TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2010, No. 3

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.omm.unam.mx

Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Impreso y hecho en México.
Julio de 2010.

Contenido

Presentación

Tzaloa es una publicación periódica trimestral de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas y su objetivo es fomentar el estudio de las matemáticas como una disciplina dinámica y creativa. El diseño de las secciones y la cuidadosa selección de sus contenidos buscan apoyar de manera efectiva, con información y con materiales de calidad, a estudiantes y profesores de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los diferentes concursos de la Olimpiada de Matemáticas.

Esta revista, con orgullo, toma su nombre del náhuatl porque está hecha por y para los mexicanos. Tzaloa significa aprender y las páginas que la conforman buscan ayudar a satisfacer la necesidad de contar con espacios adecuados para profesores, estudiantes y, en general, para todas aquellas personas interesadas en desarrollar e incrementar sus capacidades para el razonamiento lógico matemático y la resolución de problemas.

Tzaloa, Año 2010, Número 3

El material que se presenta en este tercer número del año 2010 se escogió pensando en estudiantes y profesores que se preparan para las últimas etapas de los concursos estatales, asimismo busca apoyar a las delegaciones estatales que participarán en el concurso nacional. Es por eso que, en esta ocasión, las secciones de *Problemas de Práctica y Problemas Propuestos* no contienen problemas introductorios y el material escogido se ubica en las categoras intermedia y avanzada.

A pesar de lo anterior, no olvidamos que muchos de nuestros lectores ya comienzan a preparase para los concursos del próximo año y por ello incluimos un excelente artículo para principiantes. A través de las páginas que lo conforman, Héctor Flores nos comparte su amplia experiencia y nos ofrece numerosos consejos de gran utilidad para estudiantes y profesores que se inician en la aventura olímpica. Al final del artículo se incluye una lista con 20 problemas introductorios, de los cuales no se presentan las soluciones. Invitamos a nuestros lectores para que los resuelvan y nos envíen cuanto antes sus soluciones a la dirección electrónica `revistaomm@gmail.com`, para que podamos publicar las más ingeniosas en alguno de los próximos números de esta revista.

Como siempre, en la sección de Olimpiadas Internacionales presentamos los resultados y exámenes de los últimos concursos en los que México participó: la *XXII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico* y la *XII Olimpiada Centroamericana y del Caribe*. Además, en esta ocasión, también incluimos los exámenes de la *American Mathematicas Competition (AMC)*, mismos que sirvieron como preparación para las delegaciones mexicanas que este año participan en los concursos internacionales.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Hace más de 23 años que la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Desde sus inicios, este programa se ha visto fortalecido gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

24^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 24^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1991. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2010-2011 y, para el 1° de julio de 2011, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.omm.unam.mx`

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 24^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 21 al 26 de noviembre de 2010 en Ensenada, Baja California. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2011: la XXIII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, que se llevará a cabo en el mes de marzo; la XIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, que se celebrará en el mes de junio; la 52^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se llevará a cabo en julio en Amsterdam, Países Bajos, y la XXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en el mes de septiembre en Costa Rica.

Solución de problemas y temas iniciales para la olimpiada de matemáticas

Por Héctor Raymundo Flores Cantú

El objetivo de este escrito es proporcionar un primer acercamiento al tipo de conocimientos y razonamientos que son necesarios para los participantes en la olimpiada de matemáticas en México. Aunque hay excelente material publicado, tanto colecciones de problemas como textos con teoría, muchos profesores y participantes han manifestado su dificultad para extraer el material necesario para iniciar la preparación en la competencia. Por otra parte también espero que los temas y problemas que aquí son presentados sean de interés para cualquier otra persona interesada en la solución de problemas y en matemáticas. Así como que sirva para dar una visión distinta de lo que representa el verdadero quehacer dentro de la matemática. Me refiero a la solución de problemas.

Solución de problemas

(Matemática es la ciencia de resolver problemas)

La solución de problemas es considerada la más compleja de las funciones intelectuales y ha sido definida como un proceso que requiere el control y manejo de otras habilidades fundamentales como el análisis, la deducción, la creatividad y la memoria. El proceso ocurre cuando una persona (grupo, ente, ...) desea llegar a un objetivo, pero no sabe exactamente como proceder. Llamamos *solución del problema* justamente a la forma de llegar al objetivo deseado. Cuando la persona sabe como proceder para llegar al objetivo, la situación no es considerada como problema, sino como un ejercicio y lo que procede es “simplemente” seguir los pasos para llegar a este objetivo. Aunque los ejercicios forman parte fundamental en el proceso de aprendizaje de la matemática, no será éste el énfasis aquí.

Problema 1. Encuentra la suma de todos los números impares menores a $1,000,000$.

Obtener esa suma usando lápiz y papel no es una solución satisfactoria. Aún usando una calculadora el tiempo requerido para hacer todas las sumas hace que esta opción tampoco lo sea. Más adelante propondremos el problema de estimar el tiempo que ésto tardaría. Por otra parte muchas personas con conocimiento de computación podrían hacer un programa o usar una hoja de cálculo para obtener esa suma. Pero asumiendo que no admitimos el uso de una computadora, encontrar el valor de la suma del problema anterior, es un buen ejemplo de una situación que sería considerada como un problema para muchas personas. Sin embargo cualquier participante intermedio de la olimpiada de matemáticas daría la solución a este tipo de problema en unos segundos en media hoja de papel. Esto no porque sean "genios" sino porque la estrategia para este problema es uno de los primeros tópicos de la olimpiada y obtener la suma ya no es un problema, sino un ejercicio para ellos.

De esta forma, una situación puede representar un problema para algunos y no serlo para otros, dependiendo de la experiencia de cada uno. Podemos decir entonces que un problema se resuelve una sola vez, después se convierte en ejercicio, así como cualquier otra situación parecida. Una consecuencia importante de esto es que cada problema debe intentarse durante un tiempo suficiente antes de revisar la solución. Las personas que buscan la solución "al final del libro" antes de hacer un intento serio por resolver el problema, están desperdiciando una oportunidad valiosa de ejercitarse en sus habilidades que nunca podrán recuperar.

Los problemas, tal como los definimos, aparecen constantemente en todas las áreas del conocimiento y en cualquier sector, como la industria, los negocios, la economía, la política, la administración, así como en todas las ciencias naturales e ingenierías. Es prácticamente imposible encontrar algún área donde no haya problemas. En todas partes nos enfrentaremos en algún momento con querer llegar a algo, pero no saber cómo proceder.

Olimpiada de Matemáticas

Uno de los objetivos centrales de la olimpiada de matemáticas, es identificar y fomentar la capacidad de los participantes para resolver problemas. Ya sean problemas de matemáticas o problemas no matemáticos que requieren el uso de métodos matemáticos para obtener su solución. La olimpiada de matemáticas representa un marco excelente para ejercitar la habilidad para resolver problemas debido a que estos sólo requieren de conocimientos relativamente elementales en matemáticas. La mayoría se resuelve con lo que aparece en el programa de estudios de nivel secundaria. En particular, no requieren de trigonometría, cálculo ni geometría analítica. Pero la dificultad de los problemas no está en el conocimiento de los temas matemáticos sino en la habilidad del alumno para organizar, controlar y usar adecuadamente esos conocimientos para hallar la solución del problema. Los problemas iniciales de olimpiada están más relacionados con el tipo de problemas que aparecen en las pruebas de rendimiento de estudiantes como PISA, ENLACE, TIMSS, etc. De hecho la olimpiada de matemáticas es una forma excelente de preparar a los alumnos para estas pruebas de rendimiento.

En los entrenamientos para la olimpiada de matemáticas, cada vez que propongo un problema a un nuevo alumno, el primer comentario que hace es: - No sé qué hacer.- A menudo no tardan más de un minuto en hacerlo. Mi respuesta es: -¡EXACTO! Por eso es un problema. Si supieras qué hacer, sería un ejercicio.- Hacer ejercicios es importante en el proceso de reforzar los conocimientos aprendidos y es también importante en la olimpiada de matemáticas, pero es algo que los alumnos pueden hacer generalmente por su cuenta o con tareas. La parte más importante de los entrenamientos es la solución de problemas, no de ejercicios. El propósito es desarrollar la capacidad para resolver problemas y resolver cada vez problemas más difíciles. Aunque existen muchas estrategias para resolver problemas, lo que es indudable es que para mejorar es necesario practicar. Enfrentarse a ese “no sé qué hacer”.

Temas de Matemáticas para la Olimpiada

Antes de resumir los temas de matemáticas más utilizados en la olimpiada de matemáticas, es necesario mencionar que lo más importante, además de la concentración y la paciencia, es el sentido común y la lógica. De hecho podemos pensar en la lógica como sentido común bien estructurado y no por nada es la parte central de la matemática. Los razonamientos deben ser, antes que nada, correctos. Esto representa tener bien claras las relaciones entre causas y consecuencias y hacer deducciones correctas basado en la información que está a disposición.
Es necesario ser precavido. Reconocer lo falso de lo correcto no siempre es tan fácil. No todos los razonamientos que parecen correctos, son correctos. En el lenguaje de la lógica se llama falacia a un razonamiento falso que parece correcto o razonable.

Problema 2. Si 3 gatos cazan 3 ratones en 3 minutos, ¿cuántos minutos tarda un gato en cazar un ratón?

Una gran cantidad de alumnos responden que un gato caza un ratón en un minuto. Esto suena “razonable”, pero es falso. En este caso, basta pensar un poco más el problema para encontrar la respuesta correcta. Se espera que los alumnos participantes sean cuidadosos y capaces de resolver problemas de razonamiento lógico.

Problema 3. Andrés, Benito, Carlos y Daniel tienen sus oficinas en el mismo edificio. Uno de ellos es abogado, otro es banquero, otro es contador y otro es dentista. Si tenemos la siguiente información: - Daniel es cliente del abogado. - El contador es amigo de Benito, pero ninguno es cliente del otro. - El dentista tiene como cliente a Daniel. - Ni Andrés ni el dentista conocen a Carlos. ¿Cómo se llama el abogado?

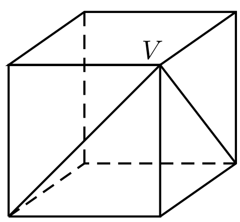
Este problema requiere extraer la información, representarla ordenadamente y hacer deducciones correctas. La dificultad de resolver el problema 3 radica muchas veces en no poder extraer toda la información que ofrece el enunciado del problema.

Los temas de matemáticas que más son necesarios en la olimpiada de matemáticas se dividen en cuatro áreas principales que son: geometría, matemáticas discretas, teoría de números y álgebra. Muchos de los temas están incluidos en los programas de educación básica y secundaria. A pesar de esto, en los entrenamientos siempre es necesario dar un repaso a esos temas enfocándose, no en aprender las cosas de memoria, sino en entender los conceptos de forma tal que puedan ser utilizados en la solución de problemas no triviales. Veremos ahora de forma breve los contenidos principales de cada una de estas áreas.

Geometría

Los problemas de geometría son (por mucho) los más comunes en la olimpiada de matemáticas y los que menos son tratados en las clases en la escuela. Uno de cada tres problemas en los exámenes de olimpiada son de geometría. Geometría se refiere a la geometría del plano y del espacio, no a la geometría analítica ni a la trigonometría. Se requiere de los resultados de ángulos entre paralelas, ángulos opuestos por el vértice, suma de ángulos en un triángulo, definición de tipos de triángulos (equilátero, isósceles, triángulo rectángulo, etc.), postulados de triángulos congruentes, área de figuras elementales y el teorema de Pitágoras. En entrenamientos posteriores se cubren más temas de geometría, pero el énfasis está en el razonamiento geométrico y no en aprenderse fórmulas.

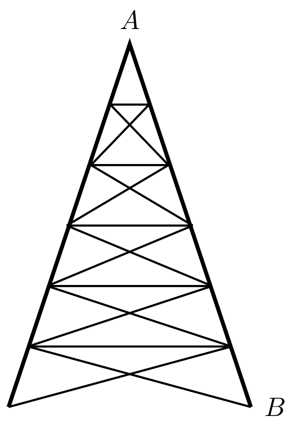
Problema 4. En dos caras no opuestas de un cubo se trazan diagonales a partir de uno de los vértices. Encuentra la medida del ángulo formado entre ellas. (Nota: Un cubo es una figura sólida formada por seis caras cuadradas, se puede pensar en un dado.)



Matemáticas discretas

Este tema se refiere a las situaciones donde se trata con conjuntos finitos o conjuntos que pueden enumerarse $(1, 2, 3, \ldots)$. Los problemas de este tipo incluyen temas de combinatoria, permutaciones, principios de conteo, conjuntos y otros que se cubren en etapas posteriores. Algunos de los problemas más interesantes son de conteo. Aunque los niños aprenden a contar desde los 4 años, contar puede no ser tan fácil algunas veces.

Problema 5. ¿Cuántos caminos distintos se pueden seguir para llegar del punto A al punto B en la figura de la "torre petrolera" si sólo está permitido moverse hacia abajo y hacia los lados, pero no hacia arriba?



Teoría de Números

En algunos libros se le llama también aritmética, pero no se refiere sólo a saber sumar, restar, multiplicar y dividir. En teoría de números se trata sobre problemas que se refieren a las propiedades de los números enteros $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Son importantes los conceptos de múltiplo, divisor, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, número primo, factorización en primos, algoritmo de la división, residuo y sistema decimal.

Problema 6. Es fácil ver que $1,000 \times 1,000 = 1,000,000$. ¿Existen dos números enteros que no tengan ceros como dígitos y que al multiplicarlos den como resultado $1,000,000$?

