TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2009, No. 4

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.omm.unam.mx

Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Impreso y hecho en México.
Octubre de 2009.

Contenido

Presentación

Tzaloa, que en náhuatl significa aprender, es una revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. El objetivo principal de esta publicación, es fomentar y estimular el estudio de las matemáticas como una disciplina del pensamiento que desarrolla la inteligencia del estudiante mediante métodos de razonamiento estructurados, deductivos y creativos.

Desde hace 22 años la Sociedad Matemática Mexicana, a través de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, ha detectado jóvenes con talento para las matemáticas y otras disciplinas afines. Muchos profesores y estudiantes que se han acercado a este programa han creado, de manera espontánea y altruista, innumerables talleres de resolución de problemas que han contribuido de manera sustancial a mejorar la enseñanza de las matemáticas en nuestro país. Asimismo, muchas universidades se han visto beneficiadas, no solamente por el ingreso de jóvenes con una excelente formación matemática, sino también por exolímpicos que desenvuelven su vida profesional en ellas.

El programa básico de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla anualmente en tres etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en olimpiadas internacionales.

23ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

En la 23ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1º de agosto de 1990. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2009-2010 y, para el 1º de julio de 2010, no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario. Para mayor información consulte la página:

http://www.omm.unam.mx

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 23^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 8 al 13 de noviembre de 2009 en Campeche, Campeche. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2010: la XXII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, que se llevará a cabo en el mes de marzo; la XII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, que se celebrará en el mes de junio en Puerto Rico; la 51^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se llevará a cabo en julio en Kazajstán y la XXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en el mes de septiembre en Paraguay.

La revista

Hemos decidido indicar el nivel de los artículos de matemáticas: introductorio, medio y avanzado. En este número el artículo es de nivel avanzado, lo cual no debe desanimarte a leerlo sino motivarte a pensar cada paso de las demostraciones e intentar resolver los ejercicios que se presentan.
En esta ocasión, el artículo de matemáticas está dedicado a la geometría: José Antonio Gómez Ortega preparó un hermoso texto sobre la potencia de un punto respecto a una circunferencia. En el artículo, introduce dos objetos que encontramos frecuentemente en los problemas de olimpiada: el eje radical de dos circunferencias y el centro radical. Este último es el que se utiliza en la solución que presentamos del problema 3 de la XXI Olimpiada de la Cuenca del Pacífico, en la sección “Problemas y Soluciones de Olimpiadas Internacionales”. Te invitamos a leerlo con calma, pues no es un tema sencillo, pero sin duda es fascinante.

En el cuarto número de cada año vamos a incluir en Tzaloa un artículo, autobiográfico, sobre la vida de un matemático mexicano. Empezamos así una sección inédita titulada “Una vida, un matemático”, con un artículo de Gilberto Calvillo Vives, a quien le agradecemos su participación.
Gilberto Calvillo trabajó durante muchos años en el Banco de México y hasta 2008 dirigió el Instituto de Estadística Geografía e Informática (INEGI). En su artículo describe los distintos tipos de trabajos que puede desarrollar un matemático en México, ya sea en la investigación pura o aplicada, en la enseñanza o en la administración de la ciencia.

Algunas maneras de usar la potencia

Por José Antonio Gómez Ortega

Nivel Avanzado

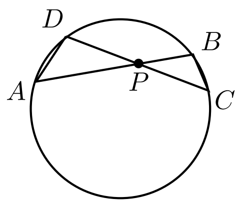
Hay en las matemáticas trucos que resaltan por la variedad de situaciones en las que se aplican. Para estas notas se eligió uno muy útil que sirve para decidir si algunos puntos están sobre una circunferencia. Recuerde que tres puntos determinan una única circunferencia (el circuncírculo del triángulo de vértices los tres puntos); cuando encontramos condiciones para que cuatro o más puntos esten sobre una circunferencia, estamos ante una situación que resulta, por lo menos, sorprendente. Pero bien podría ser tal situación un teorema, un problema o un ejercicio. Aquí se verán resultados que han surgido en diferentes contextos que tienen en común que para justificarlos o resolverlos es suficiente encontrar la *potencia* de algunos puntos.

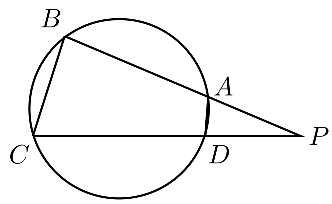
La potencia de un punto

Iniciemos con unas observaciones sobre la geometría de la circunferencia.

