TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2012, No. 3

Comité Editorial:

Anne Alberro Semerena

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Carlos Jacob Rubio Barrios

Francisco Ruiz Benjumeda

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.omm.unam.mx

Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

©Queda estrictamente prohibida la reproducción parcial o total por cualquier sistema
o método, mecánico o electrónico, sin autorización previa del autor.
Impreso y hecho en México.
Julio de 2012.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Tzaloa es una publicación de interés para un público amplio. Está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, pero debido a que su columna vertebral es la resolución de problemas, también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Desde el inicio de Tzaloa, Manuel Macías Beckmann, director del despacho Rayaenmedio, ha participado en el diseño de las atractivas portadas de la revista.
Por sus diseños, Manuel ha ganado numerosos premios: Primer lugar a nivel nacional en el segundo concurso universitario de la estampilla postal (1996); Premio platino de la revista a! Diseño (1998); Mención plata en el XVII premios quórum, y mención oro de la revista a! Diseño por la identidad corporativa del restaurante La Goleta (2007).
Este año, las portadas de Tzaloa recibieron el premio internacional de diseño "Color in Design 2012" otorgado por las revistas de diseño How? y Print, y patrocinado por Pantone. El tema central de la competencia fue el uso del color, y cómo éste hace que los diseños resalten y comuniquen un mensaje. Es así que el Comité Editorial de Tzaloa hace una calurosa y entusiasta felicitación a Rayaenmedio, y en particular a Manuel. ¡Enhorabuena Manuel!

[1] Palabra náhuatl cuyo significado es *aprender*.

Tzaloa, Año 2012, Número 3

Como podrás notar, para este tercer número del año 2012 hemos incorporado algunos cambios de orientación que buscan mejorar el contenido y utilidad de tu revista Tzaloa. Bajo la nueva visión, la sección *Problemas de Práctica* estará principalmente orientada a estudiantes y profesores que se preparan para concursar en etapas iniciales. De esta forma, a lo largo de todo el año contendrá problemas clasificados, en su mayoría, con nivel principiante.

En Tzaloa seguimos renovándonos y cada día buscamos satisfacer de mejor manera las necesidades de la comunidad olímpica. Es así que a partir de este número, la cantidad de problemas en la sección *Problemas de Entrenamiento* se duplica de 5 a 10. El material que se presenta busca satisfacer las necesidades de aquellos que ya han superado los niveles básicos y se encuentran en etapas intermedias y avanzadas. Se conserva el caracter interactivo de la misma, de manera que las soluciones que se presentan en cada número de la revista, corresponden a los problemas planteados tres números atrás.

A partir de este año, hemos incluido una nueva sección con los exámenes de las etapas semifinal y final estatal que se aplican en los estados que así lo desean para seleccionar a sus delegaciones. Estos exámenes fueron elaborados por María Luisa Pérez y Miguel Raggi. En este número presentamos los exámenes del año pasado y en el siguiente número publicaremos las soluciones.

Para el artículo de Matemáticas de esta ocasión, decidimos incluir un tema de geometría y agradecemos la colaboración de Luis Eduardo García Hernández, quien nos comparte un excelente trabajo titulado *Un poco de bisectrices*. Estamos seguros que esta presentación que incluye algunos de los resultados fundamentales de la geometría de bisectrices en contexto y alternados con su aplicación en la solución de numerosos problemas olímpicos, harán de este texto un valioso aporte para tu preparación. Nuevamente agradecemos a Luis Eduardo por compartirnos este gran artículo.

Por lo demás, seguimos incluyendo los exámenes y soluciones de los concursos internacionales de relevancia para México, así como la información olímpica completa y actualizada con su calendarización. En fin, esperamos que con este nuevo número de Tzaloa podamos seguir contribuyendo con un granito de arena al florecimiento de las matemáticas en México.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Hace más de 25 años que la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Desde sus inicios, este programa se ha visto fortalecido gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

26ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delegaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 26^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1993. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2012-2013 y, para el 1° de julio de 2013, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.omm.unam.mx`

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 26^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 11 al 17 de noviembre de 2012 en Guanajuato, Guanajuato. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2013: la XXV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, que se llevará a cabo en el mes de marzo; la XV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, que se celebrará en el mes de junio; la 54^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se llevará a cabo en Colombia en el mes de julio, y la XXVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en el mes de septiembre.

Un poco de bisectrices

Por Luis Eduardo García Hernández

Nivel Intermedio

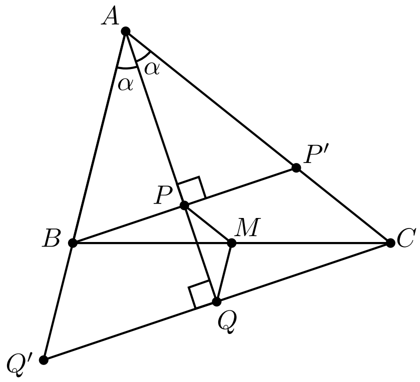
En el estudio de la geometría, como en cualquier rama de las matemáticas, siempre está presente el deseo por descubrir elementos y construcciones que cuenten con propiedades invariantes, con las cuales se logre describir la naturaleza detrás de las estructuras que involucran a estos elementos geométricos; por así decirlo que estén dotados de una *belleza intrínseca*. Este es el caso de las bisectrices en la geometría básica. Estas rectas notables tienen propiedades de gran elegancia, lo cual las convierte en uno de los elementos más recurrentes en los diversos problemas geométricos de la olimpiada. Comencemos recordando un *poco de bisectrices*.

Dado un triángulo ABC, la recta que pasa por A y divide en dos ángulos iguales al ángulo $\angle BAC$ es conocida como la bisectriz del ángulo en el vértice A. Por otro lado, si D y E son puntos sobre AB y AC, respectivamente, tales que A se encuentra entre los puntos D y B sobre AB y entre E y C sobre AC, a los ángulos $\angle CAD$ y $\angle EAB$ se les conoce como ángulos externos asociados al vértice A. De la misma manera los vértices B y C tienen su par respectivo de ángulos externos.

A las rectas que bisecan un ángulo interno se les conoce como bisectrices internas y a las que bisecan un ángulo externo se les conoce como bisectrices externas. Cabe notar que si tomamos la bisectriz del ángulo $\angle CAD$, esta recta coincidirá con la bisectriz del ángulo $\angle EAB$ por ser $\angle CAD$ y $\angle EAB$ ángulos opuestos por el vértice, entonces no hay problemas con la noción de bisectriz externa. El lector podrá verificar fácilmente que la bisectriz interna y externa de un ángulo interno y externo con vértice común, son perpendiculares. Procedamos ahora a resolver un ejemplo sencillo ya que hemos recordado las definiciones básicas.

Ejemplo 1. *Sea ABC un triángulo con $AB < AC$ y l la bisectriz interna del ángulo en A. Sean P y Q los pies de las perpendiculares desde B y C a l, respectivamente. Si M es el punto medio de BC, demuestra que el triángulo PMQ es isósceles.*

Solución. Sea $\angle BAC = 2\alpha$ y sean P' y Q' los puntos de intersección de BP con AC y de CQ con AB, respectivamente.

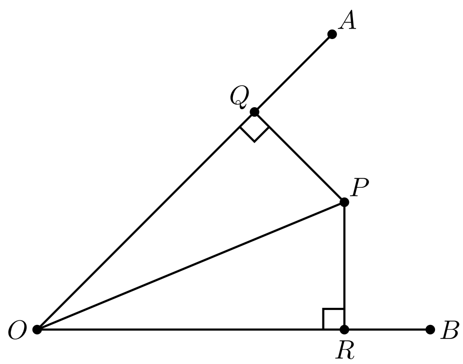


Por ser l tanto bisectriz, como altura en los triángulos ABP' y $AQ'C$, tenemos que estos triángulos son isósceles, por lo tanto P es el punto medio de BP' y Q el punto medio de CQ'. Entonces por el teorema de Thales MP es paralela a AC, luego por ángulos correspondientes se tiene que $\angle QPM = \angle QAC = \alpha$; de manera similar MQ es paralela a AB, entonces por ángulos alternos internos $\angle MQP = \angle BAQ = \alpha$. Por lo tanto el triángulo MPQ es isósceles.

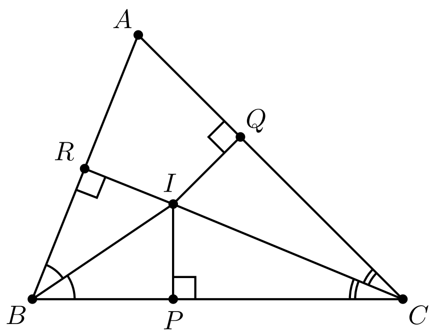
Claramente este ejercicio no requirió un gran conocimiento sobre bisectrices, sin embargo este no será el caso en los siguientes ejemplos, por ello estudiemos un par de cualidades importantes (y algunas aplicaciones) de estas increíbles rectas antes de continuar.

Proposición 1. (a) *Sea P un punto dentro del ángulo $\angle AOB$. Sean Q y R las proyecciones desde P a las rectas que contienen a OA y OB, respectivamente, entonces P está sobre la bisectriz de $\angle AOB$ si y sólo si $PQ = PR$.*
(b) *Las bisectrices internas de un triángulo ABC concurren en un punto que es a su vez, centro de la circunferencia inscrita al triángulo ABC.*

Demostración. (a) Sea P un punto sobre la bisectriz del $\angle AOB$.

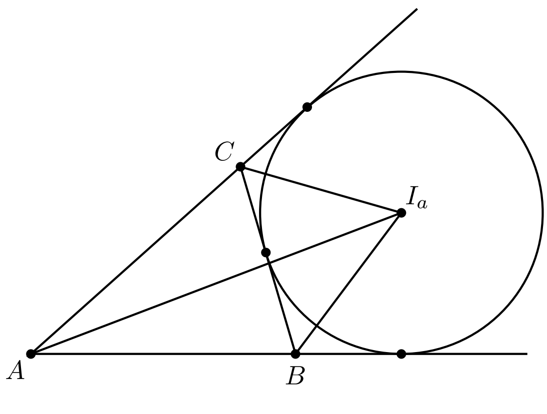


Como $\angle POQ = \angle POR$ y $\angle PQO = \angle PRO = 90°$, los triángulos OPR y OPQ son semejantes por el criterio AAA. Pero además tienen la misma hipotenusa, por lo que son congruentes y $PR = PQ$.
Recíprocamente, si $PQ = PR$, por el Teorema de Pitágoras tenemos que $OQ = \sqrt{OP^2 - PQ^2} = \sqrt{OP^2 - PR^2} = OR$, y así los triángulos OPQ y OPR son congruentes por el criterio LLL. En particular $\angle POQ = \angle POR$. Luego, P está sobre la bisectriz del ángulo $\angle AOB$.
(b) Sea I el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle CBA$ y $\angle ACB$. Sean P, Q y R las proyecciones desde I sobre BC, CA y AB, respectivamente.



Por estar I en la bisectriz del ángulo $\angle CBA$ tenemos que $IR = IP$, y por estar sobre la bisectriz del ángulo $\angle ACB$ tenemos que $IP = IQ$. Por lo tanto, $IQ = IR$, lo cual nos dice que I está sobre la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ y las bisectrices internas concurren. Además, la circunferencia con centro I y radio IP es tangente a los lados del triángulo ABC y está contenida en él. A este punto I se le conoce como *incentro* y a esta circunferencia se le llama *incírculo* o *circunferencia inscrita*.

Como la demostración del inciso (b) sólo usó el hecho de que I se encuentra sobre la bisectriz de dos ángulos internos, de la misma manera podemos demostrar que dos bisectrices externas de dos ángulos de un triángulo y la bisectriz interna del tercer ángulo son concurrentes (observemos que existen tres de estos puntos). En la siguiente figura, I_a es la intersección de las bisectrices externas de los ángulos en B y C con la bisectriz del ángulo en A.



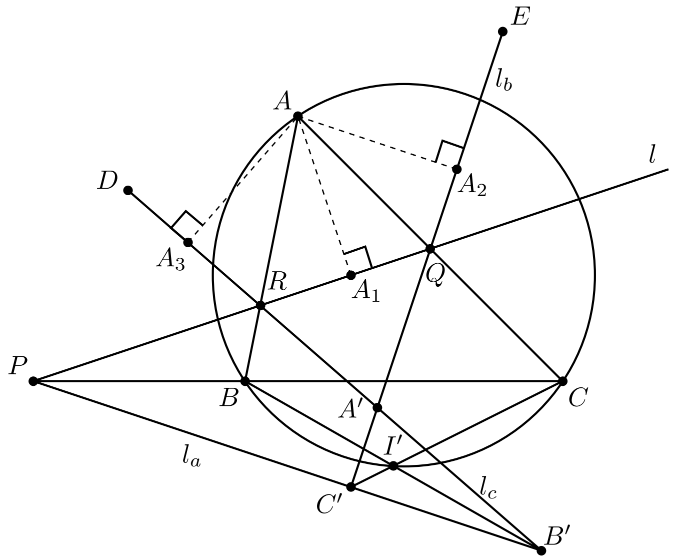
Estos tres puntos, así como el incentro, son centros de circunferencias tangentes a los lados del triángulo con la única diferencia de que estas circunferencias son externas a él. Por esta propiedad, a estos puntos se les conoce como los *excentros* del triángulo.

Estos resultados son elementales, pero no nos dejemos llevar por su aparente inocencia. Estas propiedades resultan bastante prácticas como podemos apreciar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. *Sean ABC un triángulo acutángulo y l una recta. Sean l_a, l_b y l_c las reflexiones de l con respecto a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sean A', B', C' los puntos de intersección de las rectas l_b y l_c, l_c y l_a, l_a y l_b, respectivamente. Demuestra que las rectas AA', BB' y CC' concurren en un punto sobre el circuncírculo del triángulo ABC.*

Solución. Denotemos por $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, $\angle ACB = \gamma$ y sean P, Q y R los puntos de intersección de l con BC, CA y AB, respectivamente.
Comencemos demostrando el siguiente resultado.

Lema. *La recta AA' es la bisectriz interna del ángulo en A' en el triángulo $A'B'C'$ y $\angle B'A'C' = 180° - 2\alpha$.*
Demostración del Lema. Sean A_1, A_2 y A_3 las proyecciones desde A sobre las rectas l, l_b y l_c, respectivamente.



Puesto que A pertenece al lado AB y l_c es la reflexión de l con respecto AB se tiene que $AA_1 = AA_3$. Con la misma idea, usando el hecho de que A pertenece a AC se tiene que $AA_1 = AA_2$, entonces $AA_2 = AA_1 = AA_3$. Por lo tanto A pertenece a la bisectriz interna por A' en el triángulo $A'B'C'$. Para lo segundo, sean D y E puntos sobre l_b y l_c, respetivamente, de manera que se encuentran en el mismo lado del punto

A con respecto a la recta l. En el triángulo AQR se cumple que $\angle AQR + \angle QRA = 180° - \alpha$, entonces (puesto que l_b y l_c son reflexiones de l),

$$\angle EQR + \angle QRD = 2(\angle AQR + \angle QRA) = 360° - 2\alpha.$$

Tomando ángulos suplementarios tenemos que,

$$\angle A'RQ + \angle RQA' = 180° - \angle QRD + 180° - \angle EQR = 2\alpha.$$

Por lo tanto $\angle C'A'B' = \angle QA'R = 180° - 2\alpha$. De manera análoga se pueden demostrar hechos similares para los vértices B' y C'.

Entonces, retomando nuestro problema original, tenemos que AA', BB' y CC' concurren por ser las bisectrices internas del triángulo $A'B'C'$. El punto de intersección I' es el incentro del triángulo $A'B'C'$.
Finalmente, veamos que I' está sobre el circuncírculo del triángulo ABC. Por el lema anterior para los vértices B' y C' se cumple que $\angle I'B'C' = 90° - \beta$ y $\angle B'C'I' = 90° - \gamma$. Luego,

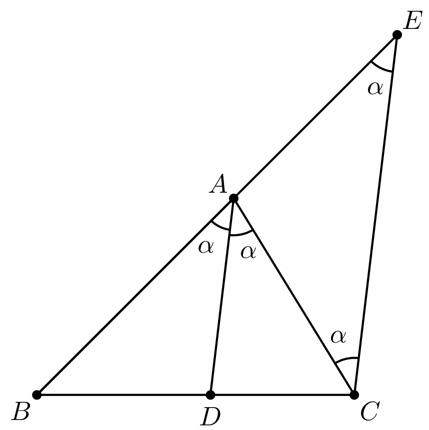
$$\begin{aligned}\angle BI'C = \angle B'I'C' &= 180° - \angle I'B'C' - \angle B'C'I' \\ &= 180° - (90° - \beta) - (90° - \gamma) = \beta + \gamma.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\angle BAC + \angle CI'B = \alpha + \beta + \gamma = 180°$, entonces el cuadrilátero $ABI'C$ es cíclico. Luego, I' está en el circuncírculo del triágulo ABC.

Para continuar, veamos una nueva propiedad acerca de las bisectrices.

Teorema de la Bisectriz. *Sean ABC un triángulo y D el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ con BC. Entonces, $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Demostración. Sea E un punto sobre la prolongación de BA tal que $AE = AC$. Si $\angle CAB = 2\alpha$, entonces $\angle BAD = \alpha$. Como el ángulo $\angle EAC$ es el ángulo externo del vértice A tenemos que $\angle EAC = 180° - 2\alpha$.