Álgebra

Aunque el álgebra está bien cubierta en el programa de las escuelas, los problemas de álgebra suelen ser los más complicados para los participantes, esto a pesar de que no se utilizan temas avanzados. Se requiere manipular expresiones algebraicas, conocer los identidades o productos notables (diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto, suma y diferencia de cubos), factorización, leyes de los exponentes y radicales, solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, soluciones de la ecuación cuadrática, razones y proporciones (regla de tres), progresiones aritméticas, progresiones geométricas y desigualdades. El problema 1, por ejemplo, representa una progresión aritmética, pero hay otros tipos de problemas.

Problema 7. Si x, y son dos números que cumplen

$$\begin{aligned} x+y &= 1, \\ x^2+y^2 &= 2, \end{aligned}$$

encuentra el valor de x^3+y^3.

Estrategias elementales para resolver problemas

Ya en 1945 Polya escribió un libro sobre el tema de solución de problemas. Se mencionan 4 pasos en el proceso de solución. Entender el problema, hacer un plan, desarrollar el plan e interpretar los resultados. Pocas personas están acostumbradas e seguir estos pasos. La mayoría de las personas espera que la idea brillante para resolver el problema se le ocurra de forma milagrosa y no está dispuesta a “perder el tiempo” con ideas o planes que no llevan a la solución. Pero cuando tenemos un problema, no es posible predecir si una idea será útil o inútil sin haberla desarrollado.

Las buenas ideas provienen de la experiencia,
la experiencia proviene de las malas ideas.
Proverbio de los nativos americanos.

En ocasiones la “idea brillante” se nos ocurre, pero ésto pasa sólo cuando el problema es suficientemente sencillo comparado con nuestra experiencia, con problemas más complicados es necesario ayudarnos. La generación de ideas y planes es un proceso creativo. ¿Qué hacer cuando no tenemos ideas? Algunas de las estrategias más comunes y útiles son muy conocidas y consisten en concentrarse en alguno de los siguientes puntos.

a) Reconoce correctamente los datos, las variables y objetivos del problema.

b) Concentrarse sólo en una parte del problema.

c) Intentar dar valores a las cantidades desconocidas.

d) Hallar un problema más simple parecido o relacionado.

e) Suponer que ya se llegó a la solución, ¿qué se puede deducir de eso?

f) Tratar de presentar la información de forma distinta (hacer un diagrama, gráfica o tabla).

Hay una gran cantidad de estrategias adicionales. Se recomienda consultar especialmente [1] y [4] de la bibliografía.

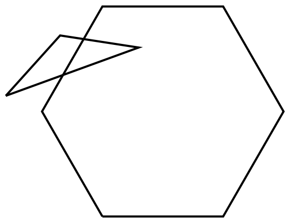
En los problemas 1, 5 y 6 evidentemente una de las cosas que dificulta los problemas es la magnitud. En todos los problemas donde la dificultad es la magnitud de una cantidad, una estrategia es imaginar que esa cantidad es menor y tratar de resolver el problema que resulta. En el problema 2 vale la pena concentrarse sólo en una parte del problema, digamos el número de gatos. Si imaginamos que ese número es fijo y analizamos qué pasa con las otras cantidades, no tardaremos en hallar la solución correcta. En el problema 3 conviene representar la información de alguna manera visual, porque es difícil mantener todos los datos en la mente como para hacer los razonamientos. En el problema 4 podría ser suficiente construir un pequeño modelo para sospechar cuál es la respuesta. La justificación es un poco más delicada, ya que es una demostración geométrica. Pero es conveniente meditar en la pregunta: ¿Cómo justifico que un ángulo mide x grados? En el problema 7 la respuesta no es 3, y aunque es posible resolver el sistema de ecuaciones, hay una solución más simple. Conviene observar bien los elementos que aparecen (cuadrados, suma de cubos). La suma de cubos se puede factorizar, pero ¿qué te recuerda la expresión $x^2 + y^2$? ¿Conoces algo en álgebra que contenga esa expresión?

Lista de problemas

Como lo hemos mencionado, lo más importante al enfrentarse a un problema es concentrarse y ser paciente. Los problemas presentados aquí fueron creados o elegidos de forma que pueden ser resueltos con un mínimo de conocimientos teóricos para las primeras etapas de la olimpiada de matemáticas en Nuevo León, pero no por esto son fáciles. No están ordenados necesariamente por grado de dificultad. Esto en parte por lo complicado de determinar la "dificultad" de un problema, pero también porque normalmente no es conveniente para el alumno saber de antemano si el problema es fácil o difícil. Recomendamos dedicar no menos de 20 ó 30 minutos a cada problema y en caso de no poder encontrar la solución, generar muchas ideas.

Problema 8. El primer examen selectivo para la olimpiada de matemáticas en Nuevo León tiene 20 preguntas. Cada pregunta tiene un valor de 3 puntos si es contestada correctamente, 0 puntos si es contestada equivocadamente y 1 punto si se deja sin contestar. La calificación de los participantes es la suma de los puntos obtenidos en los 20 problemas. ¿Cuántas calificaciones distintas se pueden obtener en el examen? Si el examen es de opción múltiple y cada problema tiene 4 opciones, qué conviene más, ¿adivinar las respuestas o dejar el examen sin contestar?

Problema 9. En la figura se muestra un triángulo y un hexágono regular cuya intersección es una figura de 3 lados (un triángulo). Dibuja un hexágono regular y un triángulo (no tiene que ser equilátero) de modo que la figura formada por la intersección de ambos tenga el máximo número posible de lados. Justifica que no es posible obtener otra figura con más lados.



Problema 10. Supongamos que desea resolverse el problema 1 (la suma de todos los impares menores a $1,000,000$) haciendo toda la operación:

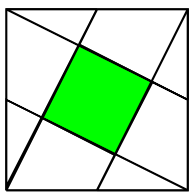
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 999,997 + 999,999 =$$

en una calculadora. Si tardamos 1 minuto en presionar 100 teclas de la calculadora, ¿cuánto tiempo tardaremos en obtener el resultado de la suma?

Problema 11. En una pizzería las pizzas medianas miden 8 pulgadas de diámetro y cuestan $\$55$. La pizza familiar mide 16 pulgadas de diámetro y cuesta $\$165$. Un grupo de amigos quiere comprar varias pizzas, no saben si comprar seis pizzas medianas o comprar dos familiares. ¿Cuál de estas dos opciones les da más “pizza por su dinero”?

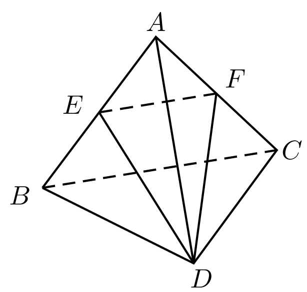
Problema 12. El precio de los dulces en una tienda es menor a $\$2.00$, pero mayor a $\$1.03$. En la tienda se vendieron todos los dulces a un total de $\$31.45$. Si todos los dulces valen lo mismo, ¿cuántos dulces se vendieron?

Problema 13. El lado del cuadrado grande mide 10 metros. Si se unen los puntos medios de los lados con los vértices, ¿cuál es el área del cuadro central? Nota: La respuesta no es $25\,m^2$.



Problema 14. Encuentra todos los valores de x que sean solución de la ecuación: $8^x + 2 = 4^x + 2^{x+1}$.

Problema 15. Considera una pirámide triangular formada por cuatro triángulos equiláteros (también se llama tetraedro regular). Llamamos a los vértices A, B, C, D. Si E es el punto medio de AB, F es el punto medio de AC y los cuatro triángulos equiláteros tienen lados de longitudes $2\,cm$, encuentra el área del triángulo DEF.



Problema 16. Encuentra (sin usar calculadora y sin aproximar con decimales) el valor numérico exacto de la siguiente expresión:

$$\sqrt{4+\frac{3}{2}\sqrt{7}}+\sqrt{4-\frac{3}{2}\sqrt{7}}.$$

Problema 17. Los números de dos dígitos 96 y 46 tienen la curiosa propiedad de que al multiplicarlos el resultado es igual al obtenido si cambiamos la posición de los dígitos de cada uno. Es decir $96 \times 46 = 69 \times 64$. Determina si que existe otro número de dos dígitos; distinto de 46, que tiene la misma propiedad al multiplicarlo por 96. ¿Cuántos números diferentes hay con esta propiedad?

Problema 18. En un baile había 28 personas, N de ellas eran mujeres. La mujer 1 bailó con 5 hombres, la mujer 2 bailó con 6 hombres, la mujer 3 bailó con 7 hombres y así sucesivamente hasta la mujer N que bailó con todos los hombres. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres había en el baile?

Problema 19. Un lógico (L) y un matemático (M) son amigos y cumplen años el mismo día. En una de sus fiestas de cumpleaños platican sobre sus respectivas edades. Aquí está el diálogo:
L: Estoy pensando en tres números enteros que multiplicados dan 2450 y sumados dan tu edad.
M: Después de pensarlo mucho, no puedo saber con seguridad en cuales números estás pensando.
L: Cada uno de los números es menor a mi edad.
M: Ahora ya sé cuáles son los números en los que estás pensando.
Encuentra las edades de ambos amigos.

Problema 20. Un grupo de pintores debe pintar 279 puertas de las cuales 186 puertas deben ser pintadas de blanco y el resto deben ser pintadas de negro. Durante la primera mitad del día todos los pintores se dedican a pintar puertas blancas. En la segunda mitad del día, la mitad de los pintores pintan puertas blancas y la otra mitad pintan puertas negras. Las puertas blancas quedan terminadas justo al terminar el primer día, pero no todas las negras. El siguiente día es dedicado por un solo pintor para terminar de pintar el resto de las puertas negras. ¿Cuántos pintores había?

Consideraciones finales

Como sugerencia para los profesores es necesario mencionar que los problemas deben ser, antes que nada, interesantes y estimulantes para los alumnos. Pocos están dispuestos a dedicar 30 minutos a pensar una situación que parece tediosa o aburrida. También es importante no enfrentar a los alumnos con problemas demasiado difíciles (ni demasiado fáciles). Los problemas fáciles aburren y los difíciles frustran. Tampoco es conveniente dar la solución de los problemas. Es preferible dar sugerencias, especialmente tratar de imaginar, ¿cómo se le puede a alguien haber ocurrido esta idea? Lo mejor es impulsar al alumno para que tenga sus propias ideas.

También recomendamos no descartar las ideas de los alumnos si son diferentes de las soluciones conocidas. No debemos olvidar que el propósito no es solamente hallar la solución, sino aprender y desarrollar las habilidades para resolver problemas. De esta forma, sin importar si al final se resuelve el problema o no, siempre será de beneficio para el alumno (y el profesor).

Esperamos que este material pueda servir como una introducción amigable a los problemas y temas propios de la olimpiada de matemáticas. Todos los involucrados en estas competencias sabemos que la primera impresión al acercarse a estos problemas por parte de alumnos y profesores, no siempre es fácil. Existe una gran cantidad de material publicado en la Web pero no aparece ordenado por grado de dificultad y suele ser complicado encontrar el material adecuado. Para aquellos lectores que desean continuar conociendo problemas interesantes y mejorando sus habilidades para resolver problemas usando material escrito, recomendamos los siguientes libros.

Bibliografía

1. E. Bono. *Lateral Thinking.* Penguin Books 1978.
2. D. Fomin, S. Genkin, I. Itenberg. *Mathematical Circles: Russian Experience.* American Mathematical Society 1996.
3. http://sites.google.com/site/eommnl/
4. G. Polya. *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas 2005.
5. A. Posamentier, C. Salkind. *Challenging Problems in Geometry.* Dover 1996.
6. P. Zeitz. *The Art and Craft of Problem Solving.* Wiley 2006.

Problemas de práctica

En esta sección encontrarás 20 interesantes problemas de nivel intermedio y avanzado con los que podrás poner a prueba tus habilidades y mismos que esperamos sean interesantes y útiles para tu preparación. En la siguiente sección encontrarás sus soluciones pero, como nos menciona Héctor Flores en su artículo, no debes consultar la solución de un problema sino hasta después de que tengas tu propia solución o, por lo menos, hasta que le hayas dedicado bastante tiempo. Ten en cuenta que al consultar la solución de un problema sin haber hecho un verdadero esfuerzo para resolverlo, desperdicias la oportunidad de incrementar tus habilidades para enfrentar situaciones difíciles.

Por último, te invitamos a contribuir para que esta sección de la revista se siga enriqueciendo con la participación de todos. Estamos seguros que concoces y tienes problemas interesantes que proponer, por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus sugerencias.

Problema 1. Sea ABC un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto está en B y $AB < BC$. En la bisectriz del ángulo ABC tomamos el punto P tal que AP es perpendicular a dicha bisectriz. Sea M el punto medio de AC, y E la intersección de MP con el cateto AB. Si $EM = 15\,cm$, ¿cuánto mide BC?

Problema 2. Si a, b, c y d son las raíces de la ecuación $x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = 0$, encuentra el valor de

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

Problema 3. La isla de Nuncajamás tiene 2010 habitantes, divididos en tres clanes: caballeros que siempre dicen la verdad, plebeyos, que siempre mienten, y espías que alternadamente dicen mentiras un día y dicen la verdad el siguiente día. Un reportero visita la isla por dos días. El primer día, él se encuentra con todos los habitantes. El primero dice: “hay exactamente un plebeyo en la isla”; el segundo dice: “hay exactamente dos plebeyos en la isla”; y así sucesivamente hasta llegar al habitante número

2010 que dice: "hay exactamente 2010 plebeyos en la isla". El segundo día, el reportero habla con todos los habitantes otra vez, en el mismo orden. El primero dice: "hay exactamente un caballero en la isla"; el segundo dice: "hay exactamente dos caballeros en la isla"; hasta llegar al habitante 2010 que dice: "hay 2010 caballeros en la isla". Determina el número de espías que viven en la isla.