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

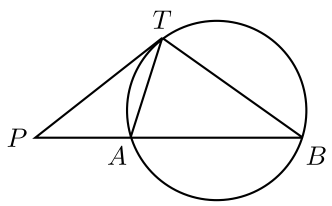
   El punto de intersección P se podrá encontrar sobre, dentro o fuera de la circunferencia. En el primer caso ambos miembros de la ecuación son cero (ya que P coincidiría con A ó B y con C ó D) y en tal caso la igualdad es inmediata. Si P se encuentra en el interior de la circunferencia o en el exterior (como se muestra en las figuras), los triángulos PAD y PCB son semejantes ya que los ángulos $\angle PAD$ y $\angle PCB$ son iguales (por abrir el mismo arco en el primer caso y, en el segundo por ser cíclico el cuadrilátero $ABCD$); y por la misma razón los ángulos $\angle PDA$ y $\angle PBC$ son iguales. Luego, la semejanza garantiza que $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$ y entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.





2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y si la tangente en T, interseca en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

   Como el ángulo semiinscrito es igual al ángulo inscrito que abre el mismo arco, esto es $\angle ATP = \angle TBP$ y como $\angle TPA = \angle BPT$, resulta que los triángulos PTA y PBT son semejantes, por tanto $\frac{PT}{PB} = \frac{PA}{PT}$, luego $PT^2 = PA \cdot PB$.



Las dos observaciones son propiedades métricas útiles de la circunferencia, pero de mayor utilidad es que las condiciones algebraicas garantizan el hecho geométrico del cual se obtuvieron, es decir:

Proposición 1.

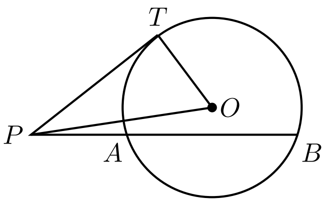
(a) *Si AB, CD son dos segmentos que se intersecan en P de manera que, como segmentos dirigidos, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ entonces A, B, C y D se encuentran sobre una circunferencia.*

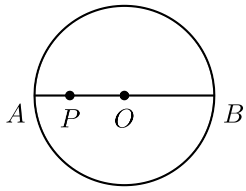
(b) *Si A, B, T y P son puntos de manera que P, A, B están alineados y $PT^2 = PA \cdot PB$, entonces PT es tangente en T al circuncírculo del triángulo ABT.*

Demostremos estas afirmaciones. Para (a), sea D' la intersección de PC con $\mathcal{C}$ el circuncírculo del triángulo ABC. Por la primera observación, $PA \cdot PB = PC \cdot PD'$

y como por hipótesis $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, se tiene que $PD' = PD$, por lo que $D' = D$. Luego A, B, C y D se encuentran sobre la circunferencia $\mathcal{C}$.
Para (b), sea C la intersección de PT con $\mathcal{C}$ el circuncírculo del triángulo ABT. Por la primera observación, $PA \cdot PB = PC \cdot PT$ y como por hipótesis $PA \cdot PB = PT^2$, se tiene que $PT = PC$ luego $T = C$, por lo que PT es tangente en T a la circunferencia $\mathcal{C}$.

En resumen, para un punto P, una circunferencia $\mathcal{C}$, y cualquier recta por P que corte a $\mathcal{C}$ en puntos A y B (con la posibilidad de $A = B$) siempre ocurre que: $PA \cdot PB$ es igual a una constante. Esta cantidad constante se conoce como la **potencia de P respecto a $\mathcal{C}$.**
Si la circunferencia $\mathcal{C}$ tiene centro O y radio r y si PT es la tangente a $\mathcal{C}$ en T que pasa por P resulta que la potencia de P es PT^2, y por el Teorema de Pitágoras sucede que: $PT^2 = PO^2 - r^2$.





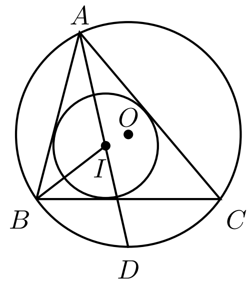
Si el punto P está dentro de la circunferencia $\mathcal{C}$ y si AB es una cuerda por P, entonces la potencia de P es $PA \cdot PB$. Si se trabaja con segmentos dirigidos, los segmentos PA y PB tienen signos opuestos, por lo que la potencia es negativa y su magnitud se puede calcular al trazar el diámetro por P, la magnitud de la potencia es: $(r - PO)(r + PO) = r^2 - PO^2$. Así, para este caso, también la potencia resulta ser $PO^2 - r^2$.
Finalmente, para un punto P sobre la circunferencia se ha señalado que la potencia es cero, esto también coincide con $PO^2 - r^2$. Ahora se puede afirmar que la potencia de P con respecto a la circunferencia $\mathcal{C} = (O, r)$ es $PO^2 - r^2$; y será positiva, cero o negativa dependiendo si P se encuentra fuera, sobre o dentro de la circunferencia.