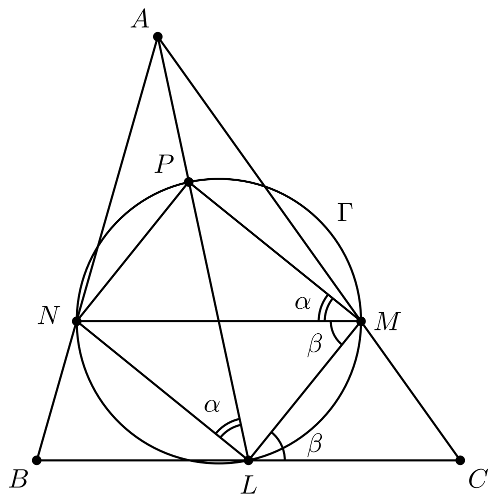


Como el triángulo EAC es isósceles, tenemos que $\angle AEC = \alpha$. Por lo tanto EC es paralela a AD. Luego, por el teorema de Thales, $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} = \frac{BA}{AC}$.

Veamos una aplicación de este resultado.

Ejemplo 3. *Sean ABC un triángulo y L el punto medio de BC. Sean M y N puntos sobres CA y AB tales que LM y LN son bisectrices de los ángulos $\angle CLA$ y $\angle ALB$, respectivamente. Sean Γ el circuncírculo del triángulo LMN y P el punto de intersección de Γ con AL, distinto de L. Demuestra que el cuadrilátero $MPNL$ es un rectángulo.*

Solución. Denotemos $\angle ALB = 2\alpha$ y $\angle CLA = 2\beta$. Por ser LM y LN bisectrices de $\angle CLA$ y $\angle ALB$, tenemos que $\angle MLP = \beta$ y que $\angle PLN = \alpha$, de donde $\angle MLN = \alpha + \beta = 90°$.



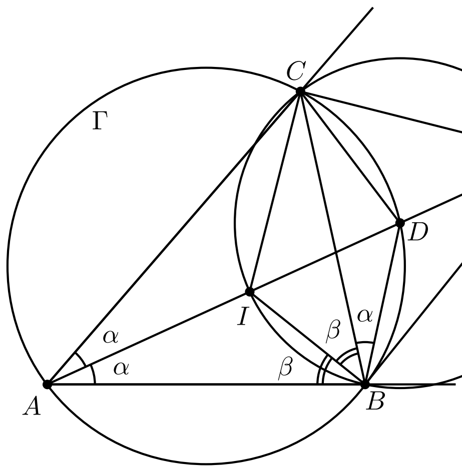
Como el cuadrilátero $MPNL$ es cíclico, bastará demostrar que $\angle PML = 90°$. Por el teorema de la bisectriz aplicado a los triángulos ABL y ALC, tenemos que $\frac{AM}{MC} = \frac{LA}{CL} = \frac{LA}{BL} = \frac{AN}{NB}$, donde la segunda igualdad se debe a que L es el punto medio de BC. Entonces por el teorema de Thales se tiene que MN es paralela a BC, por lo tanto, por ángulos alternos internos $\angle NML = \angle CLM = \beta$, además, por ser cíclico $PMLN$, tenemos que $\angle PMN = \angle PLN = \alpha$. Por lo tanto, $\angle PML = \angle PMN + \angle NML = \alpha + \beta = 90°$.

Como hemos visto, las bisectrices cumplen propiedades fascinantes relacionadas con la incidencia de rectas y con la métrica del triángulo. Para terminar, veamos una última relación de las bisectrices con la geometría del triángulo. Este resultado, al igual que los anteriores, es un hecho elemental, sin embargo es muy útil al momento de atacar problemas.

Proposición 2. *Sea ABC un triángulo y sean Γ su circuncírculo, I su incentro e I_a el excentro asociado al vértice A. Si D es el punto de intersección de la bisectriz* *interna de A con Γ, distinto de A, entonces los puntos I, I_a, B y C están sobre una circunferencia con centro en D.*

Demostración. Denotemos por $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle CBA = 2\beta$ y $\angle ACB = 2\gamma$.

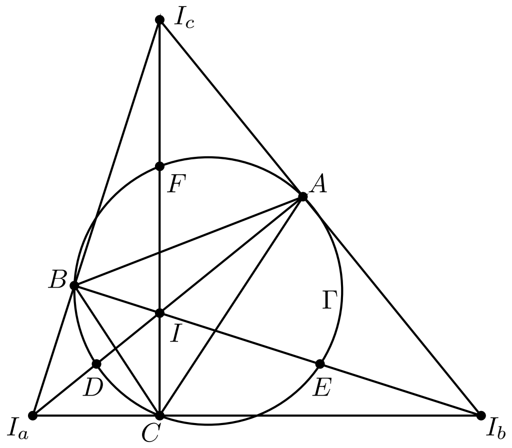
Por ser I el incentro del triángulo ABC, se tiene que $\angle CBI = \beta$ y por ser $ABDC$ cíclico, se cumple que $\angle DBC = \angle DAC = \alpha$; entonces $\angle DBI = \angle DBC + \angle CBI = \alpha + \beta$.



Por otro lado, en el triángulo ABI, el ángulo $\angle BID$ es un ángulo externo, por lo tanto $\angle BID = \angle BAI + \angle IBA = \alpha + \beta$. Entonces el triángulo IBD es isósceles. Análogamente, IDC es isósceles, por lo que $DB = DI = DC$. Luego, D es el circuncentro del triángulo BIC. Resta probar que I_a está en ese circuncírculo.
Puesto que BI es bisectriz interna del ángulo en B y BI_a es bisectriz externa del ángulo externo en B, se cumple que $\angle I_aBI = 90°$. De la misma forma se cumple que $\angle ICI_a = 90°$. Por lo tanto $\angle I_aBI + \angle ICI_a = 180°$, lo cual implica que el cuadrilátero IBI_aC es cíclico.

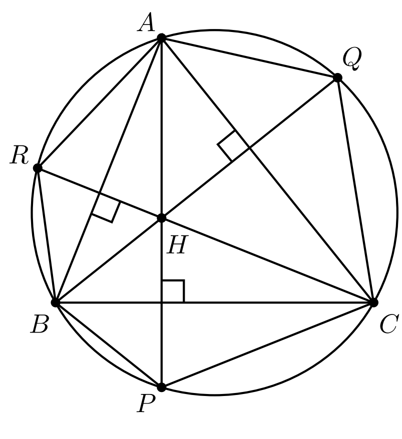
Ejemplo 4. *Sean ABC un triángulo e I_a, I_b e I_c los excentros asociados a los vértices A, B y C, respectivamente. Demuestra que $(I_aI_bI_c) \geq 4(ABC)$, donde (XYZ) denota el área del triángulo XYZ.*

Solución. Sean Γ el circuncírculo del triángulo ABC, I el incentro y D, E y F los puntos de intersección de las rectas AI_a, BI_b y CI_c con Γ distintos de A, B y C, respectivamente.



Usando el hecho de que D es el centro de la circunferencia que pasa por los puntos B, I, C, I_a y que los puntos I, D y I_a son colineales se sigue que D es el punto medio de II_a. Esto garantiza que $(II_aB) = 2(IDB)$ y $(II_aC) = 2(IDC)$, por lo tanto el área del cuadrilátero IBI_aC es el doble del área del cuadrilátero $IBDC$, lo cual escribiremos como $(IBI_aC) = 2(IBDC)$. Análogamente $(ICI_bA) = 2(ICEA)$ y $(IAI_cB) = 2(IAFB)$. Por lo tanto el área del triángulo $I_aI_bI_c$ es el doble del área del hexágono $AECDBF$. Entonces, bastará demostrar que el área del hexágono $AECDBF$ es mayor o igual a dos veces el área del triángulo ABC.

Sea H el ortocentro del triángulo ABC y sean P, Q y R los puntos de intersección de AH, BH y CH con Γ, respectivamente.
Por ángulos inscritos tenemos que $\angle PAC = \angle PBC$ y por ser BQ altura tenemos que $\angle CBQ = \angle PAC$, entonces $\angle CBQ = \angle PBC$. Análogamente $\angle RCB = \angle BCP$, por lo tanto los triángulos BHC y BPC son congruentes, de donde $(BHC) = (BPC)$.
Puesto que D es el punto medio del arco $\widehat{BC}$ la altura desde D del triángulo BDC es mayor o igual que la altura desde P del triángulo BPC. Entonces $(BDC) \geq (BPC)$.



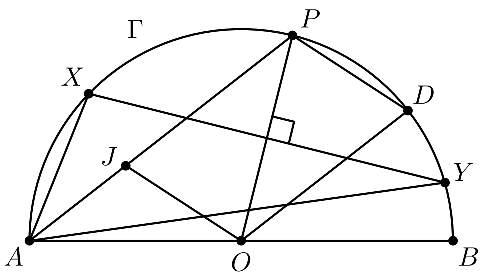
Análogamente, $(CQA) = (CHA)$ y $(CEA) \geq (CQA)$, $(ARB) = (AHB)$ y $(AFB) \geq (ARB)$. Por último, tenemos que,

$$\begin{aligned}(BDC) + (CEA) + (AFB) &\geq (BPC) + (CQA) + (ARB)\\ &= (BHC) + (CHA) + (AHB) = (ABC),\end{aligned}$$

lo cual garantiza la desigualdad deseada.

Ejemplo 5. *Sean Γ una circunferencia con centro O y AB un diámetro de ella. Sean P un punto sobre Γ tal que $\angle POB \leq 120^\circ$, D el punto medio del arco $\widehat{PB}$ que no contiene a A. Además, sean X e Y los puntos de intersección de la mediatriz del segmento OP con Γ. Si J es un punto sobre AP tal que OJ y PD son paralelas, demuestra que J es el incentro del triángulo AXY.*

Solución. Denotemos por $\angle POA = 2\alpha$ y $\angle BOP = 2\beta$.



Por ser OP y OA radios de Γ se tiene que el triángulo APO es isósceles, entonces $\angle APO = 90^\circ - \alpha$, mientras que $\angle DOP = \beta$, pero puesto que $\angle POA + \angle BOP = 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, tenemos que $\alpha + \beta = 90^\circ$, de donde se obtiene $\angle DOP = \angle JPO$ y JP es paralela a OD. Entonces, por ser PD paralela a JO, se sigue que $PODJ$ es paralelogramo, luego $PJ = DO$. Puesto que XY mediatriz del segmento OP y $OX = OY$, por ser radios de Γ, se deduce que $PX = PY = OY = OD = PJ$. Por último, de nuevo por ser XY mediatriz de OP, el punto P es el punto medio del arco $\widehat{XY}$, entonces AP es bisectriz interior del ángulo $\angle YAX$. Por lo tanto, por la proposición 2, si I es el incentro del AXY se cumple que I se encuentra sobre AP y que $PI = PX = PY$, esto junto con $PJ = PX = PY$ implica que $J = I$.

Para concluir dejamos algunos ejercicios que mejorarán las habilidades del lector.

Ejercicios

1. Sea ABC un triángulo y Γ su circuncírculo. Demuestra que la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ y la mediatriz del segmento BC se cortan sobre Γ.

2. Sea I el incentro del triángulo ABC. Consideremos M y N los puntos medios de AB y AC, respectivamente. Si $MI = NI$, demuestra que el cuadrilátero $AMIN$ es cíclico.

3. Sean ABC un triángulo y Γ su circuncírculo. Sean D, E y F los puntos de intersección de las bisectrices internas de los vértices A, B y C con Γ, respectivamente. Si I es el incentro del triángulo ABC, demuestra que I es el ortocentro del triángulo DEF.

4. Sean ABC un triángulo y l la recta tangente a su circuncírculo que pasa por A. Sean D y E puntos sobre l y AC, respectivamente, tales que $AD = AB = AE$ y con D del mismo lado que B con respecto a AC. Demuestra que DE pasa por el incentro del triángulo ABC.

5. Sean ABC un triángulo e I su incentro. Sean L y D los puntos de intersección de la bisectriz interior del ángulo en A con el lado BC y el circuncírculo del triángulo ABC, respectivamente. Demuestra que $\frac{AD}{DI} = \frac{AI}{IL}$.

6. Sean Γ una semicircunferencia con diámetro AB y D un punto sobre el segmento AB. La perpendicular por D al segmento AB intersecta a Γ en C. Si P y Q son puntos sobre Γ tales que $CP = CD = CQ$, demuestra que PQ corta a CD en su punto medio.

7. Sea ABC un triángulo con $AB \neq AC$. Sean I el incentro del triángulo ABC y P el otro punto de intersección de la bisectriz exterior del ángulo A con el circuncírculo de ABC. La recta PI intersecta por segunda vez al circuncírculo de ABC en J. Demuestra que los circuncírculos de los triángulos BIJ y CIJ son tangentes a las rectas IC e IB, respectivamente.

8. Sean ABC un triángulo y AD la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, con D sobre BC. Sea E un punto sobre el segmento BC tal que $BD = EC$. Por E se traza una recta l paralela a AD y se considera un punto P sobre l y dentro del triángulo. Sea G el punto donde la recta BP corta al lado AC y sea F el punto donde la recta CP corta al lado AB. Demuestra que $BF = CG$.

Bibliografía

1. R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. SMM-Imate de la UNAM, 2002.

2. S. Levi, Shively. *Introducción a la geometría moderna.* Compañía Editorial Continental, México, 1984.

Problemas de Práctica

En esta sección encontrarás 20 interesantes problemas de nivel predominantemente básico, pero también incorporamos algunos intermedios y/o avanzados. Con ellos podrás poner a prueba tus habilidades y esperamos que te resulten interesantes y útiles para tu preparación. Como siempre, en la siguiente sección encontrarás las soluciones de todos ellos, pero NO te rindas antes de tiempo. Consultar una solución antes de tiempo (camino fácil) no permite desarrollar al máximo tus habilidades, ten en cuenta que una habilidad sólo se perfecciona con práctica, dedicación y esfuerzo.

Por último, te invitamos a contribuir y si tienes problemas interesantes que proponer, ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus aportaciones con material para esta u otra sección.

Problema 1. Si a, b y c son las raíces de la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$, determina el valor de $\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c}$.

Problema 2. El siguiente cuadrado es un cuadrado mágico donde el producto de cada renglón, columna o diagonal es igual al número de cuatro dígitos $ABCD$. Cada letra representa un dígito distinto y cada casilla contiene un número entero. Completa el cuadrado encontrando los números que van en cada una de las nueve casillas. (Nota: AC es el número con dígitos A y C.)

		4
	AC	
	C	24

Problema 3. ¿Existirá un número entero n tal que el dígito de más a la izquierda en la representación decimal de 2^n sea 5, mientras que el dígito de más a la izquierda de 5^n sea 2?

Problema 4. Cantinflas aterrizó en un planeta habitado por gatos morados que siempre dicen la verdad y gatos amarillos, que siempre mienten. En la oscura noche se encuentra con 5 gatos. El primero dice: "Soy morado". El segundo dice: "Al menos 3 de nosotros son morados". El tercer gato dice: "el primer gato es amarillo". El cuarto gato dice: "al menos 3 de nosotros son amarillos". El quinto gato dice: "todos somos amarillos". ¿Cuántos de los 5 gatos son morados?

Problema 5. Si cierto entero positivo n tiene exactamente 8 divisores positivos, ¿cuántos divisores positivos puede tener, a lo más, n^2?

Problema 6. Sea ABC un triángulo. Sean D y E los puntos medios de BC y CA, respectivamente. Sean F y G puntos sobre el lado AB tales que $DEFG$ es un cuadrado con área 1. ¿Cuál es el área del triángulo ABC?

Problema 7. Encuentra todos los números reales x que satisfacen la ecuación,

$$\sqrt{17+8x-2x^2}+\sqrt{4+12x-3x^2}=x^2-4x+13.$$

Problema 8. Un tablero rectangular de 2011×2012 se rellena con los números 0, 1 y 2, de tal forma que la suma de los números de cada columna y de cada renglón es siempre divisible entre 3. ¿Cuál es el máximo número de unos que puede haber?

Problema 9. ¿Cuántos números primos pueden ser escritos en la forma $n^{n+1}+1$ donde n es un entero positivo?

Problema 10. Sea ABC un triángulo acutángulo y $\mathcal{C}$ su circuncírculo. El punto T está fuera de $\mathcal{C}$ tal que las rectas TA y TB son tangentes a $\mathcal{C}$. La recta por T paralela a AC intersecta a BC en D. Demuestra que $AD = CD$.

Problema 11. Un número ha sido borrado de entre los números del 1 al n. Si el promedio de los restantes de 40.75, ¿qué número se borró?

Problema 12. En base 10 si anotamos el primer entero de dos dígitos (10) seguido, en orden ascendente, de los dos números anteriores a la base de un dígito (8 y 9), formamos un número de cuatro dígitos (1089) que es un cuadrado perfecto (33^2). ¿Qué otras bases tienen esta propiedad?

Problema 13. Los 2012 caballeros se sentaron en la mesa redonda para celebrar con un banquete su reciente conquista, misma en la que cada uno de ellos obtuvo un botín diferente. Se sabe que la diferencia entre los botines obtenidos por cualesquiera dos caballeros sentados uno al lado del otro es de 2 o 3 libras esterlinas. Encuentra la máxima diferencia entre los bontines obtenidos por dos de los caballeros.