Problema 4. Sean a, b y c enteros positivos menores que 10 tales que

$$(100a + 10b + c)^2 = (a + b + c)^5.$$

Determina el valor de $a^2 + b^2 + c^2$.

Problema 5. Sobre la base de un triángulo isósceles se traza una perpendicular desde un punto cualquiera P. Esta recta corta a los lados iguales en dos puntos M y N. Demuestra que $PM + PN$ es constante y determina dicha constante.

Problema 6. ¿Existen enteros de la forma $444\ldots443$ (todos sus dígitos 4 excepto el último que es 3) tal que sean divisibles entre 13? En caso afirmativo encuentra uno de estos números, en caso contrario demuestra que ningún número de esta forma es divisible entre 13.

Problema 7. Sean w, x, y, z números reales mayores o iguales que cero tales que $w + x + y + z = 100$. Determina el mayor valor posible de la suma $wx + xy + yz$.

Problema 8. Sea N un número de 21 dígitos, donde todos son iguales a 1 excepto el dígito central. Si N es múltiplo de 7, ¿cuál es el dígito central?

Problema 9. Desde un punto P, exterior a una circunferencia C, se traza la tangente PT y la secante PAB, con A y B puntos de la circunferencia y estando A entre P y B. Si TA es bisectriz del ángulo BTP, $BT = 15\,cm$ y $AT = 10\,cm$, ¿cuánto mide PT?

Problema 10. Sea T un conjunto formado por enteros positivos que tienen la siguiente propiedad: si x y y son elementos distintos de T, con $x > y$, entonces $x - y$ tiene todos sus dígitos en el conjunto $\{2, 3, 6, 9\}$. Determina la mayor cantidad de elementos que puede tener T.

Problema 11. ¿Cuántas parejas (x, y) de números enteros satisfacen la ecuación

$$x^2 \cdot y^3 = 6^{12}?$$

Problema 12. Demuestra que no existe ningún entero a tal que $a^2 - 3a - 19$ sea divisible por 289.

Problema 13. Sea ABC un triángulo tal que $AB = AC$ y sea I su incentro. Si $BC = AB + AI$, determina la medida del ángulo $\angle BAC$.

Problema 14. Si se sabe que $P(x)$ es un polinomio de grado 2008 tal que $P(k) = \frac{1}{k}$ para $k \in \{1, 2, \ldots, 2009\}$, calcula el valor de $P(2010)$.

Problema 15. Determina el número de enteros a, con $1 \leq a \leq 100$, tales que a^a es un cuadrado perfecto.

Problema 16. Sean ABC un triángulo y P un punto en su interior. Definimos D, E y F como los puntos medios de los segmentos AP, BP y CP respectivamente. Además definimos R como la intersección de AE y BD; S como la intersección de BF y CE; y T como la intersección de CD y AF. Demuestra que la medida del área del hexágono $DRESFT$ es independiente de la elección de P.

Problema 17. Sean a, b y c enteros tales que $b \neq c$. Si

$$ax^2 + bx + c \quad \text{y} \quad (c-b)x^2 + (c-a)x + (a+b)$$

tienen una raíz en común, demuestra que $a + b + 2c$ es múltiplo de 3.

Problema 18. La bisectriz del ángulo $\angle BAD$ de un paralelogramo (no rombo) $ABCD$ intersecta a las rectas CD y BC en los puntos K y L, respectivamente. Demuestra que el centro O de la circunferencia que pasa por los puntos C, K y L está sobre la circunferencia que pasa por B, C y D.

Problema 19. Sea A un conjunto con 8 elementos. Determina el máximo número de subconjuntos de A, de 3 elementos cada uno, tales que la intersección de cualesquiera dos subconjuntos no contenga 2 elementos.

Problema 20. Para $n \geq 2$, sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos tales que

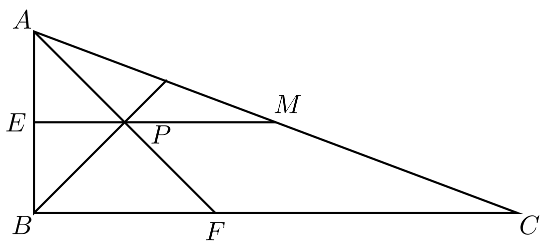
$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Demuestra que $\text{máx}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \leq 4\,\text{mín}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Soluciones a los problemas de práctica

A continuación encontrarás las soluciones de los 20 problemas de práctica de la sección anterior. Como siempre, las soluciones que presentamos no son únicas y probablemente tampoco son las mejores, por lo que es muy posible que tú hayas encontrado una solución distinta pero igualmente válida. Si este es el caso y no estás muy seguro de su validez o simplemente la quieres compartir con nosotros te invitamos para que nos escribas a `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Prolonguemos la recta AP hasta su intersección con BC y llamemos a la intersección F.



Los triángulos ABP y BFP son isóceles ya que tienen un ángulo recto y otro de $45°$. Por lo tanto, $AP = BP = FP$, es decir P es punto medio de AF. Utilizando el teorema de Thales (ver en el apéndice el teorema 6), tenemos que MP es paralela a FC, es decir, EM es paralela a BC y como M es punto medio, E es punto medio de AB. Por lo tanto,

$$BC = 2EM = 30\,cm.$$

Solución del problema 2. Sea $p(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1$. Como a, b, c, d son las raíces de $p(x)$ tenemos que,

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \\ &= x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 \\ &\quad - (abc+abd+acd+bcd)x+abcd. \end{aligned}$$

Entonces, $abc + abd + acd + bcd = 2$ y $abcd = 1$, y por lo tanto,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{abc+abd+acd+bcd}{abcd}=\frac{2}{1}=2.$$

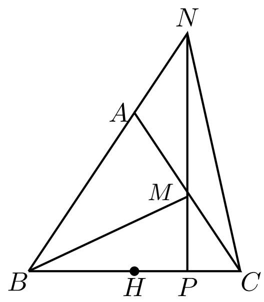
Solución del problema 3. Es claro que dos habitantes no pueden estar diciendo la verdad al mismo tiempo ni el primer día ni el segundo día, ya que de otro modo se tendrían un número diferente de plebeyos o de caballeros.
Ahora, supongamos que todos los habitantes mienten el primer día. Luego, en la isla sólo viven plebeyos y espías. Sean k el número de plebeyos y s el número de espías, es decir, $k + s = 2010$. Si $k > 0$, entonces cuando el reportero le pregunta el primer día a la k-ésima persona, ésta responde que hay exactamente k plebeyos en la isla, luego está diciendo la verdad, lo cual es una contradicción, por lo tanto $k = 0$. Entonces $s = 2010$, es decir, todos en la isla son espías; pero el primer día todos mintieron, luego el segundo día, todos dirán la verdad, lo cual es una contradicción pues no hay caballeros en la isla.
De este modo, sabemos que sólo hay una persona que dice la verdad el primer día y digamos que es la n-ésima persona a la que le pregunta el reportero. Si esta persona es un caballero, entonces el segundo día también dirá la verdad, es decir, viven n plebeyos en la isla y viven n caballeros en la isla también. Pero entonces, todas las personas restantes estan mintiendo ambos días, de donde hay 2009 plebeyos, y en consecuencia, 2009 caballeros, lo que es nuevamente una contradicción.
Finalmente, podemos concluir que la única persona que dice la verdad el primer día es un espía. Como todos los demás habitantes mienten el primer día, no pueden ser caballeros, luego no hay caballeros en la isla, de donde todos mienten el segundo día, asegurando que sólo hay un espía en la isla.

Solución del problema 4. Sea $N = (100a + 10b + c)^2 = (a + b + c)^5$. Entonces, N es un cuadrado perfecto y es la quinta potencia de un entero, lo que implica que N sea la décima potencia de un entero. Ahora, como N es el cuadrado de un número de tres dígitos y

$$2^{10}=(2^5)^2=32^2, \;\; 3^{10}=(3^5)^2=243^2 \;\; \text{y} \;\; 4^{10}=(4^5)^2=1024^2,$$

deducimos que $N = 243^2$. Por lo tanto, $a = 2$, $b = 4$ y $c = 3$ son los únicos valores posibles para a, b y c. Es fácil verificar que $243^2 = (2 + 4 + 3)^5$. Por lo tanto, $a^2 + b^2 + c^2 = 4 + 16 + 9 = 29$.

Solución del problema 5. Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$ y supongamos que P está más cerca de C que de B. Observemos que si $PM + PN$ es una constante tiene que ser dos veces la altura desde A en el triángulo ABC, ya que P puede ser el pie de dicha altura y en ese caso $M = N$.



Denotemos por (XYZ) al área del triángulo XYZ. Sea H el pie de la altura desde A sobre el lado BC. Queremos demostrar que $PM + PN = 2AH$, lo cual equivale a demostrar que

$$(MBC) + (NBC) = 2(ABC).$$

Tenemos que,

$$\begin{aligned}(MBC) + (NBC) &= [(ABC) - (ABM)] + [(ABC) + (NAC)] \\ &= 2(ABC) - (ABM) + (NAC)\end{aligned}$$

Luego, basta demostrar que $(ABM) = (NAC)$. Pero,

$$\begin{aligned}(ABM) - (NAC) &= (NBM) - (NAM) - (NAM) - (NMC) \\ &= \frac{NM}{2}(PB - 2PH - PC),\end{aligned}$$

ya que PB, PH, PC son las alturas de los triángulos NBM, NAM y NMC, respectivamente. Como ABC es un triángulo isóceles el punto H es el punto medio de BC, luego $PH + PC = HB = PB - PH$. Por lo tanto, $(MBC) + (NBC) = 2(ABC)$ y $PM + PN = 2AH$.

Solución del problema 6. Supongamos que existe un entero de la forma

$$\underbrace{444\ldots4443}_{k} \quad \text{donde} \quad k \geq 3,$$

que es divisible entre 13. Ahora, es claro que si restamos 13 a cualquier múltiplo de 13, obtenemos un nuevo número que también es divisible entre 13. De lo anterior se sigue que $444\ldots4430 = 444\ldots4443 - 13$ es divisible entre 13. Como $444\ldots4430 = 444\ldots443 \times 10$ y como 10 no es divisible entre 13, concluimos que

$$\underbrace{444\ldots443}_{k-1}$$

debe ser divisible entre 13. Podemos repetir este argumento ($k-2$ veces) hasta concluir que 43 es divisible entre 13, lo cual es evidentemente falso. Por lo tanto la hipótesis con que inciamos es falsa quedando demostrado que ningún número de la forma $444\dots4443$ es divisible entre 13. En los casos donde el número de dígitos 4 es 1 ó 0 (números 43 ó 3), el resultado es trivial.

Solución del problema 7. Ya que $(w+y)+(x+z)=100$, tenemos que $w+y=50+t$ y $x+z=50-t$ para algún número real t. Luego,

$$wx+xy+yz \leq (w+y)(x+z)=(50+t)(50-t)=2500-t^2\leq 2,500.$$

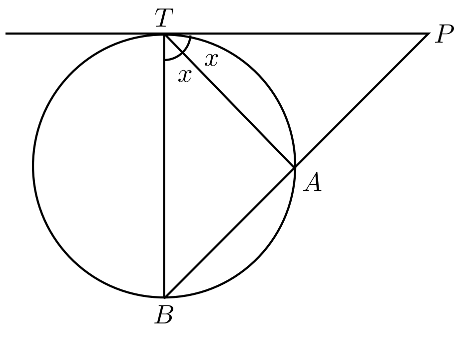
Finalmente, es fácil ver que este valor máximo se obtiene, por ejemplo, cuando $w=x=50$ y $y=z=0$. Por lo tanto, la respuesta es $2,500$.

Solución del problema 8. Observemos que $1001=7(143)\equiv 0 \pmod 7$, luego $111111=1001(111)\equiv 0 \pmod 7$.
Sea $N=\underbrace{111\dots1}_{10}a\underbrace{111\dots1}_{10}$, donde a es el dígito central de N. Luego,

$$\begin{aligned}
N &= 1+10+10^2+\cdots+10^9+10^{10}a+10^{11}+\cdots+10^{20}\\
&= 10^{10}(a-1)+\underbrace{111\dots1}_{21}\\
&= (98+2)^5(a-1)+1000(\underbrace{111\dots1}_{18})+111\\
&\equiv 2^5(a-1)+1000(111111)(1000001000001)+111 \pmod 7\\
&\equiv (28+4)(a-1)+111 \pmod 7\\
&\equiv 4(a-1)+(105+6)\equiv 4a-4+6\equiv 4a+2 \pmod 7.
\end{aligned}$$

Como N es divisible por 7, entonces (ver en el apéndice la definición 5 y el artículo de Tzaloa No. 2 de 2009) $4a+2\equiv 0 \pmod 7$, es decir, $4a\equiv 12 \pmod 7$, de donde $a\equiv 3 \pmod 7$. Como a es un dígito, la única posibilidad es $a=3$.

Solución del problema 9. Como PT es tangente a la circunferencia, entonces $\angle PTA=\angle TBA$ (ver en el apéndice el teorema 21). Luego, el triángulo TBA es isósceles con $AB=AT=10\,cm$.