Como una primera ilustración del uso de la potencia se presenta una demostración del siguiente resultado que se atribuye a Euler, donde se dan condiciones necesarias y suficientes para asegurar que dadas dos circunferencias estas sean el circuncírculo e incírculo de un triángulo.

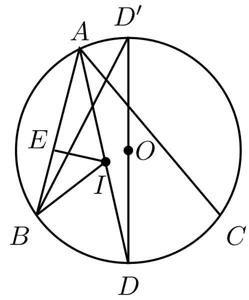
Fórmula de Euler.
Una condición necesaria y suficiente para la existencia de un triángulo con circuncírculo (O, R) e incírculo (I, r) es la igualdad: $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Demostración. Sea A un punto sobre la circunferencia $\mathcal{C} = (O, R)$, sean B y C los puntos de intersección de $\mathcal{C}$ con las tangentes desde A a la circunferencia $\mathcal{C}' = (I, r)$.

El triángulo ABC admite a $\mathcal{C}'$ como incírculo si y sólo si BC es tangente a $\mathcal{C}'$. Pero como AB es tangente a $\mathcal{C}'$, la recta BC es tangente a $\mathcal{C}'$ si y sólo si BI es bisectriz del $\angle ABC$. Luego, si y sólo si $\angle ABI = \angle IBC$.



Sea D el punto de intersección de la recta AI con $\mathcal{C}$, que es el circuncírculo del triángulo ABC. Como AI es bisectriz, se tiene que: $\angle IAB = \angle CAI$. Además, $\angle CAI = \angle CBD$, ya que ambos ángulos abren el mismo arco CD, luego $\angle IAB = \angle CBD$. Como el ángulo $\angle BID$ es un ángulo exterior del triángulo ABI, tenemos que: $\angle IAB = \angle BID - \angle ABI$. Además, como $\angle CBD = \angle IBD - \angle IBC$, al substituir estos valores en la ecuación del párrafo anterior se obtiene: $\angle BID - \angle ABI = \angle IBD - \angle IBC$. Luego, la condición $\angle ABI = \angle IBC$ es verdadera si y sólo si $\angle BID = \angle IBD$. Pero estos dos ángulos, son los ángulos opuestos a los lados BD y DI del triángulo IBD. El problema se reformula así: $\mathcal{C}' = (I, r)$ es incírculo del triángulo ABC si y sólo si $BD = DI$.



Sea E el punto de tangencia de la circunferencia $\mathcal{C}'$ con AB y D' el punto diametralmente opuesto a D en $\mathcal{C}$. Como los triángulos rectángulos AIE y $D'DB$ tienen los ángulos $\angle IAE$ y $\angle DD'B$ iguales por abrir el mismo arco BD, resulta que son semejantes. Esta semejanza garantiza que $\frac{AI}{IE} = \frac{D'D}{DB}$, por lo que: $AI \cdot DB = 2Rr$. Como la potencia del punto I con respecto a $\mathcal{C}$ es $AI \cdot ID = (R - OI)(R + OI)$, de las dos últimas igualdades se concluye que:

$$\frac{DB}{ID} = \frac{2Rr}{(R - OI)(R + OI)}.$$

Luego, $DB = ID$ si y sólo si $R^2 - OI^2 = 2Rr$.

Eje radical de dos circunferencias

Dadas dos circunferencias $\mathcal{C} = (O, r)$ y $\mathcal{C}' = (Q, s)$, *¿para qué puntos P se cumple que la potencia a la circunferencia $\mathcal{C}$ es igual que la potencia a la circunferencia $\mathcal{C}'$?*

Se sabe que la potencia de P a $\mathcal{C} = (O, r)$ es $PO^2 - r^2$ y la potencia de P a $\mathcal{C}' = (Q, s)$ es $PQ^2 - s^2$, luego los puntos que se buscan son los que cumplan que $PO^2 - r^2 = PQ^2 - s^2$, o equivalentemente los puntos que satisfagan $PO^2 - PQ^2 = r^2 - s^2$.