Problema 14. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sea O el punto de intersección de sus diagonales. Si P y Q son los centros de los circuncírculos de los triángulos AOB y COD respectivamente, demuestra que $PQ \geq \frac{AB+CD}{4}$.

Problema 15. Los habitantes del planeta X, utilizan los mismos algoritmos para sumar, restar, multiplicar y dividir que en el planeta Tierra. Sin embargo, ellos utilizan una base diferente a la nuestra, su base es mayor a 2 y menor que 10. La siguiente operación fue realizada en el planeta X, y las letras representan dígitos distintos. ¿Cuál es la base que se utiliza en dicho planeta?

$$\begin{array}{r|l} & BC \\ \hline AB & CBC \\ & \underline{AB} \\ & BDC \\ & \underline{BDC} \\ & \;\dots \end{array}$$

Problema 16. Se tienen n focos en una hilera, algunos de los cuales se encuentran encendidos. Cada minuto, todos los focos que estaban encendidos se apagan. Al mismo tiempo se encienden todos aquellos focos que estaban apagados y tales que se encontraban al lado de exactamente un foco que estaba encendido. Para cada n dada, ¿se podrá encontrar una configuración inicial de focos encendidos tal que siempre haya al menos un foco encendido?

Problema 17. En una sucesión infinita creciente de enteros positivos, tenemos que a partir del 2012-ésimo término, cada término divide a la suma de todos los términos anteriores. Demuestra que existe un término a partir del cual cada término es exactamente igual a la suma de todos los términos anteriores.

Problema 18. Cortamos un triángulo acutángulo a través de una recta en dos piezas que no nesariamente sean triángulos. Luego, nuevamente cortamos una de las piezas resultantes a través de una recta en dos piezas y así sucesivamente. Después de efectuar varios de estos cortes resulta que todas las piezas son triángulos, ¿es posible que todos ellos sean obtusángulos?

Problema 19. Se tiene un gran mazo de cartas. En cada una de las cartas está escrito uno de los números $1, 2, \ldots, n$. Sabemos que la suma de todos los números escritos en las cartas es igual a $k \cdot n!$, para algún entero k. Demuestra que es posible acomodar las cartas en k montones de forma que, en cada uno de ellos, la suma de los números escritos sea igual a $n!$.

Problema 20. Dividimos un n-ágono convexo en triángulos a través de diagonales que no se intersectan al interior del polígono. Pintamos los triángulos de negro y blanco de forma que si dos triángulos tienen un lado en común, entonces reciben colores diferentes. Para cada n determina la máxima diferencia entre el número de triángulos pintados de uno y otro color.

Soluciones a los Problemas de Práctica

En esta sección te presentamos las soluciones que el equipo editorial de Tzaloa preparó para los 20 problemas de práctica que figuran en este número de tu revista. Date cuenta que en cada problema siempre se incluye la explicación que justifica la validez de la solución y observa que la argumentación siempre se basa en resultados conocidos y/o en razonamientos lógicos. Las soluciones que aquí se presentan no son necesariamente las únicas o las mejores, si tú tienes otra solución y la quieres compartir con nosotros, te invitamos para que la envíes a nuestro buzón electrónico `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto la estaremos analizando para darte nuestra opinión.

Solución del problema 1. Si $f(x) = x^3 - x - 1$ tiene raíces a, b y c, entonces,

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc,$$

de donde,

$$\begin{aligned} a+b+c &= 0, \\ ab+ac+bc &= -1, \\ abc &= 1. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} &= \frac{3-(a+b+c)-(ab+bc+ac)+3abc}{(1-a)(1-b)(1-c)} \\ &= \frac{3-(0)-(-1)+3(1)}{(1-a)(1-b)(1-c)} \\ &= \frac{7}{f(1)} \\ &= -7. \end{aligned}$$

Solución del problema 2. Escribamos al número de dos dígitos AC en la forma $AC = 10A + C$ y denotemos por x, y y z a los números de las siguientes casillas:

z	y	4
	AC	
x	C	24

Entonces, $24(C)(x) = 4(10A + C)(x)$, de donde, $C = 2A$, de aquí que $AC = 12A$. Además, $4yz = 24(AC)z = (24)(12A)z$, luego $y = 72A$.
Ahora bien, el producto de los enteros de las casillas de la columna central es igual a $(72A)(12A)(2A) = 1728A^3$, que debe ser un número de 4 dígitos. Entonces, $A = 1$ y completando el cuadrado obtenemos,

6	72	4
8	12	18
36	2	24

Solución del problema 3. No existe tal entero. Observamos que $2^n \cdot 5^n = 10^n$. Ahora, si en las representaciones decimales de 2^n y 5^n cambiamos por ceros todos los dígitos con excepción del primero, los nuevos números decrecen pero quedan mayores que la mitad de los originales. Entonces, el producto de estos nuevos números será menor que 10^n, pero mayor que su cuarta parte y por lo tanto dicho producto no puede ser de la forma $10\ldots0$. Sin embargo, si se hicieran dichos cambios en números cuyos primeros dígitos fueran 2 y 5, entonces el producto sería de la forma $(50\ldots0) \cdot (20\ldots0) = 10\ldots0$. Lo anterior es una contradicción y por lo tanto no existe un entero n que tenga la propiedad pedida.

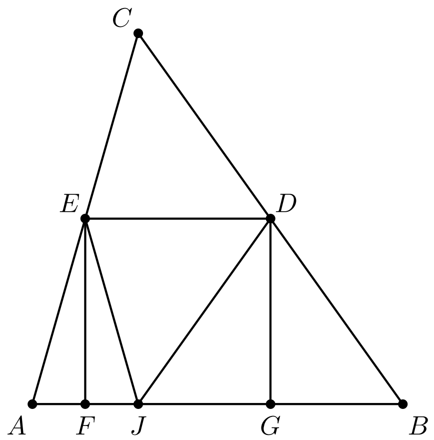
Solución del problema 4. Primero notamos que el quinto gato es amarillo, pues si fuera morado todos deberían ser amarillos, lo cual no es posible.
Si el cuarto gato es amarillo su frase "al menos 3 de nosotros somos amarillos" es falsa, por lo que él y el quinto gato deberían ser los únicos amarillos, pero entonces el tercer gato habría mentido y sería amarillo. Luego, el cuarto gato es morado y debe haber al menos 3 gatos amarillos.
Como hay al menos 3 gatos amarillos, no puede haber al menos 3 gatos morados, por lo que el segundo es amarillo.
Falta conocer el color del primer y del tercer gato. Si el primero fuera morado el tercero habría mentido y sería amarillo. Si el primero fuera amarillo, el tercero habría dicho la verdad y sería morado. Luego, entre estos dos gatos hay uno morado y uno amarillo.
Por lo tanto, hay exactamente 2 gatos morados.

Solución del problema 5. Recordemos que si la descomposición en primos de n es $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ el número de divisores positivos de n es igual a $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$. Como $8 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ tenemos que n puede ser de tres formas (en estos casos p, q y r denotan primos diferentes).

- $n = p^7$. En este caso $n^2 = p^{14}$ tendría $14 + 1 = 15$ divisores positivos.
- $n = pq^3$. En este caso $n^2 = p^2q^6$ tendría $(2+1)(6+1) = 21$ divisores positivos.
- $n = pqr$. En este caso $n^2 = p^2q^2r^2$ tendría $(2+1)(2+1)(2+1) = 27$ divisores positivos.

Luego, n^2 tiene a lo más 27 divisores positivos.

Solución del problema 6. Sea J el pie de la altura desde C.



Como EF y CJ son paralelas y $AE = EC$, por Thales tenemos que $AF = FJ$ y los triángulos AFE y JFE son congruentes. Análogamente los triángulos BGD y JGD son congruentes. Además, $EJ = EA = EC$ y $DJ = DB = DC$, de donde los triángulos EDC y EDJ son congruentes. Considerando estas tres congruencias, tenemos que el área del triángulo ABC es el doble que la del cuadrado $DEFG$. Luego, el área buscada es 2.

Solución del problema 7. Observemos que, $17 + 8x - 2x^2 = 25 - 2(x-2)^2$ y $4 + 12x - 3x^2 = 16 - 3(x-2)^2$. Luego,

$$\begin{aligned}
\sqrt{17 + 8x - 2x^2} + \sqrt{4 + 12x - 3x^2} &= \sqrt{25 - 2(x-2)^2} + \sqrt{16 - 3(x-2)^2} \\
&\leq \sqrt{25} + \sqrt{16} \\
&\leq 9 + (x-2)^2 \\
&= x^2 - 4x + 13.
\end{aligned}$$

La igualdad se cumple si y sólo si $x - 2 = 0$, luego $x = 2$ es el único número real que satisface la ecuación.

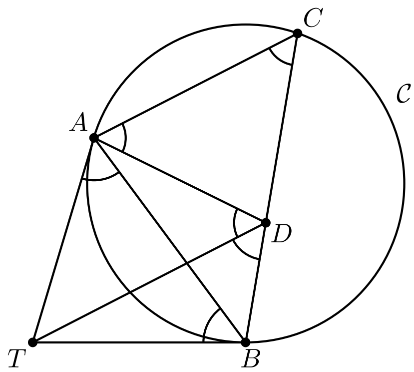
Solución del problema 8. Sea n el número de ceros y d el número de doses que hay en la tabla. Tenemos 2011 renglones de longitud 2012 y 2012 columnas de longitud 2011. Dado que la suma de los números de cualquier renglón es divisible entre 3, debe haber al menos un dos o al menos dos ceros en cada renglón. Por lo tanto $d + \frac{n}{2} \geq 2011$. De forma análoga se obtiene que debe haber al menos un cero o al menos dos doses en cada columna, por lo que $n + \frac{d}{2} \geq 2012$. Sumando ambas desigualdades y dividiendo por $\frac{3}{2}$ obtenemos que $n + d \geq 2682$. Es decir, el número de unos no es mayor que $2011 \cdot 2012 - 2682$.
Ahora mostraremos una configuración donde se alcanza esta cota. Sean $n = 1342$ y $d = 1340$. Coloquemos los 1342 ceros en parejas horizontales comenzando en la esquina superior izquierda del tablero (estos ceros se ubicarán en los primeros 671 renglones y 1342 columnas) y los 1340 doses en parejas verticales comenzando en la esquina inferior derecha del tablero (quedando distribuidos en las últimas 670 columnas y 1340 renglones del tablero). Rellenamos el resto del tablero con unos. Dado que $671 + 1340 = 2011$ y $670 + 1342 = 2012$, tenemos que en cada columna y renglón hay ceros ó doses en las cantidades correctas para que (con el relleno de unos), en cada caso, la suma sea divisible entre 3. El número máximo de unos es entonces $2011 \cdot 2012 - 2682 = 4043450$.

Solución del problema 9. Para $n = 1$ obtenemos $1^2 + 1 = 2$ que es primo. Supongamos que $n \geq 2$. Como todo primo mayor que 2 es impar, necesitamos que n sea par. Como $n + 1$ es impar, podemos factorizar,

$$n^{n+1} + 1 = (n+1)(n^n - n^{n-1} + \cdots - n + 1).$$

Como ambos factores son mayores que 1, tenemos que el número no es primo y la única solución es el primo 2.

Solución del problema 10. Sea $\alpha = \angle BCA$. Como TA y TB son tangentes a $\mathcal{C}$ tenemos que $\angle BAT = \angle TBA = \angle BCA = \alpha$. Además, como TD es paralela a AC tenemos que $\angle BDT = \angle BCA = \alpha$.



Como $\angle BDT = \angle BAT$ se tiene que el cuadrilátero $BDAT$ es cíclico. De aquí, $\angle TDA = \angle TBA = \alpha$. Como AC y TD son paralelas, $\angle CAD = \angle ADT = \alpha$. Por lo tanto, el triángulo ADC es isósceles con $AD = CD$.

Solución del problema 11. Sea $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ el número borrado. Tenemos que,

$$\frac{1+2+\cdots+n-k}{n-1} = 40.75 = \frac{163}{4}.$$

Luego, $n-1$ es múltiplo de 4. Si $n \leq 79$, tenemos que,

$$\begin{aligned}\frac{1+2+\cdots+n-k}{n-1} &\leq \frac{1+2+\cdots+n-1}{n-1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}-1}{n-1}\\ &= \frac{n^2+n-2}{2(n-1)} = \frac{n+2}{2} \leq \frac{79+2}{2} = 40.5 < 40.75,\end{aligned}$$

lo que es una contradicción. Luego, $n \geq 80$. Ahora, si $n \geq 82$, entonces,

$$\begin{aligned}\frac{1+2+\cdots+n-k}{n-1} &\geq \frac{1+2+\cdots+n-n}{n-1} = \frac{(\frac{n(n-1)}{2})}{n-1}\\ &= \frac{n}{2} \geq \frac{82}{2} = 41 > 40.75,\end{aligned}$$

lo cual vuelve a ser una contradicción. De aquí, $n \leq 81$. Como $n-1$ es múltiplo de 4, n tiene que ser 81. Finalmente, tenemos que,

$$40.75 = \frac{1+2+\cdots+81-k}{80} = \frac{3321-k}{80},$$

de donde $k = 61$.

Solución del problema 12. En la base $b \geq 2$, N_b es el número de cuatro dígitos $10(b-2)(b-1)$, luego,

$$N_b = 1(b^3) + 0(b^2) + (b-2)b + (b-1) = (b-1)(b+1)^2,$$

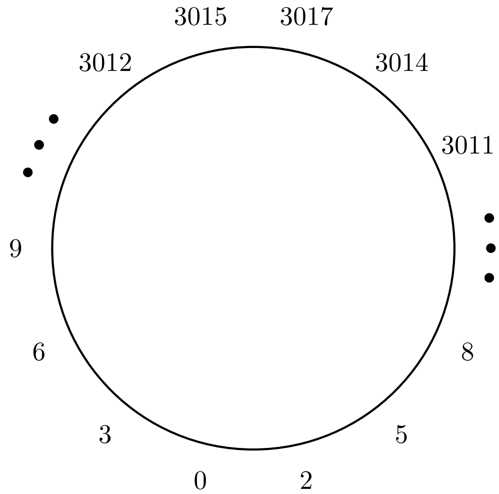
lo que muestra que N_b es un cuadrado perfecto si y sólo si $b-1$ lo es.
Por ejemplo, en base 2 tenemos que,

$$1001_2 = 9_{10} = (3_{10})^2 = (11_2)^2$$

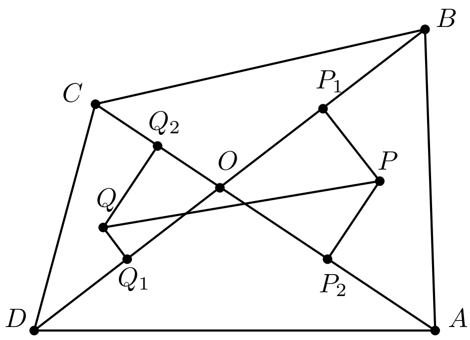
y en base 5 tenemos que,

$$1034_5 = 144_{10} = (12_{10})^2 = (22_5)^2.$$

Solución del problema 13. La respuesta es 3017 libras. Primero, veamos que la diferencia máxima d entre dos de los botines no puede ser mayor que 3018. Numeremos a los caballeros en sentido a favor de las manecillas del reloj, comenzando por el caballero menos afortunado (el del botín más pobre). Sea n el caballero más afortunado (el del botín más jugoso). Entonces 1 y n están separados por $n-2$ caballeros en el sentido de las manecillas del reloj y por $2012-n$ caballeros en el otro sentido. Entonces $d \leq 3(n-1)$ y $d \leq 3(2013-n)$. Por lo que $d \leq \frac{3(n-1+2013-n)}{2} = 3018$. Nótese que $d = 3018$ se da únicamente si la diferencia entre cualesquiera dos vecinos es exactamente 3, lo cual contradice la hipótesis de que todos los caballeros obtuvieron diferentes botines (en este caso los caballeros 2 y 2012 tendrían ambos 3 libras más que el caballero 1). La siguiente figura muestra un ejemplo con $d = 3017$.



Solución del problema 14. Sean P_1, Q_1, P_2, Q_2 los puntos medios de OB, OD, OA y OC, respectivamente.



Entonces, $PQ \geq P_1Q_1$, luego $PQ \geq \frac{1}{2}BD$ y $PQ \geq P_2Q_2$, y de aquí $PQ \geq \frac{1}{2}AC$. Entonces, tenemos que,

$$\begin{aligned} PQ &\geq \frac{1}{4}(BD + AC) \\ &\geq \frac{1}{4}(OB + OD + OA + OC) \\ &\geq \frac{1}{4}((OB + OA) + (OC + OD)). \end{aligned}$$

Pero, $OB + OA > AB$ y $OC + OD > CD$. Por lo tanto, $PQ \geq \frac{1}{4}(AB + CD)$.

Solución del problema 15. Observemos que $B \times AB = AB$, luego B debe ser 1. Además $CB - AB = BD$, luego D debe ser 0. Como en la resta anterior no se le pidió prestado a C, entonces $C = A + 1$. Considerando que, $C \times AB = BDC$ junto con las tres condiciones anteriores tenemos que $(A + 1) \times A = 10$ (nota que esta operación no es en base 10). Entonces la base debe ser el producto de dos números consecutivos. Como la base del planeta X es mayor que 2 y menor que 10, debe ser 6, luego $A = 2$ y $C = 3$.