Por el teorema de la bisectriz (ver en el apéndice el teorema 7), tenemos que,

$$\frac{PT}{PA} = \frac{BT}{BA} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}.$$

Sea $PT = 3k$, luego por la relación anterior tenemos que $PA = 2k$. Aplicando la potencia del punto P (ver en el apéndice el teorema 20 y el artículo de Tzaloa No. 4 de 2009), tenemos que $PT^2 = PA \cdot PB$. Luego,

$$(3k)^2 = (2k)(2k + 10),$$

de donde $k = 4$. Por lo tanto, $PT = 12\,cm$.

Solución del problema 10. Veamos que la máxima cantidad es 5.
Primero daremos un conjunto T con 5 elementos que cumplen la propiedad. Sea

$$T = \{1, 4, 7, 10, 33\}.$$

Las posibles diferencias son:

$$\begin{array}{ll} 4-1=3 & 10-4=6 \\ 7-4=3 & 33-7=26 \\ 10-7=3 & 33-4=29 \\ 33-10=23 & 33-1=32 \\ 7-1=6 & 10-1=9 \end{array}$$

Observemos que todas las diferencias tienen sus dígitos en el conjunto $\{2, 3, 6, 9\}$.
Ahora demostraremos que si un conjunto T tiene más de 5 elementos entonces no tiene la propiedad mencionada.
Sea T un conjunto con más de 5 elementos, entonces por el principio de las casillas (ver en el apéndice el teorema 1 y el artículo de Tzaloa No. 2 de 2010), habría dos de ellos que dejan el mismo residuo al dividirlos entre 5. Denotemos por n y m a estos números, y supongamos sin perdida de generalidad que $m > n$. Entonces $(m - n)$ es múltiplo de 5, luego el último dígito de $(m - n)$ es 0 ó 5, lo cual no es posible pues ninguno de estos dos números pertenecen al conjunto $\{2, 3, 6, 9\}$.

Solución del problema 11. Es claro que $x \neq 0$ y $y \neq 0$. Observemos que si (x, y) es una solución, entonces $(-x, y)$ también lo es. Además, y es un entero positivo ya que x^2 lo es. Luego, la cantidad de parejas (x, y) de enteros que cumplen la ecuación $x^2 \cdot y^3 = 6^{12}$ es igual al doble de la cantidad de parejas (x, y) de enteros positivos que la cumplen.
Sea (x, y) una pareja de enteros positivos que cumplen $x^2 \cdot y^3 = 6^{12}$, entonces ambos números x, y, sólo pueden tener factores primos 2 y 3 en su descomposición en primos (ver en el apéndice el teorema 3), pues ningún otro primo divide a 6^{12}. Sean $x = 2^a \cdot 3^b$ y $y = 2^c \cdot 3^d$, entonces,

$$x^2 \cdot y^3 = (2^a \cdot 3^b)^2 \cdot (2^c \cdot 3^d)^3 = 2^{2a+3c} \cdot 3^{2b+3d} = 2^{12} \cdot 3^{12} = 6^{12}.$$

Luego, tenemos que $2a+3c=12$ y $2b+3d=12$. Ahora, $2a+3c=12$, con a y c enteros no negativos implica que

$$(a,c)\in\{(0,4),(3,2),(6,0)\}.$$

Análogamente, $2b+3d=12$, con b y d enteros no negativos implica que

$$(b,d)\in\{(0,4),(3,2),(6,0)\}.$$

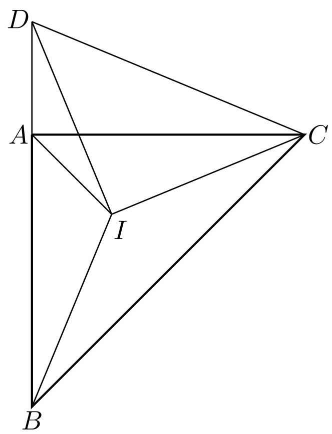
Luego, como cada elección distinta de los números a, b, c y d genera una pareja distinta (x,y), tenemos que hay $3\times 3=9$ parejas de enteros positivos. Finalmente, por la observación que se hizo al inicio, hay exactamente $2\times 9=18$ parejas (x,y) de enteros que cumplen la ecuación $x^2\cdot y^3=6^{12}$.

Solución del problema 12. Supongamos que $a^2-3a-19$ es divisible entre 289 para algún entero a. Ya que $289=17^2$, tenemos que 17 divide a

$$a^2-3a-19=(a-10)(a+7)+51.$$

Como $51=3(17)$, se sigue que 17 divide a $(a-10)(a+7)$. Ya que 17 es primo, resulta que 17 divide a $a-10$ o a $a+7$. Pero $a-10\equiv a+7$ (mod 17). Luego, 17 divide a ambos factores y por lo tanto $17^2=289$ divide a $(a-10)(a+7)$. Esto implica que 289 debe dividir a $a^2-3a-19-(a-10)(a+7)=51$ lo cual no es posible. Por lo tanto, no existe ningún entero a tal que $a^2-3a-19$ sea divisible por 289.

Solución del problema 13. Sea D un punto en la prolongación del segmento AB tal que $AD=AI$.



Entonces, $BC=AB+AI=AB+AD=BD$, de modo que el triángulo CBD es isósceles. Además BI es la bisectriz del ángulo DBC, luego I está en la mediatriz de CD y como $BI=CI$, concluimos que I es el circuncentro del triangulo CBD.
Luego, el triángulo DIB es isósceles y $\angle IDB=x=\angle IBD$. Como el triángulo

IAD es isósceles por construcción ($AI = AD$), tenemos que $\angle BAI = 2\angle IDA = 2x$ y $\angle BAC = 4x$. Observemos que el triángulo CIB es congruente al triángulo DIB, luego, $\angle ICB = x = \angle IBC$ y $\angle ABC = 2x$. Por lo tanto, en el triángulo isósceles ABC con $\angle ABC = \angle ACB$, tenemos que

$$\angle ABC = \angle ACB = 2x = \frac{1}{2}\angle BAC,$$

de donde $180° = 2\angle ABC + \angle BAC = 2\angle BAC$ y de aquí $\angle BAC = \frac{180°}{2} = 90°$.

Solución del problema 14. A partir de P definimos un nuevo polinomio Q, de forma que $Q(x) = xP(x) - 1$. Este nuevo polinomio es de grado 2009 y $Q(k) = k \cdot \frac{1}{k} - 1 = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, 2009$. Por lo tanto,

$$Q(x) = C(x-1)(x-2)\cdots(x-2008)(x-2009)$$

donde C es una constante. Ahora, el valor de C puede calcularse fácilmente, pues $Q(0) = 0 \cdot P(0) - 1 = -1$ y $Q(0) = C(-1)(-2)\cdots(-2009) = -(C)(2009!)$. De lo anterior se sigue que $C = \frac{1}{2009!}$ y entonces,

$$Q(x) = \tfrac{1}{2009!}(x-1)(x-2)\cdots(x-2009) = xP(x) - 1.$$

Por último, tomando $x = 2010$ en la ecuación anterior obtenemos que,

$$1 = \tfrac{2009!}{2009!} = 2010 \cdot P(2010) - 1,$$

de donde $P(2010) = \frac{2}{2010} = \frac{1}{1005}$.

Solución del problema 15. Sabemos que en la factorización en primos (ver en el apéndice el teorema 3) de un cuadrado perfecto, cada factor primo debe aparecer un número par de veces. Además, también se cumple que si en la factorización en primos de un número, cada factor aparece un número par de veces, entonces el número es un cuadrado perfecto. Procedamos haciendo un análisis por casos:

- Caso 1. Suponemos que a es par. Entonces, $a = 2c$, de donde $a^a = (2c)^{2c} = (2^c c^c)^2$. Luego, en este caso, a^a siempre es un cuadrado perfecto, y por lo tanto hay 50 de estos números.

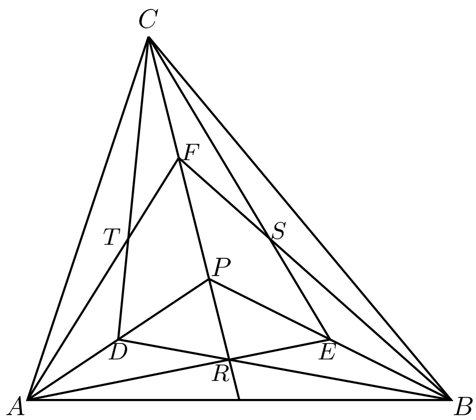
- Caso 2. Suponemos que a es impar. Entonces $a = 2c + 1$, de donde,

$$a^a = (2c+1)^{2c+1} = (2c+1)^{2c}(2c+1) = \left((2c+1)^c\right)^2(2c+1).$$

  Ahora, como $\left((2c+1)^c\right)^2$ es un cuadrado perfecto, entonces a^a es un cuadrado perfecto si y sólo si cada primo de la factorización en primos de $(2c+1)$ ocurre un número par de veces, es decir, si y sólo si $(2c+1) = a$ es en sí mismo un cuadrado perfecto. Como los únicos cuadrados perfectos impares menores que 100 son: 1, 9, 25, 49 y 81, concluimos que hay 5 de estos números.

Juntando los casos 1 y 2, tenemos que $a \in \{2, 4, 6, \ldots, 98, 100\} \cup \{1, 9, 25, 49, 81\}$, por lo que hay $50 + 5 = 55$ de estos números.

Solución del problema 16. En lo que sigue denotaremos por (ABC) al área de un triángulo ABC. Análogamente, usaremos $(ABCD)$ para representar al área de un cuadrilátero $ABCD$.
En primer lugar, consideremos al triángulo ABP. Nótese que los segmentos AE y BD son dos medianas de dicho triángulo, por lo que R es su baricentro. Si trazamos desde P a R la tercera mediana del triángulo, es fácil ver que el triángulo ABP queda dividido en seis triángulos que tienen áreas iguales (ver en el apéndice el teorema 17). Por lo tanto $(DREP) = \frac{2}{6}(ABP)$.



A través de razonamientos análogos sobre los triángulos BCP y CAP, obtenemos que $(ESFP) = \frac{1}{3}(BCP)$ y $(FTDP) = \frac{1}{3}(CAP)$. Por lo tanto,

$$(DRESFT) = \frac{1}{3}\left[(ABP) + (BCP) + (CAP)\right] = \frac{1}{3}(ABC).$$

De donde es claro que el área del hexágono sólo depende del área del triángulo y no depende de la ubicación del punto inerior P.

Solución del problema 17. Sea r la raíz común de los dos polinomios. Entonces,

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \text{y} \quad (c-b)r^2 + (c-a)r + (a+b) = 0.$$

Restando estas igualdades obtenemos $(a+b-c)r^2 + (a+b-c)r - (a+b-c) = 0$.
Si $a+b-c = 0$, entonces $a+b+2c = c+2c = 3c$ es múltiplo de 3.
Supongamos que $a+b-c \neq 0$. Entonces, la igualdad

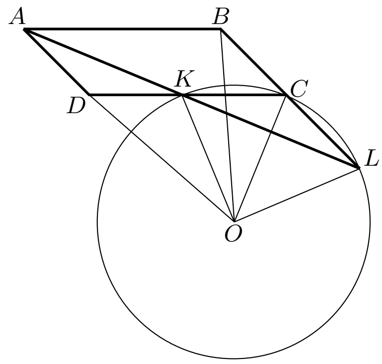
$$(a+b-c)r^2 + (a+b-c)r - (a+b-c) = 0$$

es equivalente a la igualdad $r^2 + r - 1 = 0$, de donde $r^2 = 1 - r$. Luego,

$$0 = ar^2 + br + c = a(1-r) + br + c = (b-a)r + a + c,$$

y de aquí, $r(a-b)=a+c$. Si $a=b$, entonces $a+c=0$, es decir, $c=-a$, y por lo tanto $a+b+2c=a+a-2a=0$ es múltiplo de 3. Si $a\neq b$, entonces $r=\frac{a+c}{a-b}$ es un número racional. Por otro lado, las soluciones de la ecuación $r^2+r-1=0$ son $r=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, es decir, son irracionales, lo que es una contradicción. Por lo tanto, el caso $a\neq b$ no puede suceder, y en los demás casos tenemos que $a+b+2c$ es múltiplo de 3.

Solución del problema 18. Como el paralelogramo $ABCD$ no es un rombo, tenemos que $AB\neq AD$. Sin pérdida de generalidad, supongamos, que $AB>AD$. En este caso K está entre C y D; y C está entre B y L. Tomando en cuenta que AK es bisectriz de $\angle BAD$, que AB es paralela con DC y que AD es paralela con BC (ver en el apéndice la definición 9), es fácil ver que: $\angle BAK=\angle DAK=\angle DKA=\angle CKL=\angle CLK$.



Por lo tanto, $DK=DA=BC$ y $BL=BA=DC$. Sean O el centro y r el radio de la circunferencia que pasa por C, K y L. Tomando la potencia del punto D con respecto a esta circunferencia (ver en el apéndice el teorema 20 y el artículo de Tzaloa No. 4 de 2009) tenemos que

$$(DO-r)(DO+r)=DO^2-r^2=DK\cdot DC.$$

De forma análoga, tomando la potencia del punto B obtenemos

$$(BO-r)(BO+r)=BO^2-r^2=BC\cdot BL.$$

Por lo que concluimos que $DO=BO$. Ahora sabemos que los triángulos DKO y BCO son congruentes por el criterio LLL (ver en el apéndice el criterio 14), por lo que $\angle OBC=\angle ODK=\angle ODC$, quedando demostrado que $OCBD$ es un cuadrilátero cíclico.

