las cuatro intersecciones de las gráficas con el eje de las x tienen coordenada x igual a x_1, x_2, x_3 y x_4, en orden creciente con $x_3 - x_2 = 150$. Se sabe que el valor de $x_4 - x_1$ es $m + n\sqrt{p}$, donde m, n y p son enteros positivos, y p no es divisible por el cuadrado de ningún primo. ¿Cuál es el valor de $m + n + p$?

(a) 602 (b) 652 (c) 702 (d) 752 (e) 802

Problema 24. La *función torre de doses* se define recursivamente de la siguiente forma: $T(1) = 2$ y $T(n + 1) = 2^{T(n)}$, para $n \geq 1$. Sea $A = (T(2009))^{T(2009)}$ y $B = (T(2009))^A$. ¿Cuál es el mayor entero k para el cual

$$\underbrace{\log_2 \log_2 \cdots \log_2}_{k-veces} B$$

está definido?

(a) 2009 (b) 2010 (c) 2011 (d) 2012 (e) 2013

Problema 25. Los primeros dos términos de una sucesión son $a_1 = 1$ y $a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Para $n \geq 1$ tenemos que

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{1 - a_n a_{n+1}}.$$

¿Cuánto vale $|a_{2009}|$?

(a) 0 (b) $2 - \sqrt{3}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) 1 (e) $2 + \sqrt{3}$

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, de julio a octubre de 2009.

Del 10 al 22 de julio en Bremen, Alemania

50^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Del 6 al 16 de agosto, en Cuernavaca

- Entrenamiento para la delegación que representará a México en la XI Olimpiada Centroamericana y del Caribe.
- Entrenamiento para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes selectivos para determinar la delegación que representará a México en la XXIII Olimpiada Iberoamericana (máximo 4 alumnos).

Primera quincena de septiembre

Límite para registro de delegados que deseen aplicar el examen propuesto por el Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, como final de su Concurso Estatal, y envío de este examen.

Del 17 al 27 de septiembre en Querétaro, México

XXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

25 y 26 de septiembre

Aplicación en los estados registrados con este propósito, del examen final propuesto por el Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Primera quincena de octubre

Envío del cuarto número de la revista Tzaloa.

Del 12 al 16 de octubre en Zacatecas

XLII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana.
Toda la información relacionada con el congreso se puede consultar en la página `http://smm.org.mx/smm`

Octubre

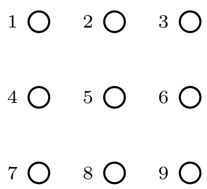
La XI Olimpiada Centroamericana y del Caribe que se llevaría a cabo en el mes de junio en República Dominicana fue cancelada. Colombia será el nuevo país sede, sin embargo por el momento se desconoce la ciudad y las fechas.

Fe de erratas

A continuación presentamos correcciones a dos problemas de práctica del número 2, año 2009 de Tzaloa. Invitamos a nuestros lectores a que nos manden sus comentarios y posibles correcciones a problemas de números anteriores, a la dirección electrónica `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema de práctica número 6 de Tzaloa No. 2, año 2009. Antes de dar la solución corregida, enunciamos el problema.

Un juego consiste de 9 botones luminosos de color verde o rojo. Apretando un botón, cambian de color sólo los vecinos que están a su lado, arriba y abajo, pero no en diagonal. Por ejemplo, si se aprieta el botón 1, cambian de color los botones 2 y 4, y si se aprieta el botón 2 cambian de color los botones 1, 3 y 5. Si inicialmente todos los botones son verdes, ¿es posible que apretando botones todos se vuelvan rojos?



Solución corregida. Supongamos que sí es posible. Observemos que los botones de las esquinas cambian de color cuando apretamos alguno de los botones que están en los lados correspondientes. Por ejemplo, si apretamos el botón 2 ó el 4, el botón 1 cambia de color. Como queremos que el botón 1 quede rojo al final, tiene que cambiar un número impar de veces de color. Entonces, el número de veces que apretemos el botón 2 más el número de veces que apretemos el botón 4, tiene que ser un número impar. Supongamos que apretamos el botón 2 un número impar de veces. Entonces, el botón 4 lo tenemos que apretar un número par de veces. Haciendo el mismo razonamiento en todas las esquinas, tenemos que el botón 6 lo tenemos que apretar un número par de veces y el botón 8 un número impar de veces. Como el botón 5 cambia de color cuando apretamos el 2, el 4, el 6 ó el 8, tenemos que cambia un número par de veces. Esto implica que al final sería verde. Por lo tanto, no es posible cambiar todos los botones a rojo.

Problema de práctica número 10 de Tzaloa No. 2, año 2009. El enunciado correcto debe decir:
Se tiene la sucesión de números $1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ que satisface la igualdad

$$1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = n^2,$$

para todo entero $n \geq 2$. Determina el valor de $a_3 + a_5$.