Como $r^2 - s^2$ es una constante que no depende del punto P, se conoce que este conjunto de puntos o lugar geométrico es una recta perpendicula a OQ. Lo anterior se justifica de la siguiente manera: sean $d = r^2 - s^2$ la constante, P un punto del lugar geométrico y sea M el pie de la perpendicular desde P al segmento OQ. Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$PO^2 - OM^2 = MP^2 = PQ^2 - QM^2,$$

así $OM^2 - QM^2 = PO^2 - PQ^2 = d$, y entonces, $(OM + MQ)(OM - MQ) = d$. Por lo que, M cumple que $OM - MQ = \frac{d}{OQ}$. Ahora, veamos que solamente hay un punto M sobre la recta por O y Q que cumple esta ecuación; en efecto, si $ON - NQ = \frac{d}{OQ} = OM - MQ$, se tiene que $OM + MN - NQ = OM - MN - NQ$, por lo que $MN = 0$ y entonces $M = N$. Luego, todo punto del lugar geométrico está sobre la perpendicular a OQ por M. De la ecuación $OM^2 - QM^2 = PO^2 - PQ^2 = d$, se concluye que los puntos sobre la recta referida pertenecen al lugar geométrico.

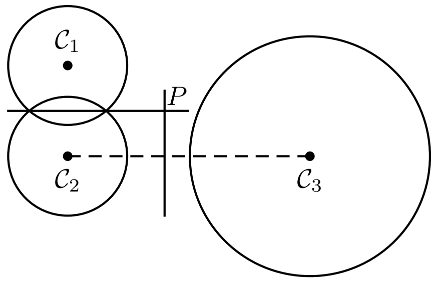
Este lugar geométrico se conoce como **el eje radical de** $\mathcal{C}$ **y** $\mathcal{C}'$, y resulta ser perpendicular a la recta OQ.

Es útil señalar que cada punto P del eje radical de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ cumple que las longitudes de las tangentes desde P a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son iguales, cuando existen.

Proposición 2.

*Para tres circunferencias (cuyos centros no son colineales), los tres ejes radicales de ellas tomadas por pares son concurrentes. El punto de concurrencia es llamado el **centro radical**.*

Demostración. Sea P el punto de intersección del eje radical de la primera y segunda circunferencias con el eje radical de la segunda y la tercera, luego P tendrá la misma potencia con respecto a las tres circunferencias; en particular, estará en el eje radical de la primera y tercera, por lo que este último eje pasará también por P.



Construcción del eje radical.

El eje radical de dos circunferencias no concéntricas, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, se puede construir con regla y compás de las siguientes maneras, que dependen de la posición de las circunferencias:
1. Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ se intersecan, como los puntos de intersección tienen potencia igual a cero para ambas circunferencias, se tiene que estos puntos forman parte del eje radical, y en este caso el eje radical pasa por tales puntos de intersección. Luego, se puede construir con regla y compás. En particular, cuando las dos circunferencias son tangentes, la tangente por el punto común es el eje radical, que es también construible.

2. Si las dos circunferencias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ no se cortan, se traza una tercera circunferencia $\mathcal{C}''$ que corte a las dos anteriores, cuyo centro no sea colineal con los centros de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$. La cuerda común de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}''$ cortará en P a la cuerda común de $\mathcal{C}'$ y $\mathcal{C}''$, el punto P pertenece al eje radical de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, por lo que el eje radical será la recta por P perpendicular a la recta por los centros de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, y ésta es construible.

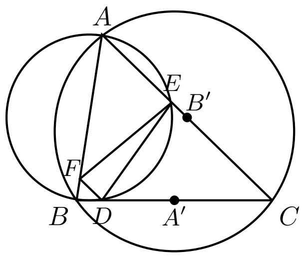
3. Si una de las circunferencias $\mathcal{C} = (O, r)$, $\mathcal{C}' = (Q, s)$ tiene radio cero, por ejemplo $r = 0$, se traza una circunferencia $\mathcal{C}'' = (R, t)$ que pase por O y corte a $\mathcal{C}'$, y cuyo centro no sea colineal con los centros de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$. La tangente a $\mathcal{C}''$ por O intersecará a la cuerda común de $\mathcal{C}'$ y $\mathcal{C}''$ en un punto P, que pertenecerá al eje radical de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$. Por lo que, el eje radical será la recta por P perpendicular a la recta por O y Q. Tal perpendicular es construible.