Solución del problema 16. Primero veamos que si $n = 1$ o $n = 3$ ninguna configuración permite obtener luz perpetua. Denotemos con 1 a los focos encendidos y con 0 a los focos apagados.

- Caso ($n = 1$).- Sólo hay dos configuraciones iniciales posibles. Si el foco está apagado, continuará apagado. Si el foco está encendido se apagará al primer minuto y permanecerá apagado el resto del tiempo.

- Caso ($n = 3$).- Es fácil verificar que partiendo de cualquiera de las 8 posibles configuraciones iniciales eventualmente (a lo más en 4 minutos) se llega al estado en que los tres focos quedan apagados perpetuamente (000).

Ahora, si n es par, la configuración inicial $1001100110\ldots$ funciona pues esta se alternará cada minuto con la configuración $0110011001\ldots$. Por último, si $n > 3$ es impar, añadimos 010 al inicio las configuraciones anteriores (pares). Este prefijo para la configuración alternará con el prefijo 100, dado que el tercer foco no encenderá por culpa del cuarto. De esta forma los tres primeros focos alternan con independencia del resto de la configuración. En conclusión, sólo si $n \neq 1$ y $n \neq 3$ existen configuraciones iniciales que brindan luz perpetua.

Solución del problema 17. Sea $\{a_n\}$ dicha sucesión y denotemos con S_n a la suma de términos desde a_1 hasta a_{n-1}. Para $n \geq 2012$, a_n es un divisor de S_n. Por lo tanto, existe un entero positivo d_n tal que $a_n = \frac{S_n}{d_n}$. Entonces, $S_{n+1} = S_n + a_n = \frac{(d_n+1)S_n}{d_n}$. Si $d_{n+1} \geq d_n + 1$, entonces $a_{n+1} \leq \frac{S_n}{d_n} = a_n$, lo cual contradice la hipótesis de que $\{a_n\}$ es estrictamente creciente. Por lo tanto, $\{d_n\}$ es no creciente para $n \geq 2012$. Sin embargo, esta sucesión no puede mantener indefinidamente un valor $k > 1$, pues en ese caso $\{S_n\}$, a partir de cierto término se convertiría en una sucesión geométrica con razón $\frac{k+1}{k}$. Como k y $k + 1$ son primos relativos, sólo es posible dividir al primer término de la progresión geométrica entre k un número finito de veces. De aquí es claro que existe un n a partir del cual $d_n = 1$ y $a_n = S_n$.

Solución del problema 18. La respuesta es no. Decimos que un n-ágono convexo cualquiera es potencialmente $n - 2$ triángulos (pensando en cortarlo a través de sus diagonales trazadas desde uno de sus vértices). Supongamos que cortamos un n-agono en un a-ágono y un b-ágono. Ahora el número potencial de triángulos es $a - 2 + b - 2$. Notemos que escencialmente hay 3 formas de trazar la recta para cortar al n-ágono: pasando por dos vértices, pasando por un sólo vértice o sin tocar ninguno de los vértices.

- En el primer caso, tenemos que $a+b=n+2$ y por lo tanto el número potencial de triángulos es $n-2$, como al principio. Además, nótese que no se crean ángulos obtusos nuevos, pues ningún ángulo del n-ágono puede dividirse en dos ángulos obtusos.
- En el segundo caso, tenemos que $a+b=n+3$, por lo que el número potencial de triángulos es $n-1$, es decir, un incremento de 1. Como en el caso anterior, en el extremo del corte que pasa a través del vértice no se crean ángulos obtusos nuevos, pero en el otro extremo (al cortar uno de los lados) se puede crear uno, pero no más de un ángulo obtuso nuevo.
- En el tercer caso, tenemos que $a+b=n+4$, y el número potencial de triángulos es n, lo que significa un incremento de 2. En esta situación, en cada extremo del corte se puede crear uno, pero no más de un ángulo obtuso nuevo. En total, al cortar el incremeto en el número de ángulos obtusos es menor o igual que 2.

En cualquier caso, el incremento en el número potencial de triángulos siempre es mayor o igual que el incremento en el número de nuevos ángulos obtusos. Dado que el triángulo incial es acutángulo, si en algún punto tenemos que todas las figuras son triángulos, por lo menos uno de ellos debe ser acutángulo y no es posible que todos ellos sean obtusángulos.

Solución del problema 19. Comenzamos probando el siguiente resultado.
Lema. *Dado un conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de n enteros, siempre es posible escoger algunos de ellos de tal forma que su suma sea divisible entre n.*
Demostración. Supongamos que ninguno de los números es divisible entre n. Consideremos las sumas $b_1=a_1, b_2=a_1+a_2, \ldots, b_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$. Si ninguna es divisible entre n, entonces al menos dos de ellas, digamos b_j y b_k ($j<k$) dejan los mismos residuos al dividirse entre n. Entonces su diferencia $a_{j+1}+\cdots+a_k$ es divisible entre n.
Ahora demostraremos el resultado del problema por inducción sobre n.
Si $n=1$, entonces en todas las cartas está escrito 1 y cada carta es en sí misma un montón cuya suma es $1!=1$.
Supongamos que el resultado es válido para $n-1$, lo que significa que si la suma de los números de todas las cartas es $k\cdot(n-1)!$, entonces las cartas pueden ser acomodadas en k montones tales que en cada uno de ellos la suma de los valores de las cartas que lo componen es $(n-1)!$.
Llamaremos *supracarta* a cualquier montón de cartas cuya suma sea $l\cdot n$, con $l=1,\ldots,n-1$. En este caso diremos que l es su *supravalor*. Cualquier carta con el número n escrito en ella es una *supracarta* con *supravalor* igual a 1. Con el resto de las cartas (con los números $1,2,\ldots,n-1$), formaremos supracartas con el siguiete procedimiento. Escogemos n cartas cualesquiera y debido al lema podemos tomar algunas de ellas (cuya suma sea divisible entre n) para formar una supracarta. Aplicamos el procedimeto hasta que queden menos de n cartas. Nótese que estas cartas sobrantes juntas forman a su vez una supracarta (pues tanto la suma total como la de las cartas agrupadas es divisble entre n) cuyo supravalor no excede a $(n-1)n$.
Ahora, tenemos un montón de supracartas con supravalores $1,\ldots,n-1$ y la suma

total de esos supravalores es igual a $\frac{k \cdot n!}{n} = k \cdot (n-1)!$. Entonces, por la hipótesis de inducción podemos distribuir las supracartas en k montones, cada uno con *suprasuma* igual a $(n-1)!$. Entonces la suma (normal) de los valores de las cartas de cada uno de los k montones es igual a $(n-1)! \cdot n = n!$.

Solución del problema 20. Dado que en un n-ágono la suma de sus ángulos interiores es $(n-2) \cdot 180°$, entonces el n-ágono ha sido dividido en $n-2$ triángulos a través de $n-3$ diagonales que no se intersectan en el interior del n-ágono. Pintamos los lados de los triángulos blancos (negros) llamándolos blancos (negros). De esta forma, toda diagonal es al mismo tiempo blanca y negra.
Entonces, hay al menos $n-3$ lados blancos (negros), por lo tanto hay al menos $\frac{1}{3}(n-3)$ triángulos de cada color. Sea $D(n)$ la diferencia buscada y consideremos 3 casos:

- Caso 1 ($n = 3k$). En este caso tenemos que hay al menos $k-1$ triángulos negros y cuando más $2k-1$ triángulos blancos, entonces $D(n) \leq k$.
- Caso 2 ($n = 3k+1$). En este caso hay al menos k triángulos negros y cuando más $2k-1$ triángulos blancos, entonces $D(n) \leq k-1$.
- Caso 3 ($n = 3k+2$). En este caso hay al menos k triángulos negros y cuando más $2k$ triángulos blancos, entonces $D(n) \leq k$.

Ahora veremos que en cada caso la igualdad puede ser alcanzada y por lo tanto las cotas anteriores corresponden a las máximas diferencias para cada n.
Para $n = 3, 4, 5$ ($k = 1$) el resultado es trivial y puede ser fácilmente verificado por inspección. Para valores de n más grandes construimos el ejemplo por recursión sobre k.
Supongamos que para algún k tenemos el n-ágono correspondiente con la diferencia requerida (s.p.g. con mayoría de triángulos blancos). Entonces añadimos un pentágono (con 2 triángulos blancos y 1 negro) al n-ágono, empalmando el lado negro del pentágono con un lado blanco del n-ágono. De esta forma n se incrementa en 3, k en 1 y $D(n)$ en 1, manteniéndose para el $(n+1)$-ágono la diferencia máxima.

Problemas de Entrenamiento

Como se mencionó en la presentación, a partir de este número, la cantidad de problemas que se presentan en esta sección se duplica de 5 a 10. La ampliación de la sección busca una mayor participación de los lectores a través de una oferta más rica y accesible de problemas.

Como anteriormente, las soluciones de los problemas de esta sección se publican escogiendo de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país. Con el fin de dar tiempo a que nuestros lectores redacten y envíen sus trabajos, es que las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Con este fin, ponemos a tu disposición nuestro buzón electrónico `revistaomm@gmail.com`. Ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, nos pondremos en contacto contigo para poder publicar tu trabajo.

Problemas de Entrenamiento.
Año 2012 No. 3.

Problema 1. (Intermedio) Encuentra todas las funciones $f(x)$ con las siguientes propiedades:

1. $f(x)$ es una función cuadrática.
2. $f(x+2) = f(x) + x + 2$.
3. $f(2) = 2$.

Problema 2. (Intermedio) Cada entero positivo se colorea con uno de dos colores: verde o rojo, de tal manera que hay al menos un número de cada color. Además, se cumple que la suma de dos números con colores diferentes es verde y su producto es rojo. ¿De qué color es el producto de dos números rojos?

Problema 3. (Intermedio) Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$. Si la bisectriz del ángulo en B intersecta a AC en el punto D de tal manera que $BC = BD + AD$, ¿cuánto mide el ángulo en A?

Problema 4. (Intermedio) Demuestra que los dígitos de las decenas de cada potencia de 3 es par.

Problema 5. (Intermedio) Dos caminos rectos parten de un punto L formando un ángulo agudo entre ellos. Sobre dos puntos P y Q de uno de los caminos se encuentran dos buzones tales que $LP = 40$ metros y $LQ = 90$ metros. Bianca se encuentra sobre un punto B en el otro camino y ve los dos buzones formando un ángulo $\angle PBQ$. ¿Qué tan lejos está Bianca de L si el ángulo $\angle PBQ$ tiene la máxima medida posible?

Problema 6. (Intermedio) Encuentra el menor entero positivo de la forma,

$$\frac{A * B}{B},$$

donde A y B son enteros de tres dígitos y $A*B$ denota al entero que se forma al colocar A al lado de B.

Problema 7. (Intermedio) En un triángulo ABC sean X, Y los puntos medios de los lados AB y AC, respectivamente. Sea D un punto sobre el segmento BC, distinto de su punto medio, tal que $\angle XDY = \angle BAC$. Demuestra que AD es perpendicular a BC.

Problema 8. (Intermedio) Determina todos los conjuntos finitos no vacíos X de números reales con la siguiente propiedad: $x + |x| \in X$ para todo $x \in X$.

Problema 9. (Avanzado) Demuestra que para cada entero $n > 0$, el número,

$$(2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 2^2)(2^n - 2^3) \cdots (2^n - 2^{n-1})$$

es divisible entre $n!$. (Nota: $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$).

Problema 10. (Avanzado) Sean a, b y c números reales positivos tales que $abc = 1$. Demuestra que,

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}$$

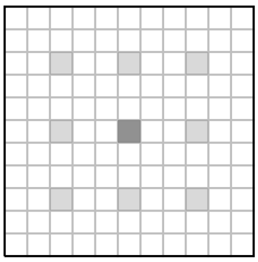
y determina cuándo se verifica la igualdad.

Soluciones a los Problemas Propuestos. Año 2011 No. 4.

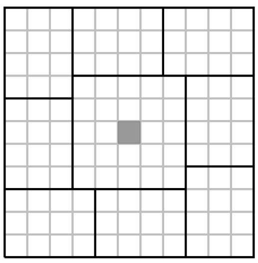
A continuación publicamos las soluciones de los problemas propuestos en Tzaloa 4, año 2011. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas propuestos en Tzaloa 1, año 2012, por lo que todavía estás a tiempo para enviarnos la tuya y así podamos publicarla dándote todo el crédito que mereces.

Problema 1. (Intermedio) A un tablero de 11×11 se le quita el cuadrado unitario de 1×1 del centro, ¿cuántas fichas de 3×4 se pueden colocar en el resto del tablero sin salirse ni traslaparse?

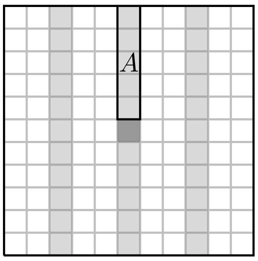
Solución. Consideremos los 9 cuadraditos marcados en la siguiente figura.



Al colocar una ficha de 3×4, al menos ocupa un cuadradito marcado por lo que a lo más es posible colocar 9 fichas, sin embargo el cuadradito del centro no está por lo que a lo más se pueden colocar 8 fichas. Es muy sencillo colocar 8 fichas. Un ejemplo sería,



Segunda solución. Probemos nuevamente que no se pueden poner más de 8 rectángulos. Consideremos la siguiente coloración.



Supongamos que ponemos H rectángulos horizontales y V rectángulos verticales. Cada rectángulo horizontal cubre al menos tres cuadrados sombreados y cada rectángulo vertical cubre exactamente cuatro cuadrados sombreados. Así, se cubren al menos $3H + 4V$ de los 32 cuadrados sombreados.

Por otro lado, en la región A, a lo más podemos cubrir cuatro cuadrados sombreados, por lo que a lo más podemos cubrir 31 cuadrados sombreados. Supongamos ahora que podemos colocar al menos 9 piezas, tendríamos que $H + V \geq 9$ y por lo tanto $31 \geq 3H + 4V = 3(H + V) + V \geq 27 + V$, de donde $V \leq 4$. Con el mismo argumento para las respectivas franjas horizontales, llegamos a que $H \leq 4$, entonces $9 \leq H + V \leq 8$, lo cual es una contradicción.

Problema 2. (Intermedio) Demuestra que hay una infinidad de triángulos Pitagóricos (triángulos rectángulos con lados enteros) cuya hipotenusa es un entero de la forma $3333\ldots 3$.

Solución. Observemos primero que la hipotenusa de un triángulo Pitagórico no puede medir 3 ni 33. Si n es un entero positivo, consideremos la terna de números enteros,

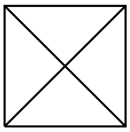
$$\left(\frac{2}{3}10^n(10^{2n}-1), \frac{1}{3}(10^{2n}-1)^2, \frac{1}{3}(10^{4n}-1)\right).$$

Demostraremos que es una terna Pitagórica.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{3}10^n(10^{2n}-1)\right)^2 + \left(\frac{1}{3}(10^{2n}-1)^2\right)^2 &= \\
\frac{4}{9}10^{2n}(10^{2n}-1)^2 + \frac{1}{9}(10^{2n}-1)^4 &= \\
(10^{2n}-1)^2\left(\frac{4}{9}10^{2n} + \frac{1}{9}(10^{2n}-1)^2\right) &= \\
(10^{2n}-1)^2\left(\frac{4}{9}10^{2n} + \frac{1}{9}10^{4n} - \frac{2}{9}10^{2n} + \frac{1}{9}\right) &= \\
(10^{2n}-1)^2\left(\frac{2}{9}10^{2n} + \frac{1}{9}10^{4n} + \frac{1}{9}\right) &= \\
(10^{2n}-1)^2\left(\frac{1}{9}(10^{2n}+1)^2\right) &= \\
\frac{1}{9}(10^{4n}-1)^2 &= \left(\frac{1}{3}(10^{4n}-1)\right)^2.
\end{aligned}$$

Entonces la terna anterior nos da una sucesión infinita de ternas Pitagóricas cuya hipotenusa es un número de $4n$ dígitos iguales a 3. Si $n = 1$ obtenemos la primera terna: $(660, 3267, 3333)$.

Problema 3. (Intermedio) Una empresa quiere vender baldosas decorativas, diseñadas en forma de cuadrado partido por las diagonales, como se muestra en la figura:

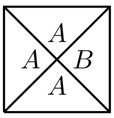


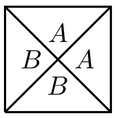
Si se dispone de 10 colores para pintar cada una de las secciones en que se divide la baldosa, determina cuántos diseños de baldosa diferentes se pueden hacer si se permite repetir colores dentro de una misma baldosa. (Dos diseños se consideran iguales si se puede pasar de uno a otro por medio de una rotación de la baldosa).

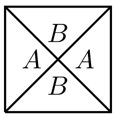
Solución. Vamos a agrupar a las baldosas según el número de colores diferentes que tengan, es decir, distinguiremos así las baldosas con uno, dos, tres y cuatro colores diferentes.

1. Baldosas con un único color hay 10, una por cada color.

2. Existen tres tipos de baldosas con dos colores:

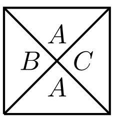
   

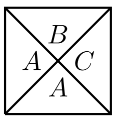
   

   Observemos que la segunda y tercera baldosa no hacen diferencia alguna entre A y B. Luego, para cada uno de estos hay $\binom{10}{2} = 45$ diseños. Para el primer tipo hay en $10 \times 9 = 90$ posibilidades. Luego, en total hay $90 + 2(45) = 180$ posibles baldosas de dos colores.