El enunciado como apareció originalmente en la revista, decía que la igualdad

$$1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = n^2$$

se cumple para todo entero $n > 2$. Sin embargo, en la solución se usaba esta relación para $n = 2$.

Por completez, presentamos la solución del problema corregido.

Usando la relación dada, tenemos que

$$a_2 = 4, \ \ a_2a_3 = 9, \ \ a_2a_3a_4 = 16 \ \text{ y } \ a_2a_3a_4a_5 = 25.$$

Luego, $4a_3 = 9$ y $16a_5 = 25$, de donde $a_3 + a_5 = \frac{9}{4} + \frac{25}{16} = \frac{61}{16}$.

Apéndice

Definición 1 (Primos relativos) *Decimos que dos números a y b son primos relativos si su máximo común divisor es 1. Ver [11].*

Definición 2 (Máximo común divisor) *Dados dos números enteros positivos n y m, su máximo común divisor d es el mayor número entero positivo que divide a n y a m. Escribimos $(n, m) = d$. Ver [11].*

Definición 3 (Congruencias) *Dados los enteros a, b y m, con $m > 1$, decimos que a es congruente con b módulo m, y escribimos $a \equiv b \pmod{m}$, si $a - b$ es múltiplo de m, es decir, si $a = b + mk$ para algún entero k. Ver [11, 12].*

Definición 4 (Combinaciones) *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. Al número de combinaciones de m elementos, de un conjunto de n elementos, se denota por $\binom{n}{m}$ y es igual a:*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Ver [6, 10].

Criterio 5 (Principio de las casillas) *Si $n + 1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene dos o más objetos. Ver [6, 10].*

Teorema 6 (Área de un triángulo) *El área de un triángulo es igual a $\frac{1}{2}hl$, donde l es la medida de un lado y h es la medida de la altura sobre dicho lado. Ver [1, 2].*

Definición 7 (Bisectriz) *Dado un ángulo $\angle ABC$ su bisectriz es la recta que lo divide en dos ángulos iguales. Equivalentemente, la bisectriz del ángulo $\angle ABC$ es la recta que equidista de AB y BC. Ver [1, 2].*

Definición 8 (Mediatriz) *La mediatriz de un segmento AB es la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio. Equivalentemente, la mediatriz de AB es la recta que equidista de A y de B. Ver [1, 2].*

Definición 9 (Semejanza de triángulos) *Decimos que dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir,*

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$
$$\angle ACB = \angle A'C'B'$$
$$\angle BAC = \angle B'A'C'$$

y sus lados correspondientes son proporcionales, esto es

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Ver [1, 2].

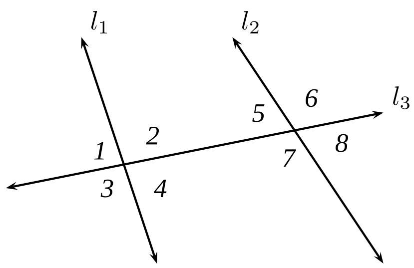
Teorema 10 (Teorema de semejanza AAA) *Si dos triángulos tienen sus ángulos correspondientes iguales, entonces sus lados correspondientes son proporcionales y los triángulos son semejantes. Ver [2].*

Definición 11 (Ángulo externo de un triángulo) *Dado un triángulo ABC, un ángulo externo es el formado por un lado del triángulo y la prolongación del lado adyacente. Dicho de otra forma, es un ángulo suplementario al ángulo interno adyacente a él. En un triángulo ABC, un ángulo externo es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes. Ver [2].*

Definición 12 (Excírculo) *Decimos que una circunferencia $\mathcal{C}$ está exinscrita en el triángulo ABC respecto al ángulo BCA, si $\mathcal{C}$ es tangente a los lados del ángulo en BCA y al lado AB por fuera del triángulo dado. También se dice que $\mathcal{C}$ es el excírculo del triángulo ABC respecto al ángulo BCA. Ver [2].*

Teorema 13 (Teorema de Pitágoras) *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Ver [1, 2].*

Definición 14 (Ángulos entre paralelas) *Cuando una recta intersecta a otras dos rectas se forman ocho ángulos que numeramos del 1 al 8, como se muestra en la figura.*



Si la recta l_3 intersecta a las rectas l_1 y l_2, decimos que es transversal a ellas. Los ángulos 2, 4, 5 y 7 están entre las rectas l_1 y l_2, los llamamos ángulos internos, los ángulos restantes los llamamos ángulos externos. Los ángulos en lados opuestos por

la transversal l_3 se llaman ángulos alternos, como por ejemplo 3 y 5. A los ángulos 4 y 5 les llamamos alternos internos y los ángulos 3 y 6 son alternos externos.
A los ángulos que están en la posición correspondiente respecto a la transversal, como por ejemplo 3 y 7 los llamamos ángulos correspondientes. Entonces, los pares de ángulos correspondientes en la figura anterior son 3 y 7, 1 y 5, 4 y 8, 2 y 6.
Si l_1 y l_2 son paralelas los ángulos alternos internos son iguales. Ver [2].