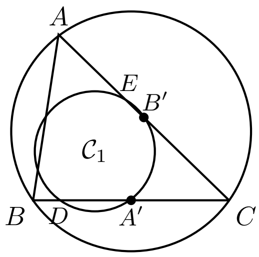
4. Si las circunferencias $\mathcal{C} = (O, r)$, $\mathcal{C}' = (Q, s)$ tienen radio cero, el eje radical es la mediatriz del segmento OQ, y la mediatriz es construible.

Ahora, se dará un ejemplo del uso de los ejes radicales, que servirá para demostrar uno de los resultados más sorprendentes de la geometría del triángulo donde se garantiza que sobre cierta circunferencia hay nueve puntos notables del triángulo.

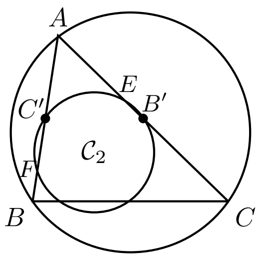
Ejemplo 1. *En un triángulo ABC, los puntos medios A', B', C' de los lados BC, CA, AB, los pies D, E, F, de las alturas AD, BE, CF, y los puntos medios K, L, M de los* *segmentos AH, BH, CH, donde H es el ortocentro del triángulo, están sobre una circunferencia, llamada* ***la circunferencia de los nueve puntos****.*

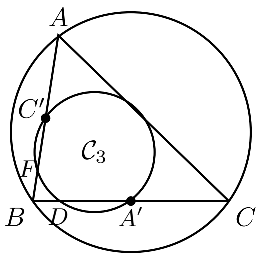
Como el cuadrilátero $ABDE$ está inscrito en la circunferencia de diámetro AB, se tiene que la potencia de C con respecto a tal circunferencia es $CD \cdot CB = CE \cdot CA$. Por ser A' y B' puntos medios de BC y CA se tiene que $CD \cdot CA' = CE \cdot CB'$, luego la Proposición 1 garantiza que D, A', E, B' se encuentran en una circunferencia, que se denotará por $\mathcal{C}_1$.





Análogamente, se demuestra que E, B', F, C' se encuentran en una circunferencia $\mathcal{C}_2$ y que F, C', D, A' sobre una circunferencia $\mathcal{C}_3$.





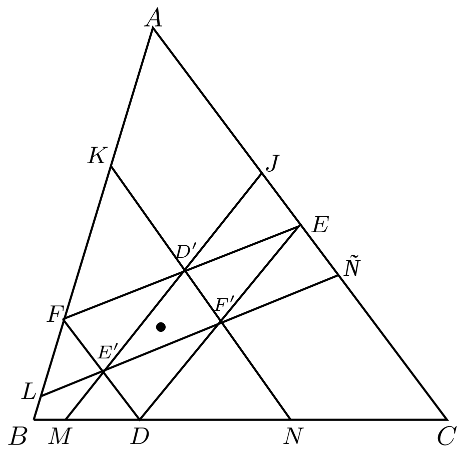
Claramente si dos de las tres circunferencias $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ coinciden entonces coinciden las tres. Por lo que D, E, F, A', B', C' se encuentran en una misma circunferencia $\mathcal{C}_1$. Ahora, las tres circunferencias deben coincidir ya que si, por ejemplo, $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_2$, entonces el eje radical de ellas es CA, si $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_3$ su eje radical es BC y si $\mathcal{C}_3 \neq \mathcal{C}_2$ su eje radical es AB, pero estos tres ejes radicales no son concurrentes, lo que es una

contradicción a la existencia del centro radical.
Aplicando un razonamiento como el anterior en los triángulos HBC y HCA se demuestra que K, L, M también se encuentran en $\mathcal{C}_1$. Por lo que hay una circunferencia que pasa por los siguientes nueve puntos: $A', B', C', D, E, F, K, L, M$.

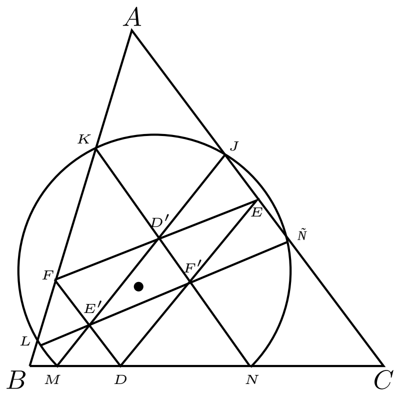
El uso de la potencia para asegurar que cuatro puntos son concíclicos y el hecho de que los tres ejes radicales que determinan tres circunferencias son concurrentes son trucos de uso recurrente, lo que convierte a estos trucos en una estrategia o un método. Si lo anterior aún no lo convence vea el siguiente ejemplo (y los cuatro ejercicios del final).