3. Tenemos dos posibilidades para las baldosas de tres colores:

   En cada caso, para el color dominante tenemos 10 posibilidades. En la primera baldosa, no es relevante el orden de los colores B y C, luego hay $10 \times \binom{9}{2} = 360$ posibles diseños. En el segundo tipo de baldosa, sí es importante el orden de los colores B y C, luego hay $10 \times 9 \times 8 = 720$ posibilidades. Por lo tanto, para tres colores el total de posibles baldosas es $360 + 720 = 1080$.

4. Baldosas con cuatro colores. El orden de los colores es importante, sin embargo cualquier configuración obtenida tendrá otras 3 baldosas equivalentes, es decir, a las que se puede llegar por rotación. Por lo que hay $\frac{10\times 9\times 8\times 7}{4} = 1260$ diseños de baldosas de cuatro colores.

Por lo tanto, en total hay $10 + 180 + 1080 + 1260 = 2,530$ posibilidades.

Problema 4. (Avanzado) Sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$. Encuentra el menor entero positivo n tal que entre cualesquiera n enteros del conjunto A, existen dos tales que su producto es un cuadrado perfecto.

Solución. Cada entero m se puede escribir de la forma $m = u^2v$ de tal manera que v sea libre de cuadrados, es decir, tal que el único cuadrado que lo divide es 1. Por ejemplo, para $m = 600$ tenemos que $u = 10$, $v = 6$. Llamemos a v la parte libre de cuadrados de m. Ahora, si tenemos dos enteros, $m_1 = u_1^2v_1$ y $m_2 = u_2^2v_2$ escritos en dicha forma, como su producto es

$$m_1m_2 = (u_1u_2)^2(v_1v_2),$$

para que sea un cuadrado perfecto, necesitamos que v_1v_2 lo sea y como son libres de cuadrados, es necesario que $v_1 = v_2$. Por lo tanto, dos números multiplican un cuadrado, si y sólo si su parte libre de cuadrados es la misma.
Contemos entonces el número de números libres de cuadrados en A con el principio de inclusión-exclusión. Tenemos 100 elementos en A, tenemos que restar los múltiplos de algún primo al cuadrado, es decir: los múltiplos de 2^2, de 3^2, de 5^2 y de 7^2, luego hay que sumar los que restamos dos veces, es decir: los múltiplos de $(2\cdot 3)^2$ y $(2\cdot 5)^2$. El proceso acaba aquí, pues no hay múltiplos de tres primos al cuadrado (el mínimo sería $(2\cdot 3\cdot 5)^2 = 900$). Por lo tanto hay

$$\begin{aligned} & 100 - \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{9} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{25} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{49} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{36} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{100} \right\rfloor \\ = \quad & 100 - 25 - 11 - 4 - 2 + 2 + 1 = 61 \end{aligned}$$

números libres de cuadrados en A. Si tomamos esos 61 números, no hay dos cuyo producto es un cuadrado. Por otro lado, por el principio de las casillas, entre 62 números en A hay necesariamente dos cuya parte libre de cuadrados es la misma y su producto sería un cuadrado.

Problema 5. (Avanzado) Sea a un número real tal que todas las diferencias entre a^{1929}, a^{1970} y a^{2011} son números enteros. Demuestra que a también es un número entero.

Solución. Si $a = 1$ el resultado es trivial. Supongamos que $a \neq 1$ y que $a^{1929} = k + t$, $a^{1970} = m + t$ y $a^{2011} = n + t$, donde k, m y n son enteros distintos y $0 \leq t < 1$. Entonces,

$$a^{41} = \frac{m+t}{k+t} = \frac{n+t}{m+t},$$

y por lo tanto,

$$0 = (m+t)^2 - (k+t)(n+t) = (m^2 - kn) - (k - 2m + n)t.$$

De la ecuación anterior concluimos que si $k-2m+n=0$, entonces $m^2-kn=0$, de donde se sigue que $0=m^2-k(2m-k)=(m-k)^2$ (pues $n=2m-k$), lo cual contradice el hecho de que $k\neq m$. Por lo tanto, $t=\frac{m^2-kn}{k-2m+n}$ es un número racional y, entonces, a^{41}, a^{1929}, a^{1970} y a^{2011} son también racionales. Dado que 41 es primo y que $1929=3\times 643$ no es divisible entre 41, tenemos que 41 y 1929 son primos relativos y por lo tanto podemos encontrar enteros r y s tales que $41r+1929s=1$. De aquí, se sigue que,

$$a=a^{41r+1929s}=(a^{41})^r\cdot(a^{41})^s$$

es un número racional, digamos $a=\frac{u}{v}$, con u y v enteros primos relativos y $v>0$. Entonces los denominadores de los racionales a^{1970} y a^{2011}, expresados en su forma más simplificada, son v^{1970} y v^{2011}. Por último y debido a que $a^{1970}-a^{2011}$ es un entero, dichos denominadores tienen que ser iguales, de donde se sigue que $v=1$ y por lo tanto a es un entero.

Etapas Semifinal y Final Estatal de la 25^{a} OMM

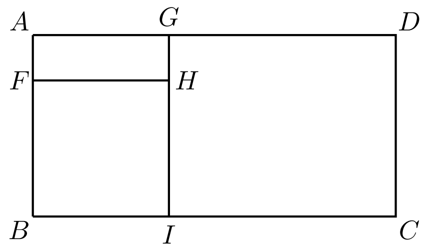
En esta nueva sección de la revista publicamos los exámenes de las etapas semifinal y final estatal de la olimpiada mexicana de matemáticas del año inmediato anterior. La etapa semifinal consta de un examen con 5 problemas para resolver en un tiempo máximo de 4 horas. La etapa final consta de dos exámenes con 4 problemas cada uno, para resolver en un tiempo máximo de 4.5 horas.
Esperando poder publicar tus soluciones en el siguiente número, recuerda que puedes escribirnos a la dirección `revistaomm@gmail.com` donde con gusto estaremos recibiendo todas las contribuciones de los lectores.

Etapa Semifinal Estatal de la 25^{a} OMM, 2011

Problema 1. Sean $\mathcal{K}_A$ y $\mathcal{K}_B$ circunferencias del mismo radio con centros A y B, respectivamente, tales que A está en $\mathcal{K}_B$. Sea C en $\mathcal{K}_A$ tal que la medida g del ángulo $\angle ABC$ satisfaga $30° < g < 60°$. Sobre $\mathcal{K}_B$ tómese el punto D (distinto de A) para el cual $\angle CBD = g$ y constrúyase la circunferencia $\mathcal{K}_C$ que pasa por A y tiene centro C. De D hacia C trácese una recta hasta que toque a $\mathcal{K}_C$ y sea E el punto de intersección. Demuestra que $\angle AEC = g$.

Problema 2. A una cena llegan 3 matrimonios. Se quieren sentar alrededor de una mesa redonda de manera que nadie quede junto a su pareja. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar si Adela ya tiene un lugar asignado fijo?

Problema 3. Un rectángulo $ABCD$ de lados de longitudes enteras y área 756 se divide en tres rectángulos $AFHG$, $FBIH$ y $GICD$ de lados de longitudes enteras como se muestra en la figura, de manera que el área de $FBIH$ es el triple que la de $AFHG$, y el área de $GICD$ es 5 veces la de $AFHG$. Determina todas las posibilidades para la longitud de AD.



Problema 4. ¿Cuántos elementos a lo más podemos escoger del conjunto $\{1, 2, \ldots, 20\}$ si no queremos que la suma de dos de los números escogidos sea múltiplo de un cuadrado mayor que 1?

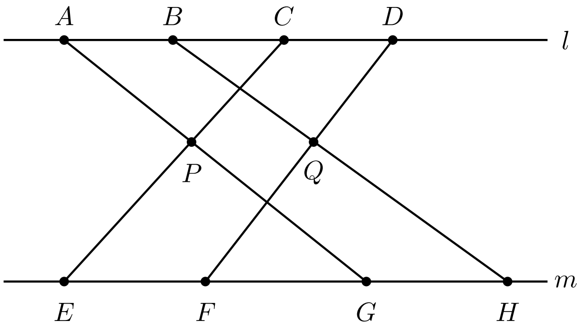
Problema 5. ¿De cuántas maneras es posible acomodar los números del 1 al 10 de manera que del primero al séptimo vayan creciendo, que el séptimo sea mayor que el octavo, y que del octavo al décimo vayan creciendo otra vez? (Por ejemplo, una posibilidad es $1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 4, 7, 9$.)

Etapa Final Estatal de la 25^{a} OMM, 2011

Problema 1. En un torneo había 7 equipos que jugaron todos contra todos una vez. Cada día se efectuó un partido. En determinado momento se observó que cada equipo había jugado a lo más 3 juegos. Demuestra que a alguno de los equipos le faltaba en ese momento por lo menos 4 juegos por jugar.

Problema 2. En un planeta, el año dura 101 días y los días están numerados del 1 al 101. Resulta que llueve un día, después deja de llover dos días, al día siguiente vuelve a llover y después deja de llover el día siguiente; otra vez llueve y luego pasan dos días más sin llover y así sucesivamente, alternándose los días que no hay lluvia en $2, 1, 2, 1, 2$, etc. Llovió por primera vez el día 2, luego el 5, luego el 7, luego el 10, luego el 12, etc. Demuestra que, al pasar los años, llega un momento en que ha llovido exactamente el mismo número de veces cada fecha del año, y determina cuántos años deben pasar para que eso ocurra.

Problema 3. Sean l y m dos rectas paralelas. Sean A, B, C y D puntos en l, y sean E, F, G y H puntos en m de forma que $AB = CD$ y $EF = GH$ (ver figura). Sean P y Q los puntos de intersección de AG con CE y de BH con DF, respectivamente. Demuestra que PQ es paralela a las rectas l y m.



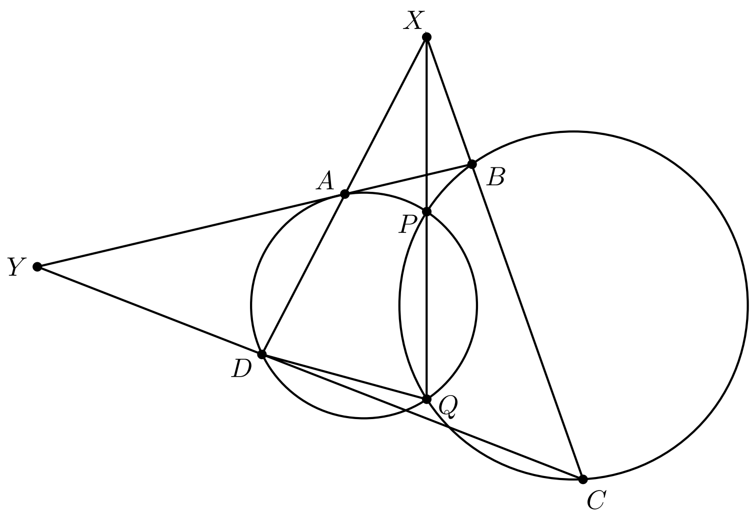
Problema 4. Determina todos los conjuntos A de 4 enteros menores que 250, en los cuales cada pareja de números tenga máximo común divisor igual a un número primo, y que todos esos primos sean distintos.

Problema 5. Demuestra que todos los enteros positivos impares se pueden escribir en la forma,

$$a_0 + 2 \cdot a_1 + 2^2 \cdot a_2 + \cdots + 2^n \cdot a_n,$$

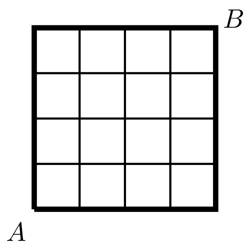
donde n es cualquier entero no negativo y cada a_i es 1 o -1 (por ejemplo, $11 = 1 - 2 + 4 + 8$).

Problema 6. En la figura hay dos círculos que se intersectan en los puntos P y Q; X es un punto sobre la recta por P y Q, y los puntos A, B, C y D son las intersecciones de los círculos con rectas que pasan por X, como se muestra. Demuestra que $YB \cdot YA = YC \cdot YD$.



Problema 7. En un estanque hay 100 litros de agua inicialmente. Se desea poner entre 2 y 6 desagües del mismo tamaño, por donde saldrá toda el agua lentamente. Se tienen 100 recipientes: uno con capacidad de 1 litro, otro con capacidad de 2 litros, otro con capacidad de 3 litros y así sucesivamente (el último tanque tiene capacidad de 100 litros). Se quieren escoger algunos de estos recipientes y colocar uno en cada desagüe para recolectar agua (se escoge el mismo número de recipientes que de desagües). Se requiere que la suma de las capacidades de los recipientes escogidos sea 100. Aún cuando un recipiente se llena, el agua continúa saliendo por el desagüe y se tira. Determina el número óptimo de desagües y las capacidades de los recipientes escogidos de tal manera que la suma de las capacidades de los recipientes llenos cuando se terminan los 100 litros sea máxima. (Nota: Sólo cuentan los recipientes que sí hayan sido llenados por completo, por ejemplo, si se colocan cuatro recipientes con capacidades $12, 20, 28$ y 40, la cantidad de litros recolectados será de $12 + 20 = 32$).

Problema 8. ¿Cuál es la máxima longitud de un camino de A a B en la figura, si el camino debe seguir las líneas y no debe repetir ningún segmento (pero sí puede repetir vértices)?



Problemas y Soluciones de Olimpiadas Internacionales

American Mathematics Competition (AMC)

Durante el entrenamiento de enero en Colima, se aplicaron los exámenes AMC 10 y AMC 12 (American Mathematics Competition). Dichos exámenes son los que se aplican como primera fase en los Estados Unidos. El AMC 10 es para estudiantes que están cursando, a lo más, primer año de preparatoria, por lo que este examen los presentaron los preseleccionados para la Olimpiada Centroamericana y los segundos lugares del concurso nacional pasado. El AMC 12 es para los que están cursando segundo o tercer año de preparatoria, de modo que lo presentaron los preseleccionados para la Olimpiada Internacional. Cada examen consta de 15 preguntas de opción múltiple para resolver en un máximo de 75 minutos y con un máximo puntaje de 150 puntos. En esta ocasión, los tres puntajes más altos del AMC 10 fueron: Axel Omer Gómez Cásarez con 123 puntos, Kevin William Beuchot Castellanos con 118.5 puntos y Diego Fajardo Rojas con 114 puntos. Por otra parte, los tres puntajes más altos del AMC 12 fueron: Julio César Díaz Calderón con 103.5 puntos, José Ramón Guardiola Espinosa con 100.5 puntos y Jorge Ignacio González Cázares, con 99 puntos.

A continuación presentamos los problemas y las soluciones del concurso AMC 10 de este año.

AMC 10A

Problema 1. Ana puede hornear un pastelito cada 20 segundos y Juana lo puede hacer en 30 segundos. Trabajando juntas, ¿cuántos pastelitos pueden hornear en 5 minutos?

(a) 10 (b) 15 (c) 20 (d) 25 (e) 30

Solución. La respuesta es (d).
Como 20 segundos es $\frac{1}{3}$ de un minuto, Ana puede hornear $5 \div \frac{1}{3} = 15$ pastelitos en 5 minutos. Por otra parte, Juana puede hornear $5 \div \frac{1}{2} = 10$ pastelitos. Luego, entre las dos hornean 25 pastelitos en 5 minutos.

Problema 2. Un cuadrado de lado 8 se cortó por la mitad, formando dos rectángulos congruentes. ¿Cuáles son las dimensiones de uno de estos rectángulos?

(a) 2 por 4 (b) 2 por 6 (c) 2 por 8 (d) 4 por 4 (e) 4 por 8

Solución. La respuesta es (e).
La medida de la base de cada rectángulo es igual a la medida del lado del cuadrado, es decir, 8. La altura del rectángulo es igual a la mitad del lado del cuadrado, es decir, 4. Por lo tanto, las dimensiones de los rectángulos son 4 por 8.

Problema 3. Un insecto se mueve sobre la recta numérica comenzando en -2. Avanza al -6 y luego regresa al 5. ¿Cuántas unidades recorrió en total?

(a) 9 (b) 11 (c) 13 (d) 14 (e) 15

Solución. La respuesta es (e).
La distancia del -2 al -6 es de $|(-6) - (-2)| = 4$ unidades. La distancia del -6 al 5 es de $|5 - (-6)| = 11$. Por lo tanto, el insecto recorrió 15 unidades.

Problema 4. Si $\angle ABC = 24°$ y $\angle ABD = 20°$, ¿cuál es el mínimo número de grados posible que puede medir el ángulo $\angle CBD$?

(a) 0 (b) 2 (c) 4 (d) 6 (e) 12

Solución. La respuesta es (c).
El rayo AB es común a los ángulos $\angle ABC$ y $\angle ABD$. Luego, $\angle CBD = 24° + 20° = 44°$ o $\angle CBD = 24° - 20° = 4°$, dependiendo si el punto C está dentro del ángulo ABD o no, respectivamente. Por lo tanto, el mínimo número de grados que puede medir el ángulo $\angle CBD$ es 4.