Solución del problema 19. Si $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8\}$, los siguientes subconjuntos de A satisfacen las condiciones del problema.

$$A_1=\{a_1,a_2,a_3\}, A_2=\{a_1,a_4,a_5\}, A_3=\{a_1,a_6,a_7\}, A_4=\{a_8,a_3,a_4\},$$

$$A_5=\{a_8,a_2,a_6\}, A_6=\{a_8,a_5,a_7\}, A_7=\{a_3,a_5,a_6\}, A_8=\{a_2,a_4,a_7\}.$$

Demostraremos que el máximo número de subconjuntos de A que cumplen las condiciones del problema es 8. Supongamos, por contradicción, que podemos hallar 9 subconjuntos. Como cada uno tiene 3 elementos, tenemos 27 elementos entre los 9 subconjuntos. Como A tiene 8 elementos, por el principio de las casillas (ver en el apéndice el teorema 1 y el artículo de Tzaloa No. 2 de 2010), hay un elemento x que aparece en al menos 4 de los subconjuntos. En estos 4 subconjuntos tenemos $3(4) - 4 = 8$ elementos distintos de x, y como hay 7 elementos distintos de x, por el principio de las casillas hay un elemento y que aparece en 2 subconjuntos que contienen a x. Esos dos subconjuntos contienen a x y y en su intersección, lo que contradice que la intersección de cualesquiera dos subconjuntos no tiene 2 elementos. Por lo tanto, la respuesta es 8.

Solución del problema 20. Reordenando, si es necesario, podemos suponer que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$. Debemos demostrar que $a_1 \leq 4a_n$. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (ver en el apéndice el teorema 2), tenemos que

$$(a_n + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_1)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq \left(\sqrt{\frac{a_n}{a_1}} + n - 2 + \sqrt{\frac{a_1}{a_n}}\right)^2.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 &\geq \left(\sqrt{\frac{a_n}{a_1}} + (n-2) + \sqrt{\frac{a_1}{a_n}}\right)^2 \\
n + \frac{1}{2} &\geq n - 2 + \sqrt{\frac{a_n}{a_1}} + \sqrt{\frac{a_1}{a_n}} \\
\frac{5}{2} &\geq \sqrt{\frac{a_n}{a_1}} + \sqrt{\frac{a_1}{a_n}} \\
\frac{17}{4} &\geq \frac{a_n}{a_1} + \frac{a_1}{a_n} \\
0 &\geq (a_1 - 4a_n)\left(a_1 - \frac{a_n}{4}\right).
\end{aligned}$$

Ya que $a_1 \geq a_n$, tenemos que $a_1 - \frac{a_n}{4} > 0$, de modo que $a_1 - 4a_n \leq 0$, es decir, $a_1 \leq 4a_n$, como queríamos.

Problemas propuestos

Problemas propuestos. Año 2010 No. 3.

Tzaloa se construye con la contribución de todos y esta sección está especialmente diseñada para que sus lectores tengan un espacio de participación. A continuación, presentamos 5 problemas nuevos que necesitan de ti para encontrar su solución.

Para dar tiempo a que nos puedas enviar tus soluciones, las respuestas de los problemas propuestos en cualquier número de la revista, se publican con dos números de diferencia. Es así, que en este número (Tzaloa 3, año 2010), aparecen las respuestas de los problemas propuestos en Tzaloa 1, año 2010; y las respuestas de los problemas propuestos de este número, se publicarán en Tzaloa 1, año 2011, por lo que aún tienes tiempo para enviarnos tu contribución.

Ponemos a tu disposición nuestra dirección electrónica `revistaomm@gmail.com` ya que a través de ella estaremos recibiendo con gusto todas las soluciones que nos lleguen desde cualquier rincón del país.

Problema 1. (Intermedio) Considera la suma, la diferencia positiva, el producto y el cociente mayor que 1 de dos enteros positivos distintos. Si al sumar los cuatro resultados obtienes 450, determina los dos números.

Problema 2. (Intermedio) En un tablero de 123 renglones y 123 columnas, cada casilla es pintada de rojo o azul de acuerdo con las siguientes condiciones:

1. Cada casilla pintada de rojo que no esté en el borde del tablero tiene exactamente 5 casillas azules entre sus 8 casillas vecinas.

2. Cada casilla pintada de azul que no esté en el borde del tablero tiene exactamente 4 casillas rojas entre sus 8 casillas vecinas.

Determina el número de casillas pintadas de rojo en el tablero.

Problema 3. (Intermedio) Demuestra que si en un triángulo de área S el producto de las longitudes de dos de sus medianas es igual a $\frac{3}{2}S$, entonces dichas medianas son perpendiculares.

Problema 4. (Intermedio) Sea x un número real que satisface la ecuación $x^2 + \frac{1}{x^2} = p^2 - 2$, donde p es un número primo. Demuestra que para todo entero n, el valor de la expresión $x^n + \frac{1}{x^n}$ es un número entero y calcula su valor en función de p.

Problema 5. (Avanzado) Determina todos los enteros positivos a y b tales que

$$\frac{b^2 a}{a+b}$$

sea un número primo.

Soluciones a los problemas propuestos. Año 2010 No. 1.

Como se mencionó al principio de esta sección, a continuación publicamos las soluciones de los problemas propuestos en Tzaloa 1, año 2010. Recuerda que esta revista necesita de ti y ten la seguridad que en el próximo número nos encantaría poder publicar tus soluciones. En esta ocasión nos da mucho gusto felicitar a Francisco Gómez Hernández, del estado de Hidalgo, quien nos envió su solución del problema 5.

Problema 1. (Introductorio) Encuentra todas las parejas de números enteros (p,q) tales que la diferencia entre las dos soluciones de la ecuación $x^2 + px + q = 0$ sea 2010.

Solución. Tenemos que $x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2-4q}}{2}$, entonces la diferencia entre las dos soluciones es

$$\frac{-p + \sqrt{p^2-4q}}{2} - \frac{-p - \sqrt{p^2-4q}}{2} = \sqrt{p^2-4q} = 2010.$$

Luego, queremos que $4q = p^2 - 2010^2 = (p+2010)(p-2010)$. Esto implica que p tiene que ser un número par, y además para cada número par hay un valor de q que satisface las condiciones del problema. Por lo tanto hay una infinidad de soluciones, basta que $p = 2k$ para cualquier entero k y $q = (k+1005)(k-1005)$.

Problema 2. (Introductorio) Si n es un entero divisible entre 7 que es igual al producto de tres números consecutivos, ¿cuál (o cuáles) de los enteros 6, 14, 21, 28 y 42 no es necesariamente un divisor de n?

Solución. Tenemos que $n = (a-1)a(a+1) = a(a^2-1)$ y es también igual a $7k$, para algunos enteros a y k. Entonces, $a(a^2-1) = 7k$. Observemos primero que alguno de los números a ó a^2-1 es par, por lo que k es un número par y n es siempre divisible entre 14. Entonces $k = 2l$ y $a(a^2-1) = 14l$ para algún entero l.

Como $a(a^2-1)$ es el producto de tres números consecutivos, uno de ellos tiene que ser divisible entre 3. Por lo tanto, l es divisible entre 3, es decir, $l = 3m$ para algún entero m. Lo que implica que $n = 42m$ y que 6, 21 y 42 son siempre divisores de n.
Finalmente veamos que 28 no es necesariamente divisor de n. Por lo anterior, el menor valor posible de n es cuando $a + 1 = 7$, entonces $n = 5 \times 6 \times 7 = 210$ que no es divisible entre 28.

Problema 3. (Introductorio) Sea $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ un polígono regular de nueve lados. ¿Cuántos triángulos equiláteros se pueden formar tales que al menos dos de sus vértices estén en el conjunto $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9\}$?

Solución. Podemos suponer que los lados del polígono miden $1\,cm$, llamemos O al centro del polígono. Antes de empezar a contar observemos que la distancia de un vértice A_i a O es mayor que $1\,cm$ ya que el ángulo en O del triángulo A_1OA_2 mide $\frac{360°}{9} = 40°$.
Vamos a contar los triángulo equiláteros por casos dependiendo de los dos vértices que están en el conjunto $V = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9\}$.

- Si A_iA_{i+1} es una arista del triángulo equilátero (observemos que estamos contando la arista A_9A_1 ya que contamos los subíndices módulo 9, es decir, $9+1 = 10 = 1$ módulo 9). Si construimos un triángulo equilátero con un lado igual A_iA_{i+1} su tercer vértice no pertenece al conjunto V. Como con cada arista podemos construir dos triángulo equiláteros y hay 9 aristas, tenemos en este caso 18 triángulos equiláteros.

  Observemos que este caso y el caso A_iA_{i+8} son el mismo.

- Si A_iA_{i+2} es una arista. La mediatriz del segmento A_iA_{i+2} contiene al vértice A_{i+1} y no contiene ningún otro vértice del conjunto V. Por lo tanto, si construimos un triángulo equilátero con lado A_iA_{i+2} el tercer vértice no está en V. Como en el caso precendente, en este caso podemos formar $2\times 9 = 18$ triángulos equiláteros.

  Observemos que este caso es el mismo que considerar A_iA_{i+7}.

- Si A_iA_{i+3} es una arista. En la mediatriz de este segmento está el vértice A_{i+6} y el triángulo $A_iA_{i+3}A_{i+6}$ es equilátero. Triángulos como esté hay 3 ($A_1A_4A_7$, $A_2A_5A_8$ y $A_3A_6A_9$). Con cada una de estas 9 aristas podemos formar otro triángulo equilátero, por lo que en este caso hay $3 + 9 = 12$ triángulos.

  Observemos que este caso es el mismo que considerar A_iA_{i+6}.

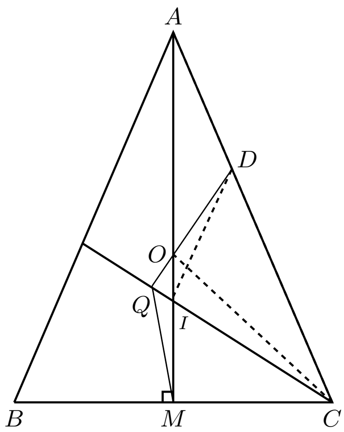
- Si A_iA_{i+4} es una arista. Este caso es análogo a los primeros dos, por lo que hay 18 triángulos equiláteros.

  Observemos que este caso es el mismo que considerar A_iA_{i+5}.

Por lo tanto, en total podemos formar $18 \times 3 + 12 = 66$ triángulos equiláteros.

Problema 4. (Intermedio) Sea ABC un triángulo acutángulo e isósceles con $AC = AB$. Sean O su circuncentro e I su incentro. Si D es el punto de intersección de AC con la perpendicular a CI que pasa por O, demuestra que ID y AB son paralelas.

Solución. Sea M el punto medio de BC. Como el triángulo ABC es isósceles, tenemos que los puntos A, I, O y M son colineales y AM es perpendicular a BC. Sea Q el punto de intersección de OD con IC.



Como $\angle OQC = \angle OMC = 90°$, el cuadrilátero $OQMC$ es cíclico, de modo que $\angle QOM = \angle QCM$. Como IC es bisectriz del ángulo ACB (ya que I es incentro), tenemos que $\angle QOI = \angle ICM = \angle DCI$. Luego,

$$180° = \angle DOI + \angle QOI = \angle DOI + \angle DCI,$$

y por lo tanto, el cuadrilátero $DOIC$ es cíclico. De aquí que $\angle DCO = \angle DIO$. Ahora, como O es el circuncentro del triángulo ABC, tenemos que $AO = OC$ y $\angle OAC = \angle DCO$. Luego, como AI es bisectriz del ángulo BAC, resulta que $\angle OAC = \angle IAB$ y por lo tanto $\angle IAB = \angle AID$. Es decir, ID y AB son paralelas.

Problema 5. (Avanzado) Sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. A cada subconjunto B de A se le asocia su suma alternada S_B, definida como sigue: si $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ con $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, entonces $S_B = a_k - a_{k-1} + a_{k-2} - \cdots \pm a_1$. Por ejemplo, si $n = 10$ y $B = \{2, 4, 5, 7, 8\}$ entonces $S_B = 8 - 7 + 5 - 4 + 2 = 4$.
Si n es un número fijo, determina el valor de la suma

$$\sum_{B \subset A} S_B,$$

es decir, la suma de todos los números S_B con B subconjunto de A.

Solución de Francisco Gómez Hernández. Sea $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Supongamos que

$$f(n) = \sum_{B \subset A} S_B.$$

Vamos a demostrar que $f(n) = n \cdot 2^{n-1}$.
Si $n = 1$, tenemos que $A = \{1\}$, y por lo tanto sólo hay 2 subconjuntos $\emptyset$ y $\{1\}$, de modo que $f(1) = 1 = 1 \cdot 2^{1-1}$.