Teorema 15 (Medida del ángulo inscrito) *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco. Ver [1, 2].*

Definición 16 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero es cíclico si existe una circunferencia que pasa por sus cuatro vértices. Ver [2].*

Teorema 17 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si tiene dos ángulos opuestos suplementarios, es decir, si y sólo si*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180^\circ.$$

Ver [2].

Teorema 18 (Radio perpendicular a una cuerda) *En un círculo, el radio que pasa por el punto medio de una cuerda, es perpendicular a la cuerda. Ver [1].*

Bibliografía

[1] Baldor J., Aurelio. *Geometría y trigonometría*. Segunda edición, 2008.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría, ejercicios y problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[4] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Las Olimpiadas Matemáticas en San Luis Potosí 1987-2005*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2008.

[5] E. Gentile. *Aritmética Elemental*. Monografía No. 25 de la Serie de Matemáticas del Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico de la OEA. Ediciones de la OEA, 1988.

[6] R. Grimaldi, *Matemáticas Discreta y Combinatoria*. Addison-Wesley Iberoamericana, 3^a edición.

[7] V. Gusiev, V. Litvinenko, A. Mordkovich. *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Geometría)*. Editorial Mir, Moscú 1969.

[8] V. Litvinenko, A. Mordkovich. *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Algebra y Trigonometría)*. Editorial Mir, Moscú 1989.

[9] I. Niven, H. Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[10] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2000.

[11] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de Números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2003.

[12] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa*. Año 2009, No. 2.

[13] H. Shariguin, *Problemas de Geometría*. Colección Ciencia Popular. Editorial Mir, Moscú 1989.

[14] N. Vilenkin. *¿De cúantas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Directorio del Comité Organizador de la OMM

Anne Alberro Semerena
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (777) 3 81 03 80
Fax (777) 3 29 70 40
aalberro@buzon.uaem.mx

Alejandro Bravo Mojica
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 48 68
Fax (55) 56 22 48 64
abm@hp.fciencias.unam.mx

Radmila Bulajich Manfrino
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
bulajich@servm.fc.uaem.mx

Gabriela Campero Arena
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 48 67
Fax (55) 56 22 48 66
gabriela@matematicas.unam.mx

José Antonio Climent Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 24 59 22
Fax (55) 56 22 48 59
jach@fciencias.unam.mx

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 49 25
Fax (55) 56 22 48 59
cobian@matematicas.unam.mx

Luis Cruz Romo
UPIITA, IPN
Av. Instituto Politécnico Nacional 2580
Col. Barrio la Laguna Ticomán
07340, México, D.F.
lucruz@ipn.mx

Carlos Jacob Rubio Barrios
Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de Matemáticas
Periférico norte tablaje 13615
97119, Mérida, Yucatán
Tel. (999) 942-3140 al 49
Fax (999) 942-31-40
carlos.rubio@uady.mx
jacob.rubio@gmail.com

Pablo Soberón Bravo
Circuito Interior no. 830
Fracc. La Herradura
Col. La Herradura
62303, Cuernavaca, Morelos
Cel. (777) 134 55 49
bandrak@hotmail.com

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
rogelio@matcuer.unam.mx

Jesús Jerónimo Castro
CIMAT
Apartado Postal 402,
36000, Guanajuato, Guanajuato.
Tel. (473) 7 32 71 55
Fax (473) 7 32 57 49
jeronimo@cimat.mx

Elena Ruiz Velázquez
Altair no. 12
Col. Lomas de Palmira
62550, Cuernavaca, Mor.
Tel. (777) 320 54 39
Cel. (777) 133 39 83
eleniux@gmail.com
A00375640@itesm.mx

Carmen Sosa Garza
Facultad de Ingeniería, UAQ
Cerro de las Campanas s/n
Querétaro, Querétaro
Tel. (442) 1 92 12 64 ext. 121 ó 136
Fax (442) 1 92 12 646
carsg@uaq.mx

Hugo Villanueva Méndez
Instituto de Matemáticas, UNAM
Cub. 4 de Becarios,
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria
Coyoacán 04510,
México, D.F.
Tel (55) 56 22 45 32
vill_hugo@hotmail.com
hvillan@matem.unam.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@fciencias.unam.mx`

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

`http://www.omm.unam.mx/`