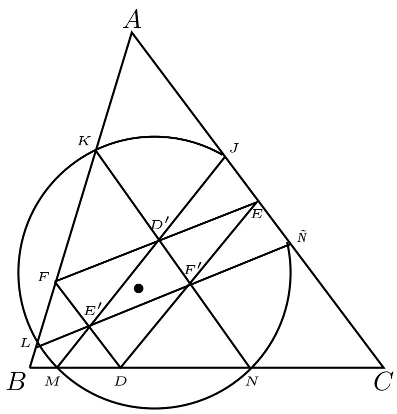
Ejemplo 2. *Sean ABC un triángulo y AD, BE, CF sus alturas. La circunferencia de diámetro EF corta a los lados CA y AB en J y K, respectivamente; la circunferencia de diámetro FD corta a AB y BC en L y M, respectivamente; y la circunferencia de diámetro DE corta a BC y CA en N y $\tilde{N}$, respectivamente. Entonces, los seis puntos J, K, L, $M, N, \tilde{N}$ están sobre una misma circunferencia, llamada* ***la circunferencia de Taylor****.*

Como el cuadrilátero $BCEF$ es cíclico sucede que $\angle AEF = \angle ABC$ y $\angle AFE = \angle BCA$. Análogamente, se tiene que $\angle CED = \angle ABC$ y $\angle CDE = \angle CAB$ y que $\angle BFD = \angle BCA$ y $\angle CDF = \angle CAB$. La circunferencia de diámetro EF tiene centro en el punto medio D' de EF, luego $D'JE$ es isósceles, por lo que JD' es paralela a DE. Si E' y F' son los puntos medios de FD y DE respectivamente, se tiene también que $D'E'$ es paralela a DE y como $E'MD$ es isósceles $E'M$ es paralela a DE. Luego, J, D', E' y M son colineales. Análogamente K, D', F' y N son colineales y lo mismo L, E', F' y $\tilde{N}$.



Si las longitudes de DE, EF, FD se denotan por d, e, f, respectivamente, se tiene que $D'J = D'K = \frac{d}{2}$ y $MD' = ND' = \frac{e+f}{2}$. Por lo que, $D'K \cdot D'N = D'J \cdot D'M$. La Proposición 1, garantiza que M, N, J, K están en una circunferencia $\mathcal{C}_a$. Análogamente, $\tilde{N}, J, L, M$ están en una circunferencia $\mathcal{C}_b$ y $K, L, N, \tilde{N}$ están en una circunferencia $\mathcal{C}_c$. Claramente, si dos de las tres circunferencias $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b, \mathcal{C}_c$ coinciden, entonces coinciden las tres y asunto concluido. Ahora, las tres circunferencias deben coincidir, ya que si por ejemplo $\mathcal{C}_a \neq \mathcal{C}_b$, entonces el eje radical de ellas es MJ, si $\mathcal{C}_b \neq \mathcal{C}_c$ su eje radical es $L\tilde{N}$ y si $\mathcal{C}_c \neq \mathcal{C}_a$ su eje radical es NK, pero estos tres ejes radicales no son concurrentes, lo que es una contradicción a la existencia del centro radical.





Ejercicios

1. Sea ABC un triángulo con longitudes de sus lados a, b, c. Sean K, L, M, N, P, Q puntos sobre los lados BC, AB, CA, BC, AB, CA, respectivamente, de manera que $KB = BL = b$, $CM = CN = c$ y $AP = AQ = a$. Muestre que K, L, M, N, P y Q están sobre una misma circunferencia. Dicha circunferencia es llamada **circunferencia de Conway**.

   Sugerencia. Vea que $AP \cdot AL = AQ \cdot AM$, $BL \cdot BP = BK \cdot BN$ y $CN \cdot CK = CM \cdot CQ$, ahora termine como en el ejemplo de la circunferencia de Taylor.