Si $n > 1$, tenemos dos casos, que el subconjunto B contenga a n o que no lo contenga. Sabemos que hay 2^{n-1} subconjuntos que tienen a n, y 2^{n-1} subconjuntos que no lo tienen.
Si consideramos los subconjuntos que no contienen a n, entonces sólo vamos a calcular la suma de las sumas alternadas de los subconjuntos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Pero esta suma es igual a $f(n-1)$.
Si ahora consideramos los subconjuntos que contienen a n, podemos suponer que son de la forma $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, n\}$ con $a_1 < a_2 < \cdots < a_k < n$, de modo que $S_B = n - (a_k - \cdots \pm a_2 \mp a_1)$. Pero al considerar los subconjuntos $B' = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, entonces la suma de las sumas alternadas de los subconjuntos de B' será igual a la suma de las sumas alternadas de los subconjuntos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ que es igual a $f(n-1)$, y como hay 2^{n-1} subconjuntos de estos, n se repite esta cantidad de veces. Por lo tanto, la suma de estas sumas alternadas es igual a $n \cdot 2^{n-1} - f(n-1)$.
De todo lo anterior, concluimos que $f(n) = f(n-1) + (n \cdot 2^{n-1} - f(n-1)) = n \cdot 2^{n-1}$, como queríamos demostrar.

Segunda solución. Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, sean $A_k = \{1, 2, \ldots, k\}$ y

$$S_k = \sum_{B \subset A_k} S_B.$$

Observemos que

$$S_{k+1} = \sum_{B \subset A_{k+1}} S_B = \sum_{\substack{C \subset A_{k+1} \\ k+1 \notin C}} S_C + \sum_{\substack{D \subset A_{k+1} \\ k+1 \in D}} S_D.$$

Como $k+1 \notin C$, tenemos que $C \subset A_k$. Luego,

$$\sum_{\substack{C \subset A_{k+1} \\ k+1 \notin C}} S_C = \sum_{B \subset A_k} S_B = S_k.$$

Por otra parte,

$$\sum_{\substack{D \subset A_{k+1} \\ k+1 \in D}} S_D = \sum_{B \subset A_k} [(k+1) - S_B]$$

ya que si $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, k+1\}$, entonces $S_D = (k+1) - a_k + a_{k-1} - \cdots \pm a_1$, y como $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subset A_k$ se sigue que $S_D = (k+1) - S_B$ con $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.
Luego,

$$\sum_{B \subset A_k} [(k+1) - S_B] = \sum_{B \subset A_k} (k+1) - \sum_{B \subset A_k} S_D = (k+1)2^k - S_k,$$

ya que el número de subconjuntos de A_k es 2^k.
Por lo tanto,

$$S_{k+1} = \sum_{B \subset A_{k+1}} S_B = S_k + (k+1)2^k - S_k = (k+1)2^k$$

para todo $k = 1, 2, \ldots, n-1$.
En particular, $S_n = n \cdot 2^{n-1}$.

Olimpiadas Internacionales

A continuación presentamos los resultados y los exámenes de las distintas olimpiadas internacionales en las que México participó en la primera mitad de este año 2010.

XXII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico

Desde 1991, los ganadores del Concurso Nacional participan anualmente en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, APMO, por sus siglas en inglés. En México, el 8 de marzo de este año, se aplicó el examen de la XXII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico a los alumnos que en ese momento formaban parte de la preselección nacional. Dicho examen se calificó en México y los 10 mejores exámenes se enviaron, para ser evaluados, al país organizador que en esta ocasión fue Japón. Los alumnos que obtuvieron medalla fueron: Daniel Perales Anaya (Morelos) y Flavio Hernández González (Aguascalientes) obtuvieron medalla de plata; Fernando Josafath Añorve López (Nuevo León), José Luis Miranda Olvera (Jalisco), Irving Daniel Calderón Camacho (Estado de México), José Ramón Guardiola Espinosa (San Luis Potosí) y Julio César Díaz Calderón (Oaxaca), obtuvieron medalla de bronce; Fernando Ignacio Arreola Gutiérrez (Aguascalientes), obtuvo una mención honorífica. México ocupó el lugar número 15 de los 33 países participantes.

A continuación presentamos el examen de la XXII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico. Los alumnos tuvieron 4 horas para resolverlo.

Problema 1. Sea ABC un triángulo con $\angle BAC \neq 90°$. Sea O el circuncentro del triángulo ABC y sea Γ el circuncírculo del triángulo BOC. Suponga que Γ intersecta a los segmentos AB y AC en los puntos P (diferente de B) y Q (diferente de C), respectivamente. Sea ON el diámetro del círculo Γ. Muestra que el cuadrilátero $APNQ$ es un paralelogramo.

Problema 2. Dado un entero positivo k, decimos que un entero es una *potencia k-ésima pura* si puede ser representado como m^k para algún entero m. Muestra que para cada entero positivo n existen n enteros positivos distintos tales que su suma es una potencia 2009-ésima pura, y su producto es una potencia 2010-ésima pura.

Problema 3. Sea n un entero positivo. En cierta fiesta asisten n personas. Para cualquier par de participantes, o los dos se conocen entre ellos o los dos no se conocen entre ellos. Encuentra el máximo número posible de parejas tal que en cada pareja, las dos personas no se conocen entre sí pero existe un amigo en común entre los participantes de la fiesta.

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo que satisface que $AB > BC$ y que $AC > BC$. Sean O y H el circuncentro y el ortocentro del triángulo ABC, respectivamente. Suponga que el circuncírculo del triángulo AHC intersecta a la recta AB en M (diferente de A), y suponga que el circuncírculo del triángulo AHB intersecta a la recta AC en N (diferente de A). Muestra que el circuncírculo del triángulo MNH está sobre la recta OH.

Problema 5. Encuentra todas las funciones f del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales a $\mathbb{R}$ que satisfacen para $x, y, z \in \mathbb{R}$ la identidad

$$f(f(x) + f(y) + f(z)) = f(f(x) - f(y)) + f(2xy + f(z)) + 2f(xz - yz).$$

American Mathematics Competition (AMC)

En el mes de marzo se pidió al comité de la olimpiada de Estados Unidos, el examen de la primera fase que aplican a nivel nacional. Dicho examen consta de dos niveles, el AMC 10 y el AMC 12, y en cada nivel los concursantes tienen 75 minutos para resolverlo. Los estudiantes mexicanos que en ese momento eran parte de la preselección nacional para la Olimpiada Centroamericana y del Caribe, presentaron el examen AMC 10, y los estudiantes que en ese momento eran parte de la preselección nacional para las Olimpiadas Iberoamericana e Internacional, presentaron el examen AMC 12. Los ganadores del equipo mexicano fueron: Diego Alonso Roque Montoya (Nuevo León) quien obtuvo el primer lugar con 109.5 puntos en el AMC 10; Flavio Hernández González (Aguascalientes), quien obtuvo segundo lugar con 105 puntos en el AMC 12; Juan Carlos Ortiz Rhoton (Jalisco), quien obtuvo el tercer lugar con 103.5 puntos en el AMC 12. Diego y Juan Carlos obtuvieron un reconocimiento especial por ser menores de 15 años y obtener más de 90 puntos en el examen.

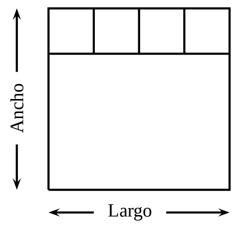
A continuación presentamos los exámenes del concurso AMC (American Mathematics Competition) de este año.

AMC $10A$

Problema 1. La parte superior de la biblioteca de María tiene cinco libros con los siguientes anchos, en centímetros: $6, \frac{1}{2}, 1, 2.5$ y 10. ¿Cuál es el ancho promedio de los libros, en centímetros?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 2. Cuatro cuadrados idénticos y un rectángulo son organizados para formar un cuadrado más grande como se muestra. ¿Cuál es la proporción entre el largo y el ancho del rectángulo?



(a) $\frac{5}{4}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) 2 (e) 3

Problema 3. Tyrone tenía 97 canicas y Eric tenía 11 canicas. Tyrone le dio algunas de sus canicas a Eric de tal manera que Tyrone terminó con el doble de canicas que Eric. ¿Cuántas canicas le dio Tyrone a Eric?

(a) 3 (b) 13 (c) 18 (d) 25 (e) 29

Problema 4. La lectura de un libro que se va a grabar en discos compactos dura 412 minutos. Cada disco puede tener hasta 56 minutos de lectura. Asuma que se usan el menor número posible de discos y que cada disco contiene la misma cantidad de lectura. ¿Cuántos minutos de lectura contendrá cada disco?

(a) 50.2 (b) 51.5 (c) 52.4 (d) 53.8 (e) 55.2

Problema 5. La longitud de una circunferencia es 24π y su área es $k\pi$. ¿Cúal es el valor de k?

(a) 6 (b) 12 (c) 24 (d) 36 (e) 144

Problema 6. Se define la operación $\spadesuit(x, y)$ para números positivos x y y como

$$\spadesuit(x, y) = x - \frac{1}{y}.$$

¿Cuál es el resultado de $\spadesuit(2, \spadesuit(2, 2))$?

(a) $\frac{2}{3}$ (b) 1 (c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{5}{3}$ (e) 2

Problema 7. Crystal trota diariamente el mismo recorrido. Ella comienza su trote dirigiéndose hacia el norte una milla. Luego trota al noreste por una milla, luego al sureste por una milla. El último tramo de su trote la lleva en línea recta de regreso a donde ella comenzo. ¿Cuán larga, en millas, es esta última porción de su trote?

(a) 1 (b) $\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) 2 (e) $2\sqrt{2}$

Problema 8. Tony trabaja 2 horas al día y se le paga $\$0.50$ por hora por cada año completo de su edad. Durante un periodo de seis meses Tony trabajó 50 días y ganó $\$630$. ¿Qué edad tenía Tony al final del periodo de seis meses?

(a) 9 (b) 11 (c) 12 (d) 13 (e) 14

Problema 9. Un *palíndrome*, tal como 83438, es un número que permanece igual cuando sus dígitos son puestos en orden inverso. Los números x y $x + 32$ son palíndromes de tres y cuatro dígitos, respectivamente. ¿Cuál es la suma de los dígitos de x?

(a) 20 (b) 21 (c) 22 (d) 23 (e) 24

Problema 10. Marvin cumplió años el martes 27 de mayo en el año bisiesto 2008. En qué año será la próxima vez que caiga su cumpleaños en un día sábado?

(a) 2011 (b) 2010 (c) 2013 (d) 2015 (e) 2017

Problema 11. La longitud del intervalo de soluciones de la desigualdad $a \leq 2x+3 \leq b$ es 10. ¿Cuál es el valor de $b - a$?

(a) 6 (b) 10 (c) 15 (d) 20 (e) 30

Problema 12. Logan está construyendo un modelo a escala de su pueblo. La torre del tanque de agua tiene 40 metros de alto, y la parte superior es una esfera que contiene $100,000$ litros de agua. La torre miniatura de Logan contiene 0.1 litros. ¿Cuán alta, en metros, debería hacer Logan su torre?

(a) 0.04 (b) $\frac{0.4}{\pi}$ (c) 0.4 (d) $\frac{4}{\pi}$ (e) 4

Problema 13. Angelina manejó con una velocidad promedio de $80\,kph$ y luego hizo una parada de 20 minutos por gasolina. Después de la parada, ella manejó con una velocidad promedio de $100\,kph$. En total ella recorrió $250\,km$ con un tiempo total de viaje de 3 horas incluyendo la parada. ¿Qué ecuación podría ser usada para hallar el tiempo t en horas en el que ella manejó antes de su parada?

(a) $80t + 100\left(\frac{8}{3} - t\right) = 250$ (b) $80t = 250$ (c) $100t = 250$ (d) $90t = 250$
(e) $80\left(\frac{8}{3} - t\right) + 100t = 250$

Problema 14. En el triángulo ABC se tiene que $AB = 2 \cdot AC$. Sean D y E puntos sobre AB y BC, respectivamente tales que $\angle BAE = \angle ACD$. Sea F la interseccion de los segmentos AE y CD, y suponga que el triángulo CFE es equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle ACB$?

(a) $60°$ (b)$75°$ (c) $90°$ (d) $105°$ (e) $120°$

Problema 15. En un pantano mágico hay dos especies de anfibios parlantes: sapos, que siempre dicen la verdad, y ranas, quienes siempre mienten. Cuatro anfibios, Brian, Chris, LeRoy y Mike viven juntos en este pantano y cada uno dice lo siguiente:

Brian:	"Mike y yo somos de especies diferentes."
Chris:	"LeRoy es una rana."
LeRoy:	"Chris es una rana."
Mike:	"De los cuatro de nosotros, al menos dos son sapos."

¿Cuántos de los anfibios son ranas?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 16. Las longitudes de los lados del triángulo ABC son números enteros y ninguno de sus ángulos mide $0°$. Sea D un punto sobre el lado AC tal que BD es bisectriz del ángulo $\angle ABC$, $AD = 3$, y $DC = 8$. ¿Cuál es el menor valor que el perímetro de dicho triángulo puede tener?

(a) 30 (b) 33 (c) 35 (d) 36 (e) 37

Problema 17. Las aristas de un cubo sólido tienen 3 pulgadas de longitud. Se hace un agujero cuadrado de 2 pulgadas por 2 pulgadas en el centro de cada cara del cubo. Las aristas de cada corte son paralelas a las aristas del cubo, y cada agujero atraviesa totalmente el cubo. ¿Cuál es el volumen del sólido resultante?

(a) 7 (b) 8 (c) 10 (d) 12 (e) 15

Problema 18. Bernardo elige aleatoriamente 3 números distintos del conjunto

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

y los ordena en orden descendente para formar un número de 3 dígitos. Silvia elige aleatoriamente 3 números distintos del conjunto

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

y también los ordena en orden descendente para formar un número de 3 dígitos. ¿Cuál es la probabilidad que el número de Bernardo sea mayor que el número de Silvia?