Problema 5. El año pasado 100 gatos adultos, de los cuales la mitad eran hembras, fueron llevados a una tienda de mascotas. La mitad de las hembras adultas tenían una camada de gatitos. El número promedio de gatitos por camada era 4. ¿Cuántos gatos y gatitos recibió la tienda de mascotas el año pasado?

(a) 150 (b) 200 (c) 250 (d) 300 (e) 400

Solución. La respuesta es (b).
Había 50 gatos que eran hembras adultas y 25 de ellas tenían una camada de 4 gatitos en promedio, luego había 100 gatitos. Por lo tanto, el número total de gatos que recibió la tienda fue de $100 + 100 = 200$.

Problema 6. El producto de dos números positivos es 9. El recíproco de uno de estos números es 4 veces el recíproco del otro. ¿Cuál es la suma de los dos números?

(a) $\frac{10}{3}$ (b) $\frac{20}{3}$ (c) 7 (d) $\frac{15}{2}$ (e) 8

Solución. La respuesta es (d).
Sea $x > 0$ el primer número y $y > 0$ el segundo. Luego, $xy = 9$ y $\frac{1}{x} = \frac{4}{y}$. Entonces $(x)(4x) = 9$, luego, $x = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$, de donde $y = 4 \times \frac{3}{2} = 6$. Por lo tanto, $x + y = \frac{3}{2} + 6 = \frac{15}{2}$.

Problema 7. En una bolsa con canicas, $\frac{3}{5}$ de las canicas son azules y el resto son rojas. Si el número de canicas rojas se duplica y el número de canicas azules no cambia, ¿qué fracción de las canicas serán rojas?

(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{3}{7}$ (c) $\frac{4}{7}$ (d) $\frac{3}{5}$ (e) $\frac{4}{5}$

Solución. La respuesta es (c).
La razón entre las canicas azules y las rojas es $3 : 2$. Si la cantidad de canicas rojas se duplica, entonces la razón sería $3 : 4$. Por lo tanto, la fracción de canicas rojas es, $\frac{4}{3+4} = \frac{4}{7}$.

Problema 8. Las sumas de tres números tomados por parejas son 12, 17 y 19. ¿Cuál es el número de en medio?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Solución. La respuesta es (d).
Denotemos por a, b y c a los tres números de manera que $a < b < c$. Luego, $a+b = 12$, $a + c = 17$ y $b + c = 19$. Tenemos que,

$$2(a + b + c) = (a + b) + (a + c) + (b + c) = 12 + 17 + 19 = 48,$$

de donde $a + b + c = 24$. Por lo tanto, $b = (a + b + c) - (a + c) = 24 - 17 = 7$ es el número de en medio.

Problema 9. Una pareja de dados de seis caras son etiquetados de tal manera que un dado sólo tiene números pares (el 2, 4 y 6 en dos caras cada uno), y el otro dado tiene sólo números impares (el 1, 3 y 5 en dos caras cada uno). Si se lanza el par de dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números de las caras de arriba de ambos dados es 7?

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{1}{2}$

Solución. La respuesta es (d).
Notemos que, sin importar el resultado del primer dado, sólo uno de los tres posibles resultados del segundo dado hace que la suma sea 7 (si salió el 2 se necesita el 5, si

salió el 4 se necesita el 3, y si salió el 6 se necesita el 1). Luego, la probabilidad buscada es $\frac{1}{3}$.

Problema 10. Mary divide un círculo en 12 sectores. Los ángulos centrales de estos sectores, medidos en grados, son todos enteros y forman una progresión aritmética. ¿Cuántos grados mide el ángulo del sector más pequeño posible?

(a) 5 (b) 6 (c) 8 (d) 10 (e) 12

Solución. La respuesta es (c).
Sean a el término inicial y d la diferencia común de la progresión aritmética. Entonces, la suma de las medidas en grados de los ángulos centrales es,

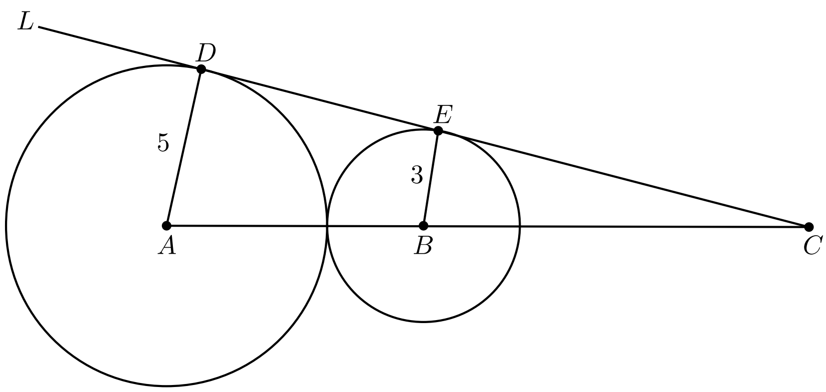
$$a + (a + d) + \cdots + (a + 11d) = 12a + 66d = 360,$$

de donde $2a + 11d = 60$. Si d es impar, entonces $2a$ sería impar lo cual es un absurdo. Si $d = 2$, entonces $a = 19$; y si $d = 4$, entonces $a = 8$. Si $d \geq 6$, entonces a sería negativo, lo cual no es posible. Por lo tanto, el menor valor entero positivo posible de a es 8.

Problema 11. Dos circunferencias tangentes externamente con centros en los puntos A y B, tienen radios de 5 y 3, respectivamente. Una recta tangente externamente a ambos círculos intersecta a AB en el punto C. ¿Cuánto mide BC?

(a) 4 (b) 4.8 (c) 10.2 (d) 12 (e) 14.4

Solución. La respuesta es (d).
Denotemos por L a la recta externa tangente a ambos círculos. Sean D y E los puntos de tangencia de las circunferencias con centros en A y B, respectivamente.



Como $AD = 5$ y $BE = 3$, entonces $AB = 8$. Además, como los triángulos rectángulos ADC y BEC son semejantes, tenemos que,

$$\begin{aligned}\frac{BC}{AC} &= \frac{BE}{AD}\\ \frac{BC}{BC+8} &= \frac{3}{5}\\ 5BC &= 3BC+24\\ BC &= 12.\end{aligned}$$

Problema 12. Un año es bisiesto si y sólo si es divisible entre 400 (por ejemplo, el año 2000) o es divisible entre 4 pero no entre 100 (por ejemplo, el año 2012). El bicentenario del aniversario del nacimiento del novelista Charles Dickens fue celebrado el martes 7 de febrero de 2012. ¿En qué día de la semana nació Dickens?

(a) Viernes (b) Sábado (c) Domingo (d) Lunes (e) Martes

Solución. La respuesta es (a).
Hubieron $200 \cdot 365 = 73000$ días no bisiestos en el bicentenario del 7 de febrero de 1812 al 7 de febrero de 2012. Una cuarta parte de esos años tuvieron un día bisiesto, excepto en el año 1900, de modo que hubo $\frac{1}{4} \cdot 200 - 1 = 49$ días bisiestos en ese periodo. Luego, Dickens nació 73049 días antes de un martes. Como el mismo día de la semana ocurre cada 7 días y $73049 = 7(10435) + 4$, el día que nació Dickens (7 de febrero de 1812) fue 4 días antes de un martes, es decir, un viernes.

Problema 13. Un *promedio iterativo* de los números $1, 2, 3, 4$ y 5 es calculado de la siguiente manera. Ordena los cinco números de alguna manera. Determina el promedio de los primeros dos números, luego determina el promedio del resultado anterior con el tercer número, después determina el promedio del resultado previo con el cuarto número, y por último determina el promedio del resultado anterior con el quinto número. ¿Cuál es la diferencia entre los valores máximo y mínimo posibles que pueden ser obtenidos usando este procedimiento?

(a) $\frac{31}{16}$ (b) 2 (c) $\frac{17}{8}$ (d) 3 (e) $\frac{65}{16}$

Solución. La respuesta es (c).
Si los números son acomodados en el orden a, b, c, d, e, entonces el promedio iterativo es,

$$\frac{\frac{\frac{\frac{a+b}{2}+c}{2}+d}{2}+e}{2} = \frac{a+b+2c+4d+8e}{16}.$$

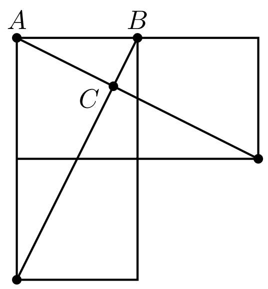
El mayor valor se obtiene haciendo $(a, b, c, d, e) = (1, 2, 3, 4, 5)$ o $(2, 1, 3, 4, 5)$, y el menor valor se obtiene haciendo $(a, b, c, d, e) = (5, 4, 3, 2, 1)$ o $(4, 5, 3, 2, 1)$. En el primer caso el promedio iterativo es $\frac{65}{16}$, y en el segundo caso el promedio iterativo es $\frac{31}{16}$. Luego, la diferencia buscada es $\frac{65}{16} - \frac{31}{16} = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$.

Problema 14. Pablo fabrica tableros de ajedrez no convencionales de 31×31 cuadrados. Los tableros tienen un cuadrado negro en cada esquina y se alternan cuadrados rojo y negro en cada renglón y columna. ¿Cuántos cuadrados negros hay en cada tablero?

(a) 480 (b) 481 (c) 482 (d) 483 (e) 484

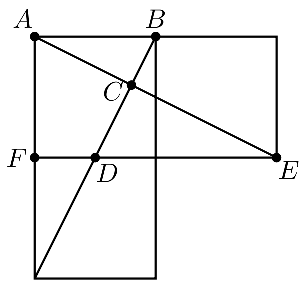
Solución. La respuesta es (b).
Dividamos el tablero de ajedrez no convencional en dos partes: las primeras 30 columnas y la última. La sección más grande consiste de renglones, cada una conteniendo 15 cuadrados negros. La última columna contiene 16 cuadrados negros. Luego, el número total de cuadrados negros es $31 \cdot 15 + 16 = 481$.
Otra forma: Hay 16 renglones que tienen 16 cuadrados negros y 15 renglones que tienen 15 cuadrados negros, de modo que el número total de cuadrados negros es $16^2 + 15^2 = 481$.

Problema 15. Se tienen tres cuadrados unitarios y dos segmentos de recta que conectan dos pares de vértices como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área del triángulo ABC?



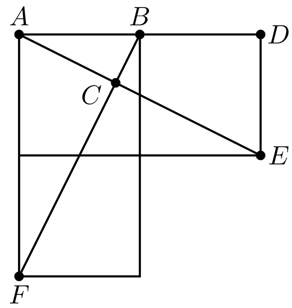
(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{2}{9}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

Solución. La respuesta es (b).
Nombremos a los puntos como muestra la figura.



Como los cuadrados son de lado 1, por semejanza es fácil ver que $FD = \frac{1}{2}$ y $DE = \frac{3}{2}$. Ahora, como AB y DE son paralelas, los triángulos ABC y EDC son semejantes con razón $2 : 3$. Si h y h' son las alturas desde C en los triángulos ABC y EDC, respectivamente, tenemos que $\frac{h}{h'} = \frac{2}{3}$. Además, $h + h' = 1$, de donde $h = \frac{2}{5}$ y el área de ABC es $\frac{1}{5}$.

Otra forma: Coloquemos la figura en el plano cartesiano, con A en el origen y B en el eje positivo de las abcisas, como se muestra en la figura.



Entonces las ecuaciones de las rectas AE y BF son, $y = -\frac{1}{2}x$ y $y = 2x - 2$, respectivamente. Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas obtenemos que $C = (\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$. Luego, en el triángulo ABC la base mide $1 = AB$ y la altura $\frac{2}{5}$, por lo tanto su área mide $\frac{1}{5}$.
Otra forma: Los triángulos rectángulos congruentes AED y FBA tienen la propiedad de que sus correspondientes catetos son perpendiculares, de modo que sus hipotenusas son perpendiculares. Por lo tanto, $\angle ACB$ es un ángulo recto y los triángulos ACB y FAB son semejantes. Como $AB = 1$ y $BF = \sqrt{5}$, la razón del área del triángulo ACB y el área del triángulo FAB es $\frac{1}{5}$. Luego, si el área del triángulo FAB es 1, entonces el área del triángulo ACB es $\frac{1}{5}$.

Problema 16. Tres corredores comienzan a correr simultáneamente desde el mismo punto sobre una pista circular de 500 metros. Todos corren en sentido de las manecillas del reloj manteniendo velocidades constantes de 4.4, 4.8 y 5 metros por segundo. Los corredores se detienen una vez que estén todos juntos nuevamente en algún lugar sobre la pista. ¿Cuántos segundos corren los corredores?

(a) 1000 (b) 1250 (c) 2500 (d) 5000 (e) 10000

Solución. La respuesta es (c).
Llamemos a los corredores A, B y C en orden creciente de velocidad. Después del comienzo de la carrera, el corredor B y el corredor C estarán juntos nuevamente una vez que el corredor C haya corrido 500 metros de más. Luego, les tomará $\frac{500}{5-4.8} = 2500$ segundos a los corredores B y C para estar juntos de nuevo. De manera similar, les tomará $\frac{500}{4.8-4.4} = 1250$ segundos a los corredores A y B para estar juntos de nuevo. Los corredores A y B también estarán juntos en $2 \cdot 1250 = 2500$ segundos. En ese

momento los tres corredores estarán juntos.

Problema 17. Sean a y b enteros primos relativos tales que $a > b > 0$ y $\frac{a^3-b^3}{(a-b)^3} = \frac{73}{3}$. ¿Cuánto vale $a - b$?

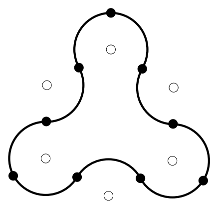
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Solución. La respuesta es (c).
Observe que,

$$\frac{a^3-b^3}{(a-b)^3} = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a-b)^2} = \frac{a^2+ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}.$$

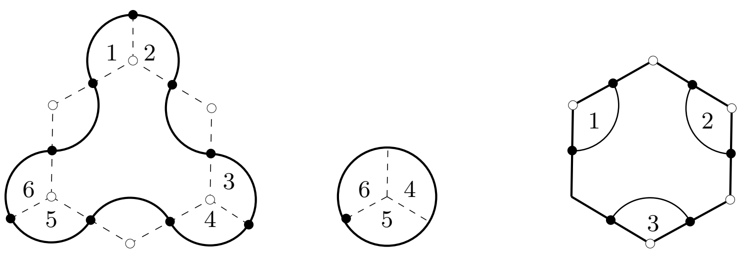
Luego, la ecuación dada puede ser escrita como $3a^2+3ab+3b^2 = 73a^2-146ab+73b^2$. Simplificando, obtenemos que $(10a-7b)(7a-10b) = 0$. Como $a > b$ y a, b son primos relativos, se sigue que $a = 10$ y $b = 7$. Por lo tanto, $a - b = 3$.

Problema 18. La curva cerrada en la figura está hecha de 9 arcos circulares congruentes, cada uno de longitud $\frac{2\pi}{3}$, donde cada uno de los centros de los correspondientes círculos es un vértice de un hexágono regular de lado 2. ¿Cuál es el área encerrada por la curva?



(a) $2\pi + 6$ (b) $2\pi + 4\sqrt{3}$ (c) $3\pi + 4$ (d) $2\pi + 3\sqrt{3} + 2$ (e) $\pi + 6\sqrt{3}$

Solución. La respuesta es (e).
Los sectores circulares marcados en la figura tienen la misma área, dado que son los $\frac{2}{3}$ de un círculo de radio 1. Entonces, el área encerrada por la curva es igual al área de un círculo de radio 1 más el área de un hexágono regular de lado 2.



Como el hexágono se puede dividir es 6 triángulos equiláteros de lado 2, tenemos que el área buscada mide, $\pi + 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2\right) = \pi + 6\sqrt{3}$.

Problema 19. La pintora Paula y sus dos ayudantes pintan cada uno a velocidades constantes pero distintas. Todos ellos comienzan siempre a las 8:00 a.m., y los tres siempre tardan el mismo tiempo en tomar su almuerzo. El lunes los tres pintaron el $50\,\%$ de una casa, terminando a las 4:00 p.m. El martes, Paula no asistió a trabajar, y los dos ayudantes pintaron sólo el $24\,\%$ de la casa terminando a las 2:12 p.m. El miércoles Paula trabajó sola y terminó de pintar la casa trabajando hasta las 7:12 p.m. ¿Cuánto tiempo, en minutos, duró el almuerzo de cada día?

(a) 30 (b) 36 (c) 42 (d) 48 (e) 60

Solución. La respuesta es (d).
Supongamos que el almuerzo duró m minutos. Entonces, los tres pintores trabajaron cada uno $480 - m$ minutos el lunes, los dos ayudantes trabajaron $372 - m$ minutos el martes, y Paula trabajó $672 - m$ minutos el miércoles. Si Paula pintó $p\,\%$ de la casa por minuto y sus ayudantes pintaron un total de $h\,\%$ de la casa por minuto, entonces,

$$\begin{aligned} (p+h)(480-m) &= 50, \\ h(372-m) &= 24, \\ p(672-m) &= 26. \end{aligned}$$

Sumando las últimas dos ecuaciones obtenemos que $672p + 372h - mp - mh = 50$, y restando esta ecuación de la primera obtenemos que $108h - 192p = 0$, de donde $h = \frac{16p}{9}$. Sustituyendo este valor de h en la primera ecuación del sistema original, obtenemos el sistema,

$$\begin{aligned} \frac{25p}{9}(480-m) &= 50, \\ p(672-m) &= 26. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema obtenemos las soluciones $p = \frac{1}{24}$ y $m = 48$. Observe que $h = \frac{2}{27}$.