2. Sea ABC un triángulo y A', B', C' los puntos medios de los lados BC, CA, AB, respectivamente. Tres circunferencias de un mismo radio se trazan, una con cen-

tro en A que corte a $B'C'$ en P y Q, otra con centro B que corte a $C'A'$ en R y S, y una más con centro en C que corte a $A'B'$ en T y U. Muestre que P, Q, R, S, T y U están sobre una misma circunferencia, llamada **primera circunferencia de Droz-Farny**.

Sugerencia. El eje radical de las circunferencias centradas e B y C es la mediatriz de BC que pasa por A'. Luego, R, S, T, U están en una misma circunferencia $\mathcal{C}_a$. Análogamente, T, U, P, Q están en una circunferencia $\mathcal{C}_b$ y, P, Q, R, S están sobre una circunferencia $\mathcal{C}_c$. Las tres circunferencias son la misma, en caso contrario sus ejes radicales no concurren.

3. $(\mathbf{IMO}, \mathbf{2008/1})$ Sea H el ortocentro de un triángulo acutángulo ABC. La circunferencia de centro en el punto medio de BC y que pasa por H corta a BC en A_1 y A_2. Análogamente, se definen los puntos B_1 y B_2 sobre CA y los puntos C_1 y C_2 sobre AB. Muestra que los seis puntos A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, y C_2 están sobre una misma circunferencia. (Llamada **segunda circunferencia de Droz-Farny.)**

   Sugerencia. Los ejes radicales de las circunferencias del problema harán ver que cada cuarteta de puntos (B_1, B_2, C_1, C_2), (C_1, C_2, A_1, A_2) y (A_1, A_2, B_1, B_2) es concíclica. Si estas tres circunferencias no son la misma hay un problema.

4. $(\mathbf{OMM}, \mathbf{2008/6})$. Las bisectrices internas de los ángulos CAB, ABC y BCA de un triángulo ABC concurren en I y cortan al circuncírculo de ABC en L, M y N, respectivamente. La circunferencia de diámetro IL corta al lado BC en D y E; la circunferencia de diámetro IM corta al lado CA en F y G; la circunferencia de diámetro IN corta al lado AB en H y J. Muestra que D, E, F, G, H, J están sobre una misma circunferencia. (Circunferencia cuyo nombre no he encontrado y a la cual por devoción olímpica le he puesto **circunferencia de San Carlos**.)

   Sugerencia. Los ejes radicales de las circunferencias del problema son las bisectrices internas del triángulo. Como en los problemas anteriores éstos ayudan a ver que cada cuarteta de puntos (F, G, H, J), (H, J, D, E) y (D, E, F, G) es concíclica. Las tres circunferencias son la misma, en caso contrario sus ejes radicales no concurren.

Bibliografía

1. R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

2. R. Johnson. *Advanced Euclidean Geometry*. Dover, 1960.

Problemas de práctica

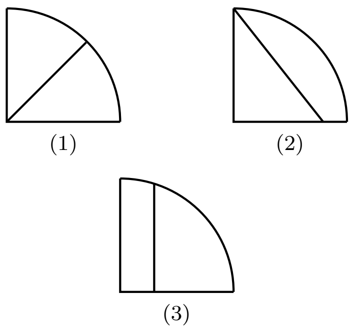
Como en el número anterior, en esta sección encontrarás 20 interesantes y variados problemas. En esta ocasión, hemos hecho nuestra selección considerando problemas de distintos grados de dificultad, desde problemas fáciles hasta problemas de concursos estatales.

Te desafiamos para que pongas a prueba todas tus capacidades, pero no te desanimes ni te rindas si no puedes resolverlos al primer intento, recuerda que la perseverancia es la clave del éxito y que la práctica hace al maestro.

En la siguiente sección encontrarás las soluciones de todos ellos, pero te recomendamos que no la consultes sino hasta después de haber trabajado un poco en cada problema.

Agradecemos de manera muy especial a Irving Daniel Calderón Camacho, del Estado de México, por haber enviado un problema para que se publique en esta sección, e invitamos a nuestros lectores a que participen enviando problemas a nuestra dirección electrónica: `revistaomm@gmail.com`.

Problema 1. Cada cuarto de círculo está divido por una recta en dos partes con áreas iguales. ¿Cuál de las tres rectas es la más larga?



Problema 2. Si sigues construyendo el triángulo de números, ¿cuál es la suma de los números en el décimo renglón?

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & & 5 & & \\ & 7 & & 9 & & 11 & \\ 13 & & 15 & & 17 & & 19 \end{array}$$

Problema 3. Sobre la mesa hay 10 palitos de madera de longitudes $1, 2, 3, \ldots, 10$ centímetros. Si tomas tres al azar, ¿cuál es la probabilidad de que puedas formar un triángulo con ellos?