(a) $\frac{47}{12}$ (b) $\frac{37}{56}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{49}{72}$ (e) $\frac{39}{56}$

Problema 19. Los lados del hexágono equiangular $ABCDEF$ tienen losgitudes $AB = CD = EF = 1$ y $BC = DE = FA = r$. El área del triángulo ACE es el $70\,\%$ del área del hexágono. ¿Cuál es la suma de todos los valores que puede tener r?

(a) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (b) $\frac{10}{3}$ (c) 4 (d) $\frac{17}{4}$ (e) 6

Problema 20. Una mosca atrapada dentro de una caja cúbica con arista de longitud 1 metro decide aliviar su aburrimiento visitando cada esquina de la caja. Comenzará y terminará en la misma esquina y visitará cada una de las otras esquinas exactamente una vez. Para ir de una esquina a cualquier otra esquina, lo hará volando o caminando en el interior del cubo siempre en línea recta. ¿Cuál es la longitud máxima posible, en metros, de su recorrido?

(a) $4+4\sqrt{2}$ (b) $2+4\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ (c) $2+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}$ (d) $4\sqrt{2}+4\sqrt{3}$(e) $3\sqrt{2}+5\sqrt{3}$

Problema 21. El polinomio $x^3-ax^2+bx-2010$ tiene tres raíces enteras positivas. ¿Cuál es el menor valor que a puede tener?

(a) 78 (b) 88 (c) 98 (d) 108 (e) 118

Problema 22. Se eligen ocho puntos en una circunferencia y se trazan cuerdas conectando cada par de puntos. No hay tres cuerdas que se intersecten en un mismo punto en el interior de la circunferencia. ¿Cuántos triángulos con todos sus vértices en el interior de la circunferencia son formados?

(a) 28 (b) 56 (c) 70 (d) 84 (e) 140

Problema 23. Cada una de 2010 cajas alineadas contiene una sola canica roja, y para $1 \leq k \leq 2010$, la caja en la posición k-ésima contiene también k canicas blancas. Isabella comienza en la primera caja y extrae sucesivamente en orden una sola canica aleatoriamente de cada caja. Ella se detiene cuando extrae por primera vez una canica roja. Sea $P(n)$ la probabilidad de que Isabella se detenga después de extraer exactamente n canicas. ¿Cuál es el menor valor de n para el cual $P(n) < \frac{1}{2010}$?

(a) 45 (b) 63 (c) 64 (d) 201 (e) 1005

Problema 24. Sea n el número formado por los dos últimos dígitos diferentes de cero de $90!$. ¿A qué es igual n?

(a) 12 (b) 32 (c) 48 (d) 52 (e) 68

Problema 25. Jim comienza con un entero positivo n y crea una sucesión de números. Cada término sucesivo es obtenido sustrayendo el mayor número entero cuadrado perfecto que es menor o igual que el término anterior, hasta que obtenga cero. Por ejemplo, si Jim comienza con $n=55$, entonces su sucesión contiene 5 números:

$$55,\ \ 55-7^2=6,\ \ 6-2^2=2,\ \ 2-1^2=1,\ \ 1-1^2=0.$$

Sea N el menor número entero para el cual la sucesión de Jim tiene 8 números. ¿Cuál es el dígito en las unidades de N?

(a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 9

AMC $12A$

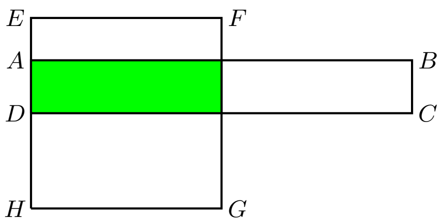
Problema 1. ¿Cuál es el valor de $(20 - (2010 - 201)) + (2010 - (201 - 20))$?

(a) -4020 (b) 0 (c) 40 (d) 401 (e) 4020

Problema 2. Un transbordador lleva turistas a una isla cada hora comenzando a las 10 AM hasta su último viaje, que comienza a las 3 PM. Un día el capitán de la embarcación nota que en el viaje de las 10 AM había 100 turistas en el transbordador, y que en cada viaje sucesivo, el número de turistas fue uno menor que en el viaje anterior. ¿Cuántos turistas llevó el transbordador a la isla ese día?

(a) 585 (b) 594 (c) 672 (d) 679 (e) 694

Problema 3. El rectángulo $ABCD$, mostrado a continuación, comparte el $50\,\%$ de su área con el cuadrado $EFGH$. El cuadrado $EFGH$ comparte el $20\,\%$ de su área con el rectángulo $ABCD$. ¿Cuál es el valor de $\frac{AB}{AD}$?



(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 8 (e) 10

Problema 4. Si $x < 0$, ¿cuál de las siguientes opciones debe ser positiva?

(a) $\frac{x}{|x|}$ (b) $-x^2$ (c) -2^x (d) $-x^{-1}$ (e) $\sqrt[3]{x}$

Problema 5. Después de cumplirse la mitad de un torneo de arquería de 100 tiros, Chelsea lo va liderando por 50 puntos. Para cada tiro en el centro del blanco se obtienen 10 puntos, con otros puntajes posibles de 8, 4, 2 y 0. Chelsea obtiene al menos 4 puntos en cada tiro. Si en los siguientes n tiros Chelsea da en el centro del blanco, ella garantizará su victoria. ¿Cuál es el menor valor que puede tener n?

(a) 38 (b) 40 (c) 42 (d) 44 (e) 46

Problema 6. Un *palíndrome*, tal como 83438, es un número que permanece igual cuando sus dígitos son puestos en orden inverso. Los números x y $x + 32$ son palíndromes de tres y cuatro dígitos, respectivamente. ¿Cuál es la suma de los dígitos de x?

(a) 20 (b) 21 (c) 22 (d) 23 (e) 24

Problema 7. Logan está construyendo un modelo a escala de su pueblo. La torre del tanque de agua tiene 40 metros de alto, y la parte superior es una esfera que contiene $100,000$ litros de agua. La torre miniatura de Logan contiene 0.1 litros. ¿Cuán alta, en metros, debería hacer Logan su torre?

(a) 0.04 (b) $\frac{0.4}{\pi}$ (c) 0.4 (d) $\frac{4}{\pi}$ (e) 4

Problema 8. En el triángulo ABC se tiene que $AB = 2 \cdot AC$. Sean D y E puntos sobre AB y BC, respectivamente, tales que $\angle BAE = \angle ACD$. Sea F la intersección de los segmentos AE y CD, y suponga que el triángulo CFE es equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle ACB$?

(a) $60°$ (b) $75°$ (c) $90°$ (d) $105°$ (e) $120°$

Problema 9. Las aristas de un cubo sólido tienen 3 pulgadas de longitud. Se hace un agujero cuadrado de 2 pulgadas por 2 pulgadas en el centro de cada cara del cubo. Las aristas de cada corte son paralelas a las aristas del cubo, y cada agujero atraviesa totalmente el cubo. ¿Cuál es el volumen del sólido resultante?

(a) 7 (b) 8 (c) 10 (d) 12 (e) 15

Problema 10. Los primeros cuatro términos de una sucesión aritmética son p, 9, $3p-q$ y $3p+q$. ¿Cuál es el término 2010-ésimo de esta sucesión?

(a) 8041 (b) 8043 (c) 8045 (d) 8047 (e) 8049

Problema 11. La solución de la ecuación $7^{x+7} = 8^x$ puede ser expresada en la forma $x = \log_b 7^7$. ¿A qué es igual b?

(a) $\frac{7}{15}$ (b) $\frac{7}{8}$ (c) $\frac{8}{7}$ (d) $\frac{15}{8}$ (e) $\frac{15}{7}$

Problema 12. En un pantano mágico hay dos especies de anfibios parlantes: sapos, que siempre dicen la verdad, y ranas, quienes siempre mienten. Cuatro anfibios, Brian, Chris, LeRoy y Mike viven juntos en este pantano y cada uno dice lo siguiente:

Brian:	“Mike y yo somos de especies diferentes.”
Chris:	“LeRoy es una rana.”
LeRoy:	“Chris es una rana.”
Mike:	“De los cuatro de nosotros, al menos dos son sapos.”

¿Cuántos de estos anfibios son ranas?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 13. ¿Para cuántos valores enteros de k resulta que los gráficos de $x^2 + y^2 = k^2$ y $xy = k$ no se intersectan?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4 (e) 8

Problema 14. Las longitudes de los lados del triángulo ABC son números enteros y ninguno de sus ángulos mide $0°$. Sea D un punto sobre el lado AC tal que BD es bisectriz del ángulo $\angle ABC$, $AD = 3$, y $DC = 8$. ¿Cuál es el menor valor que el perímetro de dicho triángulo puede tener?

(a) 30 (b) 33 (c) 35 (d) 36 (e) 37

Problema 15. Se altera una moneda de tal manera que la probabilidad de que caiga en cara es menor que $\frac{1}{2}$ y cuando se arroja la moneda cuatro veces, la probabilidad de que se obtenga un número igual de caras y sellos es $\frac{1}{6}$. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda caiga en cara?

(a) $\frac{\sqrt{15}-3}{6}$ (b) $\frac{6-\sqrt{6\sqrt{6}+2}}{12}$ (c) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ (d) $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ (e) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Problema 16. Bernardo elige aleatoriamente 3 números distintos del conjunto

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

y los ordena en orden descendente para formar un número de 3 dígitos. Silvia elige aleatoriamente 3 números distintos del conjunto

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

y también los ordena en orden descendente para formar un número de 3 dígitos. ¿Cuál es la probabilidad que el número de Bernardo sea mayor que el número de Silvia?

(a) $\frac{47}{72}$ (b) $\frac{37}{56}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{49}{72}$ (e) $\frac{39}{56}$

Problema 17. Los lados del hexágono equiangular $ABCDEF$ tienen longitudes $AB = CD = EF = 1$ y $BC = DE = FA = r$. El área del triángulo ACE es el $70\,\%$ del área del hexágono. ¿Cuál es la suma de todos los valores que r puede tener?

(a) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (b) $\frac{10}{3}$ (c) 4 (d) $\frac{17}{4}$ (e) 6

Problema 18. Un camino que consta de 16 pasos va de $(-4, 4)$ a $(4, 4)$ de tal forma que con cada paso se incrementa en 1 o bien la coordenada en x o bien la coordenada en y. ¿Cuántos de estos caminos son tales que permanecen en el exterior o en el borde del cuadrado $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$ en todos los pasos?

(a) 92 (b) 144 (c) $1,568$ (d) $1,698$ (e) $12,800$

Problema 19. Cada una de 2010 cajas alineadas contiene una sola canica roja, y para $1 \leq k \leq 2010$, la caja en la posición k-ésima contiene también k canicas blancas.

Isabella comienza en la primera caja y extrae sucesivamente en orden una sola canica aleatoriamente de cada caja. Ella se detiene cuando ella extrae por primera vez una canica roja. Sea $P(n)$ la probabilidad de que Isabella se detenga después de extraer exactamente n canicas. ¿Cuál es el menor valor de n para el cual $P(n) < \frac{1}{2010}$?

(a) 45 (b) 63 (c) 64 (d) 201 (e) 1005

Problema 20. Las progresiones aritméticas (a_n) y (b_n) tienen términos enteros con $a_1 = b_1 = 1 < a_2 \leq b_2$ y $a_n b_n = 2010$ para algún n. ¿Cuál es el mayor valor que n puede tener?

(a) 2 (b) 3 (c) 8 (d) 288 (e) 2009

Problema 21. El gráfico de $y = x^6 - 10x^5 + 29x^4 - 4x^3 + ax^2$ yace en la parte del plano por encima de la línea recta $y = bx + c$ excepto en tres valores de x, donde el gráfico y la línea recta se intersectan. ¿Cuál es el mayor de estos tres valores?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Problema 22. ¿Cuál es el valor mínimo de $f(x) = |x-1| + |2x-1| + |3x-1| + \cdots + |199x-1|$?

(a) 49 (b) 50 (c) 51 (d) 52 (e) 53

Problema 23. Sea n el número formado por los dos últimos dígitos diferentes de cero de $90!$. ¿A qué es igual n?

(a) 12 (b) 32 (c) 48 (d) 52 (e) 68

Problema 24. Sea $f(x) = \log_{10}(\operatorname{sen}(\pi x) \cdot \operatorname{sen}(2\pi x) \cdot \operatorname{sen}(3\pi x) \cdots \operatorname{sen}(8\pi x))$. La intersección del dominio de $f(x)$ con el intervalo $[0,1]$ es la unión de n intervalos abiertos disjuntos. ¿Cuál es el valor de n?

(a) 2 (b) 12 (c) 18 (d) 22 (e) 36

Problema 25. Se considera que dos cuadriláteros son iguales si uno puede ser obtenido del otro por una rotación y/o una traslación. ¿Cuántos cuadriláteros convexos cíclicos diferentes hay con lados enteros y perímetro igual a 32?

(a) 560 (b) 564 (c) 568 (d) 1498 (e) 2255

XII Olimpiada Centroamericana y del Caribe

Del 24 de mayo al 1 de junio de 2010, se celebró en Mayagüez, Puerto Rico, la XII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. México ocupó el primer lugar, con 108 puntos, de entre los 14 países que participaron. Barbados y Cuba no pudieron asistir, y Jamaica, Trinidad y Tobago e Islas Vírgenes Americanas participaron por primera vez. En total participaron 41 estudiantes, ya que Trinidad y Tobago sólo llevó 2 alumnos. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Diego Alonso Roque Montoya (Nuevo León), Julio César Díaz Calderón (Oaxaca) y Fernando Josafath Añorve López (Nuevo León).