Problema 20. Un cuadrado de 3×3 se dividió en 9 cuadrados unitarios. Cada cuadrado unitario se pinta de color blanco o negro, con cada color siendo igualmente probable, elegido independientemente y al azar. Luego, el cuadrado es rotado 90° en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de su centro, y cada cuadrado blanco en una posición antes ocupada por un cuadrado negro se pinta de negro. Los colores del resto de los cuadrados no cambian. ¿Cuál es la probabilidad de que toda la cuadrícula sea ahora completamente negra?

(a) $\frac{49}{512}$ (b) $\frac{7}{64}$ (c) $\frac{121}{1024}$ (d) $\frac{81}{512}$ (e) $\frac{9}{32}$

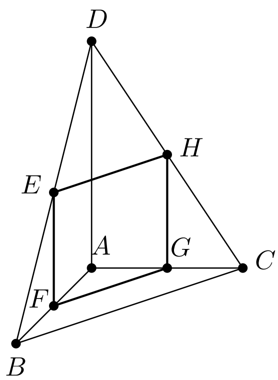
Solución. La respuesta es (a).
Hay $2^4 = 16$ posibles coloraciones iniciales para los cuatro cuadrados de las esquinas.

Si su coloración inicial es $NNNN$, o una de las cuatro permutaciones cíclicas de $NNNB$, o una de las dos permutaciones cíclicas de $NBNB$, entonces los cuatro cuadrados de las esquinas serán negros al final. Si la coloración inicial es $BBBB$, o una de las cuatro permutaciones cíclicas de $NBBB$, o una de las cuatro permutaciones cíclicas de $NNBB$, entonces al menos uno de los cuatro cuadrados de las esquinas será blanco al final. Por lo tanto, los cuatro cuadrados de las esquinas serán negros al final con probabilidad $\frac{7}{16}$. Del mismo modo, los cuatro bordes cuadrados serán negros al final con probabilidad $\frac{7}{16}$. El cuadrado central será negro al final si y sólo si era inicialmente negro, de modo que será negro al final con probabilidad $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, la probabilidad de que los nueve cuadrados sean negros al final es $\frac{1}{2}(\frac{7}{16})^2 = \frac{49}{512}$.

Problema 21. Considera los puntos $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 2, 0)$ y $D = (0, 0, 3)$. Los puntos E, F, G y H son los puntos medios de los segmentos BD, AB, AC y DC, respectivamente. ¿Cuál es el área de $EFGH$?

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (c) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ (d) $\sqrt{3}$ (e) $\frac{2\sqrt{7}}{3}$

Solución. La respuesta es (c).
Como E, F, G y H son puntos medios, entonces, $E = (\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$, $F = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, $G = (0, 1, 0)$ y $H = (0, 1, \frac{3}{2})$.



Observemos que, $EF = GH$, EF es perpendicular a EH, GF es perpendicular a GH y

$$EH = FG = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Por lo tanto, $EFGH$ es un rectángulo cuya área mide $\frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$.

Problema 22. La suma de los primeros m enteros positivos impares es 212 más que la suma de los primeros n enteros positivos pares. ¿Cuál es la suma de todos los valores posibles de n?

(a) 255 (b) 256 (c) 257 (d) 258 (e) 259

Solución. La respuesta es (a).
La suma de los primeros k enteros positivos es $\frac{k(k+1)}{2}$. Por lo tanto, la suma de los primeros k enteros positivos pares es,

$$2+4+6+\cdots+2k = 2(1+2+3+\cdots+k) = 2\cdot\frac{k(k+1)}{2} = k(k+1).$$

La suma de los primeros k enteros positivos impares es,

$$(1+2+3+\cdots+2k)-(2+4+6+\cdots+2k) = \frac{2k(2k+1)}{2} - k(k+1) = k^2.$$

Las condiciones dadas implican que $m^2-212 = n(n+1)$, lo cual puede ser reescrito como $n^2+n+(212-m^2) = 0$. El discriminante de esta ecuación cuadrática en la variable n es $1-4(212-m^2) = 4m^2-847$, el cual debe ser el cuadrado de un entero impar. Sea $p^2 = 4m^2-847$. Reescribiendo esta ecuación obtenemos que $(2m+p)(2m-p) = 847$. Las únicas parejas de factores de 847 son $(847,1)$, $(121,7)$ y $(77,11)$. Igualando estas parejas a $2m+p$ y $2m-p$, obtenemos las soluciones $(m,p) = (212,423)$, $(32,57)$ y $(22,33)$. Observe que los correspondientes valores de n se obtienen usando la relación $n = \frac{-1+p}{2}$, de donde se obtiene $n = 211, 28, 16$, respectivamente. Por lo tanto, la suma de los valores posibles de n es 255.

Problema 23. Ana, Curro, Marco, Carlos, Toño y Mila tienen cuentas de internet. Algunos de ellos, pero no todos, son amigos entre sí por internet, y ninguno de ellos tiene un amigo por internet fuera del grupo. Además cada uno de ellos tiene el mismo número de amigos por internet. ¿De cuántas formas distintas puede suceder esto?

(a) 60 (b) 170 (c) 290 (d) 320 (e) 660

Solución. La respuesta es (b).
El problema se puede plantear con un grafo teniendo a las 6 personas como vértices, en el cual dos vértices están unidos por una arista si y sólo si las correspondientes personas son amigos por internet. Sea n el número de amigos que cada persona tiene. Luego, $1 \leq n \leq 4$ (si $n = 5$, entonces todos serían amigos entre sí, contrario a lo que dice el problema). Si $n = 1$, entonces el grafo consiste de tres aristas que no comparten vértices. Hay 5 elecciones para el amigo de Ana y hay 3 formas de dividir a las restantes 4 personas en 2 pares de amigos, para un total de $5\cdot 3 = 15$ posibilidades. El caso $n = 4$ es complementario, cambiando el rol de ser amigo por no ser amigo, de modo que también hay 15 posibilidades en este caso.
Si $n = 2$, el grafo debe tener ciclos, y las únicas dos elecciones son dos triángulos (3-ciclos) y un hexágono (6-ciclo). En el primer caso, hay $\binom{5}{2} = 10$ formas de elegir dos amigos para Ana y cada elección determina de manera única los triángulos. En el segundo caso, cada permutación de los seis vértices determina un hexágono, pero cada hexágono es contado $6\cdot 2 = 12$ veces, ya que el hexágono puede comenzar en cualquier vértice y ser recorrido en cualquier dirección. Esto nos da $\frac{6!}{12} = 60$ hexágonos, para

un total de $10 + 60 = 70$ posibilidades. El caso complementario $n = 3$ nos da 70 posibilidades más. Por lo tanto, el total es $15 + 15 + 70 + 70 = 170$.

Problema 24. Sean a, b y c enteros positivos con $a \geq b \geq c$, tales que,

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 - c^2 + ab &= 2011, \\ a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 3ab - 2ac - 2bc &= -1997. \end{aligned}$$

¿Cuánto vale a?

(a) 249 (b) 250 (c) 251 (d) 252 (e) 253

Solución. La respuesta es (e).
Sumando las dos ecuaciones dadas obtenemos,

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = 14,$$

o bien,

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 14.$$

Observe que hay una única forma de escribir a 14 como suma de tres cuadrados (salvo el orden de los sumandos): $14 = 3^2 + 2^2 + 1^2$. Como $a - b$, $b - c$ y $c - a$ son enteros tales que su suma es igual a 0 y $a \geq b \geq c$, se sigue que $a - c = 3$ y: $a - b = 2$ y $b - c = 1$, o bien $a - b = 1$ y $b - c = 2$. Luego, $(a, b, c) = (c + 3, c + 1, c)$ o $(a, b, c) = (c + 3, c + 2, c)$. En el primer caso, al sustituir en la primera ecuación dada obtenemos que $2011 = a^2 - c^2 + ab - b^2 = (a + c)(a - c) + (a - b)b = 3(2c+3) + 2(c+1)$. Resolviendo esta ecuación obtenemos que $(a, b, c) = (253, 251, 250)$. Por último, es fácil ver que el segundo caso no genera soluciones enteras. Por lo tanto, $a = 253$.

Problema 25. Los números reales x, y, z son elegidos independientemente y al azar en el intervalo $[0, n]$ para algún entero positivo n. La probabilidad de que no hay dos de x, y y z que estén a lo más a una unidad el uno del otro es mayor que $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es el menor valor posible de n?

(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 11

Solución. La respuesta es (d).
Podemos asumir que $x \leq y \leq z$. Como hay 6 posibles formas de permutar la terna (x, y, z), se sigue que el conjunto de todas las ternas (x, y, z) con $0 \leq x \leq y \leq z \leq n$ es una región cuyo volumen es $\frac{1}{6}$ del volumen del cubo $[0, n] \times [0, n] \times [0, n]$, que es $\frac{1}{6}n^3$. Sea S el conjunto de ternas que satisfacen la condición del problema. Para cada $(x, y, z) \in S$ consideremos la traslación $(x, y, z) \mapsto (x', y', z') = (x, y - 1, z - 2)$. Observe que $y' = y - 1 > x = x'$ y $z' = z - 2 > y - 1 = y'$. Luego, la imagen de S bajo esta traslación es igual a $\{(x', y', z') \mid 0 \leq x' < y' < z' \leq n - 2\}$. Nuevamente, por la simetría de las posibles permutaciones de las ternas (x', y', z'), el volumen de este conjunto es $\frac{1}{6}(n - 2)^3$. Como $\frac{7^3}{9^3} = \frac{343}{729} < \frac{1}{2}$ y $\frac{8^3}{10^3} = \frac{512}{1000} > \frac{1}{2}$, el menor valor posible de n es 10.

XXIV Olimpiada de la Cuenca del Pacífico

Desde 1991, los ganadores del Concurso Nacional participan anualmente en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, APMO, por sus siglas en inglés. En el mes de marzo, se aplicó el examen de la XXIV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico a los alumnos que en ese momento formaban parte de la preselección. Los 10 mejores exámenes se enviaron a Japón para ser evaluados por el comité japonés. Este año México obtuvo un oro, dos platas, cuatro bronces y tres menciones honoríficas. Con 177 puntos México consigue el lugar número 12 de 37 países participantes, además obtiene el máximo número de medallas que dicho concurso otorga a cada país por año. Esta ha sido la mejor actuación de México en la olimpiada de la cuenca del pacífico. Los nombres de los alumnos que obtuvieron tales preseas se enlistan a continuación:

1. Jorge Garza Vargas (oro)
2. Diego Alonso Roque Montoya (plata)
3. Enrique Chiu Han (plata)
4. Juan Carlos Ortiz Rhoton (bronce)
5. Jorge Ignacio González Cázares (bronce)
6. Alberto Astiazarán Tobín (bronce)
7. Adán Medrano Martín del Campo (bronce)
8. Julio César Díaz Calderón (mención honorífica)
9. José Ángel Sánchez Gómez (mención honorífica)
10. Diego Terán Ríos (mención honorífica)

A continuación presentamos los problemas y las soluciones de la XXIV Olimpiada de la Cuenca del Pacífico. Los alumnos tuvieron 4 horas para resolverlos.

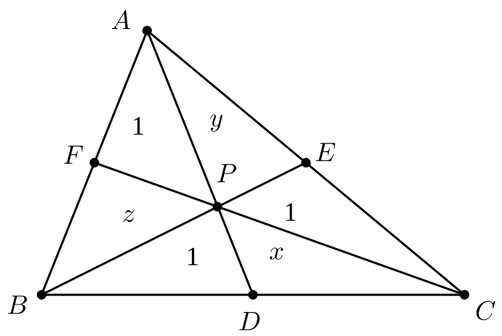
Problema 1. Sea P un punto en el interior del triángulo ABC, y sean D, E, F, los puntos de intersección de la recta AP con el lado BC del triángulo, de la recta BP con el lado CA y de la recta CP con el lado AB, respectivamente. Muestra que si el área de cada uno de los triángulos PFA, PDB y PEC es igual a 1, entonces el área del triángulo ABC es igual a 6.

Solución de Enrique Chiu Han. Sean $x = (PDC), y = (PEA)$ y $z = (PFB)$, en donde (RST) denota el área del triángulo RST. Los triángulos CDP y CAP comparten la altura en C; los triángulos BDP y BAP comparten la altura en B, así que se tiene,

$$\frac{1}{z+1} = \frac{(BDP)}{(BAP)} = \frac{DP}{PA} = \frac{(CDP)}{(CAP)} = \frac{x}{y+1}.$$

De lo anterior se concluye que,

$$x = \frac{y+1}{z+1}, \quad zx + x = y + 1. \tag{1}$$



Con argumentos similares al anterior se puede ver que,

$$y = \frac{z+1}{x+1}, \quad xy + y = z + 1, \tag{2}$$

$$z = \frac{x+1}{y+1}, \quad yz + z = x + 1. \tag{3}$$

Al multiplicar las primeras expresiones en (1), (2) y (3) obtenemos $xyz = 1$, mientras que si sumamos las segundas expresiones en (1), (2) y (3) llegamos a que $xy + yz + zx = 3$, de manera que

$$\frac{1}{3}(xy + yz + zx) = 1 = \sqrt[3]{(xy)(yz)(zx)}.$$

La desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica nos dice que, como se da la igualdad anterior, entonces $xy = yz = zx$, pero sabemos también que $xyz = 1$, así que podemos concluir que $x = y = z = 1$. Finalmente,

$$(ABC) = x + y + z + (PFA) + (PDB) + (PEC) = 6,$$

como se quería.

Problema 2. En cada casilla de un tablero de 2012×2012 se coloca un número real mayor o igual que 0 y menor o igual que 1. Considera las divisiones del tablero en 2 rectángulos no vacíos formados por casillas del tablero que se obtienen al dibujar una recta paralela ya sea a los lados horizontales o verticales del tablero. Supón que, sin importar cuál división en 2 rectángulos se tome, en al menos uno de los rectángulos resultantes de la división la suma de los números en las casillas de tal rectángulo es menor o igual a 1. Determina el máximo valor posible de la suma de todos los 2012×2012 números colocados en las casillas.

Solución de Jorge Garza Vargas. La respuesta es 5. Sea S la suma de todos los números en el tablero. Primero veamos que es posible alcanzar $S = 5$ al tomar un subtablero de 3×3 en una esquina del tablero original y poner unos y ceros como se muestra en la figura de abajo; el resto de las casillas del tablero se llenan con ceros. Es fácil verificar que un tablero como este cumple lo que pide el problema.

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
0	0	0	0	$\cdots$
0	1	0	0	$\cdots$
1	1	1	0	$\cdots$
0	1	0	0	$\cdots$

Ahora demostraremos que $S \leq 5$ en cualquier tablero que cumpla las hipótesis. Tomemos un tablero con $S > 1$ (porque si esto no sucediera ya habríamos terminado ese caso). Enumeremos las columnas del tablero de izquierda a derecha y las filas de arriba hacia abajo. Denotemos por x_i a la suma de los números en la columna i y por y_j a la suma de los números en la fila j.
Para cada $1 \leq k \leq 2011$ sean,

$$A_k = \sum_{t=1}^{k} x_t, \quad B_k = S - A_k, \quad C_k = \sum_{t=1}^{k} y_t \ \text{ y } \ D_k = S - C_k.$$

La hipótesis del problema se traduce en que, para cualquier entero $1 \leq k \leq 2011$, $\min\{A_k, B_k\} \leq 1$ y $\min\{C_k, D_k\} \leq 1$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe el mayor entero m que cumple $A_m \leq B_m$. Entonces $A_{m+1} > B_{m+1}$, $A_m \leq 1$ y $B_{m+1} \leq 1$. Ahora veremos que $x_{m+1} \leq 3$. Sea n el mayor entero tal que $C_n \leq D_n$. Como antes, podemos ver que $C_n \leq 1$ y $D_{n+1} \leq 1$. Sean $r_1, r_2, \ldots, r_{2012}$ los números en la columna $m + 1$, comenzando desde arriba. Tenemos que,

$$x_{m+1} = \sum_{t=1}^{n} r_t + r_{n+1} + \sum_{t=n+2}^{2012} r_t \leq C_n + 1 + D_{n+1} \leq 3,$$

así que $S = A_m + x_{m+1} + B_{m+1} \leq 1 + 3 + 1 = 5$, lo cual concluye la demostración.

Problema 3. Determina todas las parejas (p, n) con p un número primo y n un entero positivo que cumplan que el número $\dfrac{n^p + 1}{p^n + 1}$ es entero.