De las 3 medallas de oro, 7 de plata y 11 de bronce que se entregaron en el certamen, Diego obtuvo medalla de oro, y Julio César y Fernando medalla de plata. Además se otorgó el reconocimiento de "Solución Creativa"a Diego Alonso por su solución del problema 5, reconocimiento que sólo se ha otorgado 2 veces, hasta ahora, en una Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe.

A continuación presentamos el examen de la XII Olimpiada Centroamericana y del Caribe. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlo.

Problema 1. Si $S(n)$ denota la suma de los dígitos de un número natural n, encuentre todas las soluciones de

$$n(S(n)-1)=2010$$

mostrando que son las únicas.

Problema 2. Dado el $\triangle ABC$, sean L, M y N los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente. Se traza una tangente al circuncírculo del $\triangle ABC$ en A, siendo P y Q las intersecciones respectivas de las rectas LM y LN con dicha tangente. Demuestre que CP es paralela a BQ.

Problema 3. Un jugador coloca una ficha en una casilla de un tablero de $m\times n$, dividido en casillas de tamaño 1×1. El jugador mueve la ficha de acuerdo a las siguientes reglas:

- En cada movimiento, el jugador cambia la ficha de la casilla en la que ésta se encuentra a una de las casillas que tienen un lado en común con ella.
- El jugador no puede ubicar la ficha en una casilla que ésta ha ocupado previamente.
- Dos movimientos consecutivos no pueden tener la misma dirección.

El juego termina cuando el jugador no puede mover la ficha. Determine todos los valores de m y n para los cuales el jugador puede colocar la ficha en alguna casilla tal que ésta haya ocupado todas las casillas al terminar el juego.

Problema 4. Se desea embaldosar un patio cuadrado de lado N entero positivo. Se dispone de dos tipos de baldosas: cuadradas de 5×5 y rectangulares de 1×3. Determine

los valores de N para los cuales es posible hacerlo.
Nota: El patio debe quedar completamente cubierto sin que las baldosas se sobrepongan.

Problema 5. Sean p, q y r números racionales distintos de cero tales que

$$\sqrt[3]{pq^2}+\sqrt[3]{qr^2}+\sqrt[3]{rp^2}$$

es un número racional distintos de cero. Pruebe que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{pq^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{qr^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{rp^2}}$$

también es un número racional.

Problema 6. Sean Γ y Γ_1 dos circunferencias tangentes internamente en A, de centros O y O_1, y radios r y r_1 ($r > r_1$), respectivamente. Sea B el punto diametralmente opuesto a A en la circunferencia Γ, y C un punto en Γ tal que BC es tangente a Γ_1 en P. Sea A' el punto medio de BC. Si se cumple que O_1A' es paralela a AP, determine la razón $\frac{r}{r_1}$.

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, de julio a octubre de 2010.

Del 2 al 15 de julio, Astana, Kasajstán

51^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Del 19 al 29 de agosto, Cuernavaca

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes selectivos para determinar la delegación para la XXV Olimpiada Iberoamericana (un máximo de 4 alumnos).

Primera semana de septiembre

Límite para registro de delegados que quieran aplicar el examen propuesto por el Comité Organizador de la OMM como final de su Concurso Estatal y envío del examen a los delegados.

Septiembre, Paraguay

XXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

24 y 25 de septiembre

Aplicación de los exámenes finales en los estados registrados con este propósito.

Primera quincena de octubre

Envío del cuarto número de la revista Tzaloa.

Apéndice

Teorema 1 (Principio de las Casillas) *Dados al menos $nk+1$ objetos acomodados en n lugares, siempre hay un lugar con al menos $k+1$ objetos.*
Ver [5, 11].

Teorema 2 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Si $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ son números reales, entonces,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

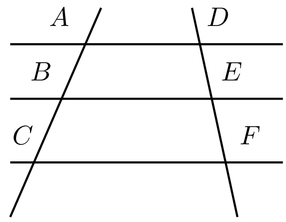
La igualdad ocurre si y sólo si existe un número real c tal que $x_i = cy_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.
Ver [3].

Teorema 3 (Factorización en primos) *Todo entero n mayor que 1 puede expresarse como un producto de primos (con, tal vez, solamente un factor).*
Ver [6, 8].

Teorema 4 (Número de divisores) *Si la factorización en primos del entero n es $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ donde $p_1, p_2, \ldots, p_r$ son primos distintos, entonces el número de divisores positivos de n es igual a $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_r+1)$.*
Ver [6, 8].

Definición 5 (Congruencias) *Dados dos números enteros a, b, y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m, si $a-b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \pmod{m}$.*
Ver [10].

Teorema 6 (Teorema de Thales) *Consideremos dos rectas transversales a tres rectas como se muestra en la figura. Tenemos que si AD, BE y CF son paralelas entonces $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. Recíprocamente, si $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ y dos de las rectas AD, BE o CF son paralelas, entonces las tres rectas son paralelas.*



Ver [1, 2].

Teorema 7 (Teorema de la bisectriz) *La bisectriz interna AL (bisectriz externa AL') del ángulo en A de un triángulo ABC, divide internamente (externamente) al lado opuesto BC en razón $\frac{AB}{CA}$, esto es:*

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CA} \quad \left(\textit{respectivamente } \frac{BL'}{CL'} = \frac{AB}{CA}\right)$$

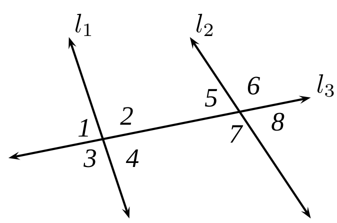
donde L es el punto de intersección de la bisectriz interna con el lado BC (L' es el punto de intersección de la bisectriz externa con la prolongación del lado BC).
Ver [2].

Teorema 8 (Fórmulas de área)

1. *El área de un rectángulo de lados a y b es $a \times b$.*
2. *El área de un triángulo es igual a $\frac{1}{2}hl$, donde l es la medida de un lado y h es la medida de la altura sobre dicho lado.*
3. *El área de un círculo de radio r es igual a πr^2.*

Ver [1, 2].

Definición 9 (Ángulos entre paralelas) *Cuando una recta intersecta a otras dos rectas se forman ocho ángulos que numeramos del 1 al 8, como se muestra en la figura.*



Si la recta l_3 intersecta a las rectas l_1 y l_2, decimos que es **transversal** *a ellas. Los ángulos 2, 4, 5 y 7 están entre las rectas l_1 y l_2, los llamamos* **ángulos internos**, *los ángulos restantes los llamamos* **ángulos externos**. *Los ángulos en lados opuestos por*

la transversal l_3 se llaman **ángulos alternos***, como por ejemplo 3 y 5. A los ángulos 4 y 5 les llamamos* **alternos internos** *y los ángulos 3 y 6 son* **alternos externos***.*
A los ángulos que están en la posición correspondiente respecto a la transversal, como por ejemplo 3 y 7 los llamamos **ángulos correspondientes***. Entonces, los pares de ángulos correspondientes en la figura anterior son 3 y 7, 1 y 5, 4 y 8, 2 y 6.*
Si l_1 y l_2 son paralelas los ángulos alternos internos son iguales.
Ver [2].

Teorema 10 (Suma de los ángulos internos de un triángulo) *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*
Ver [1, 2].

Teorema 11 (Teorema de Pitágoras) *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*
Ver [1, 2, 9].

Definición 12 (Congruencia de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*
Ver [1, 2].

Criterio 13 (Criterio de congruencia ALA) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como* **ángulo-lado-ángulo** *y lo denotamos como* **ALA***.*
Ver [1, 2].

Criterio 14 (Criterio de congruencia LLL) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como* **lado-lado-lado** *y lo denotamos como* **LLL***.*
Ver [1, 2].

Definición 15 (Semejanza de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir,*

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$
$$\angle ACB = \angle A'C'B'$$
$$\angle BAC = \angle B'A'C'$$

y sus lados homólogos son proporcionales, esto es

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Ver [1, 2].

Criterio 16 (Criterio de semejanza AA) *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*
Ver [1, 2].

Teorema 17 *Sea ABC un triángulo cualquiera, sean D, E y F los puntos medios de AB, BC y CA, respectivamente y sea G el baricentro del triángulo ABC. Entonces los seis triángulos: AGD, BGD, BGE, CGE, CGF y AGF tienen áreas iguales entre sí e iguales a $\frac{1}{6}$ del área del triángulo ABC.*
Ver [2].

Teorema 18 (Ley de los cosenos) *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

donde α es el ángulo opuesto al lado a.
Ver [2].

Teorema 19 *Si trazamos dos rectas tangentes a una circunferencia desde un mismo punto P, entonces los segmentos de recta desde P a los puntos de tangencia son iguales y el centro de la circunferencia yace en la bisectriz del ángulo entre las rectas.*
Ver [2].

Teorema 20 (Potencia de un punto)

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*
2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Ver [2, 4]

Teorema 21 (Medida del ángulo inscrito) *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco.*
Ver [1, 2].

Definición 22 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*
Ver [2].

Teorema 23 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, es decir, si y sólo si*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Ver [2].

Bibliografía

[1] A. Baldor. *Geometría plana y del espacio*. Publicaciones Cultural, México, 1999.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM. Tercera edición, 2007.

[4] J. A. Gómez Ortega. *Algunas maneras de usar la potencia*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 4, 2009.

[5] R. Grimaldi, *Matemáticas Discreta y Combinatoria*. Addison Wesley Longman, Pearson. Tercera edición, 1998.

[6] I. Niven, H. Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[7] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2000.

[8] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de Números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2003.

[9] A. Rechtman Bulajich. *Algunas demostraciones del teorema de Pitágoras*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 1, 2010.

[10] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[11] P. Soberón Bravo. *El Principio de las Casillas*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2010.

[12] N. Vilenkin. *¿De cuántas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Directorio

Directorio del Comité Organizador de la OMM

Anne Alberro Semerena
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 3 81 03 80
Fax (777) 3 29 70 40
aalberro@uaem.mx

Gerardo Arizmendi Echegaray
Centro de Investigación en Matemáticas
Callejón Jalisco s/n, Mineral de Valenciana
36240, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 71 55
gerardo@cimat.mx

Ignacio Barradas Bribiesca
Universidad de Guanajuato
L. de Retana #5, Centro
36000, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 00 06 ext 2006
barradas@quijote.ugto.mx

Radmila Bulajich Manfrino
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
bulajich@uaem.mx

Gabriela Campero Arena
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 48 67
Fax (55) 56 22 48 66
gabriela@matematicas.unam.mx

Fernando Campos García
1a de Ángel Rico 85
AU.H. Vicente Guerrero
09200, Iztapalapa, Distrito Federal
Tel. (55) 34 63 75 43
fermexico89@hotmail.com

José Antonio Climent Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 24 59 22
Fax (55) 56 22 48 59
jach@fciencias.unam.mx

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 49 25
Fax. (55) 56 22 48 59
cobian@matematicas.unam.mx

David Cossío Ruiz
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
Instituto de Ingeniería y Tecnología
Departamento de Física y Matemáticas
Av. del Charro 450 Nte.
CP 32310, Cd. Juárez, Chihuahua
Tel. (656) 688 48 87
Fax. (656) 688 48 13
sirio11@gmail.com

Luis Cruz Romo
UPIITA, IPN
Av. Instituto Politécnico Nacional 2580
Col. Barrio la Laguna Ticomán
07340, México, D.F.
lucruz@ipn.mx

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Facultad de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
Callejón Jalisco s/n, Mineral de Valencia
36240, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 01 40
marcant@cimat.mx

Jesús Jerónimo Castro
CIMAT
Apartado Postal 402
36000, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 71 55
Fax (473) 7 32 57 49
jeronimo@cimat.mx

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Primera Cerrada de Alfalfares 41-2
Rinconada Coapa Primera Sec, Tlalpan
14330, México, D.F.
Tel. (55) 26 52 23 29
ssbmplayer@gmail.com

Carlos Jacob Rubio Barrios
Universidad Autónoma de Yucatán
Periférico norte tablaje 13615
97119, Mérida, Yucatán
Tel. (999) 942-3140 al 49
Fax (999) 942-31-40
carlos.rubio@uady.mx
jacob.rubio@gmail.com

Elena Ruiz Velázquez
Altair 12
Col. Lomas de Palmira
62550, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 320 54 39
Cel. (777) 133 39 83
eleniux@gmail.com
A00375640@itesm.mx

Pablo Soberón Bravo
Circuito Interior no. 830
Fracc. La Herradura
62303, Cuernavaca, Morelos
Cel. (777) 134 55 49
bandrak@hotmail.com

Carmen Sosa Garza
Facultad de Ingeniería, UAQ
Cerro de las Campanas s/n
Querétaro, Querétaro
Tel. (442) 1 92 12 64 ext. 121 ó 136
Fax (442) 1 92 12 646
carsg@uaq.mx

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
rogelio@matcuer.unam.mx

Eduardo Velasco Barreras
Universidad de Sonora
Calle Yucas 16, Vista Bella
83170, Hermosillo, Sonora
Tel. (662) 2 19 10 07
hamsteritokeweb@hotmail.com

Hugo Villanueva Méndez
Instituto de Matemáticas, UNAM
Cub. 4 de Becarios,
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria
Coyoacán 04510,
México, D.F.
Tel (55) 56 22 45 32
vill_hugo@hotmail.com
hvillan@matem.unam.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@fciencias.unam.mx`

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

`http://www.omm.unam.mx/`