Solución de Diego Alonso Roque Montoya. Denotemos por $f(p, n)$ al número $\frac{n^p+1}{p^n+1}$. Para el caso $p = 2$, hacemos directamente las cuentas tomando $1 \leq n \leq 4$; se obtiene que $f(2, 2) = f(2, 4) = 1$ y sólo estos dos son enteros. Mostraremos ahora por inducción que para $n \geq 5$ se cumple que $n^2 < 2^n$. Para $n = 5$ se tiene

$5^2 + 1 = 26 < 33 = 2^5 + 1$. Si ya hemos demostrado la desigualdad para algún $n \geq 5$, entonces para el caso $n+1$ hacemos $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^2 > (n+1)^2$, con lo cual acabamos. Se sigue entonces que para $n \geq 5$, $f(2,n)$ no puede ser entero ya que,

$$f(2,n) = \frac{n^2+1}{2^n+1} < \frac{2^n+1}{2^n+1} = 1.$$

Consideremos de ahora en adelante $p \geq 3$. Usando un poco de Cálculo Diferencial elemental podemos comprobar que la función $g(x) = \frac{\log x}{x}$ es decreciente en el intervalo $[e, \infty)$, en donde e es la constante de Euler (que es un número que cumple $2 < e < 3$). Entonces si $n > p$, se llega a que $n^p < p^n$ y por lo tanto $f(p,n) < 1$. De manera que sólo nos resta analizar los casos $n \leq p$. Como $p > 2$, entonces p es impar y $p^n + 1$ es par, por lo que $n^p + 1$ debe ser par, lo cual sucede sólo cuando n es impar. Notemos ahora que como n es impar se tiene que $p+1 \mid p^n + 1$ y así $p + 1 \mid n^p + 1$, o lo que es lo mismo, $n^p \equiv -1 \pmod{p+1}$. De la congruencia anterior se deduce también que $p+1$ y n son primos relativos. Sea $d = ord_{p+1}(n)$ el orden de n módulo $p+1$ (ver en el apéndice la definición 3). Por una parte, el Teorema de Euler (ver en el apéndice el teorema 2) nos asegura que $n^{\varphi(p+1)} \equiv 1 \pmod{p+1}$, así que $d \mid \varphi(p+1) \leq p$, de donde $d \leq p$; por otro lado, sabemos que $n^{2p} \equiv 1 \pmod{p+1}$, de donde $d \mid 2p$ (ver en el apéndice el teorema 4), pero d no puede ser ni 1 ni p porque $n^p \equiv -1 \pmod{p+1}$, y como $d \leq p$, la única posibilidad que queda es $d = 2$. Como p es impar, escribimos $p = 2k+1$, y se tiene que,

$$-1 \equiv n^p \equiv n^{2k+1} \equiv (n^2)^k \cdot n \equiv 1^k \cdot n \equiv n \pmod{p+1},$$

así que $p+1 \mid n+1$ y por lo tanto $p \leq n$, pero también sabemos que $n \leq p$, entonces $n = p$. Además todas las parejas (p,p) funcionan pues $f(p,p) = 1$.
En resumen, las parejas (p,n) para las cuales $f(p,n)$ es entero son (p,p), para cualquier primo p y $(2,4)$.

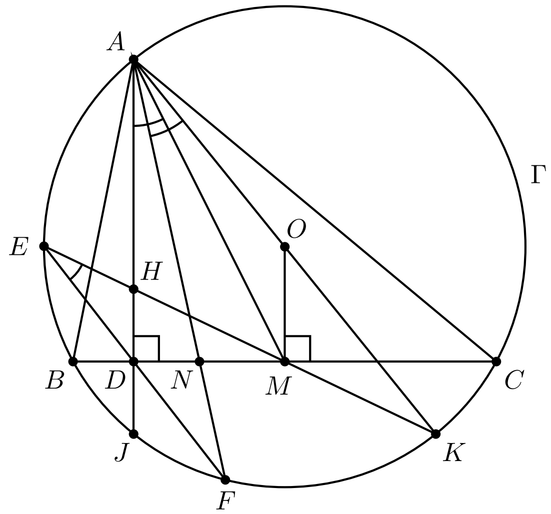
Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo. Denota por D el pie de la perpendicular del punto A sobre el lado BC, por M el punto medio de BC, por H el ortocentro de triángulo ABC y por Γ el circuncírculo de ABC. Sean E el punto de intersección de Γ y el rayo MH, y F el punto de intersección de la recta ED con Γ (distinto de E). Muestra que se cumple,

$$\frac{BF}{CF} = \frac{AB}{AC}.$$

Solución de Alberto Astiazarán Tobín. Sea O el centro de Γ. Comenzaremos por demostrar que AO y HM se intersectan en un punto sobre Γ. Si K es el punto de intersección (distinto de A) de AO y Γ, podemos ver que O es el punto medio de AK porque este segmento es diámetro de Γ. Por otra parte, AH y OM son paralelas por ser perpendiculares a BC, así que los triángulos $K'OM$ y $K'AH$ son semejantes, en donde K' es el punto en el que las rectas AO y HM se cortan. Más aún, usando el conocido hecho de que $2OM = AH$, se sigue que O es punto medio del segmento AK', y por lo tanto $K = K'$, como se quería.

Sea N el punto de intersección de AF con BC y sea J el punto de intersección del rayo HD con Γ. Como AK es diámetro de Γ, entonces JK es perpendicular a AJ, pero BC también lo es pues AD es altura, de manera que BC y JK son paralelas. Esto, combinado con que el cuadrilátero $AEJK$ es cíclico, nos asegura que $AEDM$ también es cíclico. Ahora podemos establecer fácilmente las siguientes igualdades entre ángulos,

$$\angle DAM = \angle DEM = \angle FEK = \angle FAK.$$



Juntando esta igualdad con la bien conocida identidad $\angle BAD = \angle CAO$, llegamos a que $\angle BAN = \angle CAM$, es decir, AF es la simediana del triángulo ABC correspondiente a A (ver en el apéndice las definiciones 18 y 19) y entonces $\frac{BN}{NC} = \frac{AB^2}{AC^2}$. Para terminar aplicaremos el Teorema de la bisectriz generalizado (ver en el apéndice el Teorema 17) y la Ley de los senos (ver en el apéndice el Teorema 14) de la siguiente forma:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BN}{NC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\operatorname{sen} \angle BAN}{\operatorname{sen} \angle NAC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\operatorname{sen} \angle BAF}{\operatorname{sen} \angle FAC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BF}{CF}.$$

Por lo tanto, $\frac{BF}{CF} = \frac{AB}{AC}$.

Problema 5. Sea n un entero mayor o igual a 2. Muestra que si los números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfacen $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = n$, entonces se cumple que,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n - a_i a_j} \leq \frac{n}{2}.$$

Solución oficial. Notemos primero que si $i \neq j$, como $a_i a_j \leq \frac{a_i^2 + a_j^2}{2}$, tenemos que,

$$n - a_i a_j \geq n - \frac{a_i^2 + a_j^2}{2} \geq n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} > 0.$$

Luego, todos los denominadores de la suma $\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{1}{n-a_ia_j}$ son positivos.
Si ponemos $b_i=|a_i|$ para $i=1,2,\ldots,n$, obtenemos que $b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=n$ y $\frac{1}{n-a_ia_j}\leq\frac{1}{n-b_ib_j}$, lo cual deja claro que es suficiente con demostrar la afirmación del problema para el caso en el que $a_1,a_2,\ldots,a_n$ son mayores o iguales a 0. Entonces, asumamos de ahora en adelante que $a_1,a_2,\ldots,a_n$ son todos no negativos.
Multiplicando por n ambos lados de la desigualdad deseada obtenemos,

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{n}{n-a_ia_j}\leq\frac{n^2}{2},$$

y como $\frac{n}{n-a_ia_j}=1+\frac{a_ia_j}{n-a_ia_j}$, obtenemos restando $\frac{n(n-1)}{2}$ de ambos lados, la desigualdad,

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{a_ia_j}{n-a_ia_j}\leq\frac{n}{2}. \tag{4}$$

Demostraremos que esta desigualdad es cierta.
Si para algún i la igualdad $a_i^2=n$ se verifica, entonces se debe tener $a_j=0$ para $j\neq i$ y la desigualdad (4) claramente se cumple. Entonces supondremos de aquí en adelante que $a_i^2<n$ para cada i.
En lo que resta de la prueba asumiremos que $i\neq j$. Como $0\leq a_ia_j\leq\left(\frac{a_i+a_j}{2}\right)^2\leq\frac{a_i^2+a_j^2}{2}$, tenemos que,

$$\frac{a_ia_j}{n-a_ia_j}\leq\frac{a_ia_j}{n-\frac{a_i^2+a_j^2}{2}}\leq\frac{\left(\frac{a_i+a_j}{2}\right)^2}{n-\frac{a_i^2+a_j^2}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a_i+a_j)^2}{(n-a_i^2)+(n-a_j^2)}. \tag{5}$$

Por otra parte, $n-a_i^2>0$, así que la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos asegura que,

$$\left(\frac{a_j^2}{n-a_i^2}+\frac{a_i^2}{n-a_j^2}\right)((n-a_i^2)+(n-a_j^2))\geq(a_i+a_j)^2,$$

de donde se sigue que,

$$\frac{(a_i+a_j)^2}{(n-a_i^2)+(n-a_j^2)}\leq\left(\frac{a_j^2}{n-a_i^2}+\frac{a_i^2}{n-a_j^2}\right). \tag{6}$$

Combinando las desigualdades (5) y (6) obtenemos,

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{a_ia_j}{n-a_ia_j} &\leq \frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\frac{a_j^2}{n-a_i^2}+\frac{a_i^2}{n-a_j^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{a_j^2}{n-a_i^2}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{n-a_i^2}{n-a_i^2}\\ &= \frac{n}{2},\end{aligned}$$

con lo cual queda establecida la desigualdad (4).

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas de julio a octubre de 2012.

Julio

Publicación del quinceavo número de la revista “Tzaloa”.

Julio, del 4 al 16, Mar del Plata, Argentina

53^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Julio, del 23 al 28, Taipei, Taiwan

Competencia Internacional de Matemáticas (IMC).

Agosto, del 9 al 19, Pachuca, Hidalgo

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes selectivos para determinar la delegación para la XXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (un máximo de 4 alumnos).

Septiembre, primera semana

Límite para registro de delegados que quieran aplicar el examen propuesto por el Comité Organizador de la OMM como final de su Concurso Estatal y envío del examen a los delegados.

Septiembre, Bolivia

XXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

Septiembre, 21 y 22

Aplicación de los exámenes finales en los estados registrados con este propósito.

Octubre

Publicación del dieciseisavo número de la revista “Tzaloa”.

Apéndice

Criterios 1 (Criterios de divisibilidad) *Un número entero es divisible,*

- *entre* 2*, si el dígito de las unidades es un número par.*
- *entre* 3*, si la suma de sus dígitos es divisible entre* 3*.*
- *entre* 4*, si el número formado por los dos últimos dígitos (el de las unidades y el de las decenas) es divisible entre* 4*.*
- *entre* 5*, si el dígito de las unidades es* 5 *ó* 0*.*
- *entre* 6*, si es divisible entre* 2 *y* 3*.*
- *entre* 8*, si el número formado por sus últimos tres dígitos es divisible entre* 8*.*
- *entre* 9*, si la suma de sus dígitos es divisible entre* 9*.*

Teorema 2 (Teorema de Euler) *Si* n *es un entero positivo y* a *es un entero primo relativo con* n*, entonces* $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \ (mod\ n)$*, donde* $\varphi(n)$ *denota al número de enteros positivos menores que* n *y primos relativos con* n*.*

Definición 3 (Orden) *Si* a *y* n *son enteros positivos primos relativos, el orden de* a *módulo* n*, denotado por* $ord_n(a)$*, es el menor entero positivo tal que* $a^{ord_n(a)} \equiv 1 \ (mod\ n)$*.*

Teorema 4 (Propiedad del orden) *Si* a *y* n *son enteros positivos primos relativos y* $a^m \equiv 1 \ (mod\ n)$*, entonces* $ord_n(a)$ *divide a* m*.*

Teorema 5 (Desigualdad media aritmética - media geométrica) *Para cualesquiera números reales positivos* $x_1, \ldots, x_n$ *se cumple que,*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

con la igualdad si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$*.*

Teorema 6 (Suma de los ángulos internos de un triángulo) *La suma de los ángulos internos de un triángulo es* $180°$.

Teorema 7 (Teorema de Pitágoras) *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 8 (Congruencia de triángulos) *Los triángulos* ABC *y* $A'B'C'$ *son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo* ABC *son iguales a los ángulos y los lados del triángulo* $A'B'C'$.

Criterio 9 (Criterio de congruencia LLL) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 10 (Criterio de congruencia ALA) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 11 (Semejanza de triángulos) *Los triángulos* ABC *y* $A'B'C'$ *son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir,*

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$
$$\angle ACB = \angle A'C'B'$$
$$\angle BAC = \angle B'A'C'$$

y sus lados homólogos son proporcionales, esto es,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Criterio 12 (Criterio de semejanza AA) *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos* ABC *y* $A'B'C'$ *son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 13 (Medida del ángulo inscrito) *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco.*

Teorema 14 (Ley de los senos) *En un triángulo* ABC*, de lados* a *(opuesto al ángulo* A*),* b *(opuesto al ángulo* B*) y* c *(opuesto al ángulo* C*), se tiene que:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

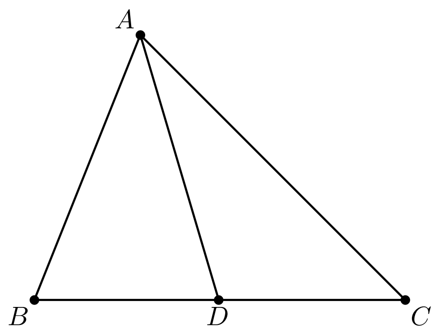
Definición 15 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 16 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, es decir,*

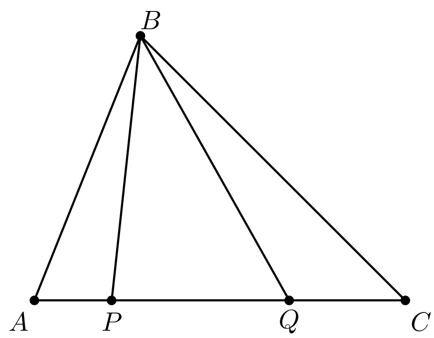
$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Teorema 17 (Teorema de la bisectriz generalizado) *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que,*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA \cdot \operatorname{sen}(\angle BAD)}{AC \cdot \operatorname{sen}(\angle DAC)}.$$



Definición 18 (Rectas isogonales) *Dado un triángulo ABC y puntos P y Q en el lado AC, decimos que las rectas BP y BQ son isogonales si $\angle ABP = \angle QBC$.*



Definición 19 (Simediana) *Una simediana es la recta isogonal de una mediana.*

Bibliografía

[1] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Inequalities. A Mathematical Olympiad Approach*. Birkhäuser, 2009.

[3] J.A. Gómez Ortega. *Algunas maneras de usar la potencia*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 4, 2009.

[4] J.A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[5] I. Niven, H. Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[6] A. Rechtman Bulajich. *Algunas demostraciones del teorema de Pitágoras.* Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 1, 2010.

[7] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[8] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

[9] N. Vilenkin. *¿De cuántas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Directorio

Directorio del Comité Organizador de la OMM

José Antonio Gómez Ortega (presidente)
Facultad de Ciencias, UNAM
jago@ciencias.unam.mx

Ignacio Barradas Bibriesca
Universidad de Guanajuato
barradas@quijote.ugto.mx

Irving Daniel Calderón Camacho
Facultad de Ciencias, UNAM,
irvingdanielc@ciencias.unam.mx

Fernando Campos García
Facultad de Ciencias, UNAM
fermexico89@hotmail.com

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
cobian@ciencias.unam.mx

David Cossío Ruiz
ITESM, Campus Ciudad Juárez
sirio11@gmail.com

Luis Cruz Romo
Sistemas de Inteligencia Territorial Estrátegica
lcruzromo@gmail.com

José Antonio Climent Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
antoniocliment@ciencias.unam.mx

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Guanajuato
fuerunt@gmail.com

Samantha Lizette Flores López
Instituto Tecnológico de Colima
samflo_12@hotmail.com

Luis Miguel García Velázquez
Instituto de Matemáticas, UNAM
garcia.lm@gmail.com

María Eugenia Guzmán Flores
CUCEI, Universidad de Guadalajara
marugeniag@gmail.com

Jesús Jerónimo Castro
Facultad de Ingeniería,
Universidad Autónoma de Querétaro
jesusjero@hotmail.com

Eréndira Jiménez Zamora
Instituto Superior de Educación
Normal de Colima
ere_sweet@hotmail.com

Leonardo Martínez Sandoval
Facultad de Ciencias, UNAM
ssbmplayer@gmail.com

María Luisa Pérez Seguí
Facultad de Ciencias Fis-Mat,
Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo
psegui19@gmail.com

Miguel Raggi Pérez
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Universidad Michoacana de San Nicolás
de Hidalgo
mraggi@gmail.com

Olga Rivera Bobadilla
Facultad de Ciencias,
Universidad Autónoma del
Estado de México
olgarb@yahoo.com

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas,
Universidad Autónoma de Yucatán
carlos.rubio@uady.mx

Elena Ruiz Velázquez
eleniux@gmail.com

David Guadalupe Torres Flores
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Guanajuato
ddtorresf@gmail.com

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias,
Universidad Autónoma del Estado
de Morelos
valdez@uaem.mx

Rita Vázquez Padilla
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
ritavz14@gmail.com

Eduardo Velasco Barreras
Universidad de Sonora
hamsteritokeweb@hotmail.com

Hugo Villanueva Méndez
Instituto de Matemáticas, UNAM
hvillan@matem.unam.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior s/n, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@ciencias.unam.mx`

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

`http://www.omm.unam.mx/`