Problema 4. Si dibujas 4 circunferencias en el plano, ¿cuál es el máximo número de puntos de intersección que puedes obtener?

Problema 5. Encuentra el residuo de dividir

$$10^{10} + 10^{10^2} + \cdots + 10^{10^{10}}$$

entre 7. (Nota: a^{b^c} significa $a^{(b^c)}$.)

Problema 6. Un cuadrado es cortado en 25 cuadrados más pequeños, de los cuales 24 son cuadrados de lado $1\,cm$. Determina los posibles valores para el área del cuadrado original.

Problema 7. Si a es un número real mayor o igual que $\frac{3}{4}$, encuentra todos los valores reales de x que son solución de la ecuación $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$.

Problema 8. Las medidas de los lados de un triángulo rectángulo son $60\,cm$, $80\,cm$ y $100\,cm$. Determina la medida del segmento que parte del ángulo recto y divide al triángulo en dos triángulos con el mismo perímetro.

Problema 9. Encuentra un número de 6 dígitos tal que al multiplicarlo por 2, 3, 4, 5 y 6, obtengas cinco números cuyos dígitos sean los mismos que los del número original, pero en distinto orden.

Problema 10. Sean a, b y c números reales tales que $a \neq b$ y

$$a^2(b + c) = b^2(a + c) = 2009.$$

Determina el valor de $c^2(a + b)$.

Problema 11. Un cuadrilátero $ABCD$ cumple que el punto medio de BC es el centro de un semicírculo que es tangente a los lados AB, CD y DA. ¿Cuánto mide BC en términos de AB y CD?

Problema 12. Demuestra que no existen enteros p, q y k, con p y q primos, tales que $p - q = 2$ y $pq + 10^k$ sea un número primo.

Problema 13. Veinticinco diputados están sentados en una mesa circular. Cada hora deben votar una propuesta respondiendo *sí* o *no*. Cada uno de ellos se comporta de la siguiente manera: si en el n-ésimo voto, su respuesta es igual a la respuesta de al menos uno de los dos diputados entre los que está sentado, entonces repetirá esa misma respuesta para la votación $n + 1$, pero si su respuesta es diferente a las de sus dos vecinos, entonces su respuesta en la votación $n + 1$ será contraria a la que dio en el n-ésimo voto. Demuestra que sin importar la forma en que cada uno vote la primera vez, siempre habrá un momento a partir del cual ya nadie cambia su voto.

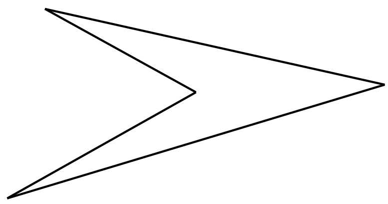
Problema 14. Se quiere formar una pirámide cuya base sea un triángulo equilátero, usando 120 esferas iguales. ¿Cuántas esferas debe tener la base?

Problema 15. Si x, y, z son números reales tales que $x+y+z = 3$ y $xy+yz+zx = -1$, demuestra que:

$$\frac{(x+1)(y+1)}{x+y} + \frac{(y+1)(z+1)}{y+z} + \frac{(z+1)(x+1)}{z+x} = 0.$$

(Nota: los denominadores de las fracciones son distintos de cero).

Problema 16. Definimos un *boomerang* como un cuadrilátero cuyos lados opuestos no se intersectan y uno de sus ángulos internos es mayor que $180°$ (como en la figura).



Sea C un polígono convexo de s lados. Supongamos que la región interior de C es la unión de q cuadriláteros que no se traslapan. Además, supongamos que b de esos cuadriláteros son boomerangs. Demuestra que $q \geq b + \frac{s-2}{2}$.

Problema 17. Sea ABC un triángulo isósceles tal que $AB = AC$. Supongamos que la bisectriz del ángulo $\angle ABC$ intersecta al lado AC en D y que $BC = BD + AD$. Determina la medida del ángulo $\angle CAB$.

Problema 18. Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n$, una permutación de los enteros $1, 2, \ldots, n$, y sea $f(n)$ el número de esas permutaciones tales que cumplen con las siguientes dos propiedades:
(1) $a_1 = 1$.
(2) $|a_i - a_{i+1}| \leq 2$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.
Determina el residuo que se obtiene al dividir $f(2009)$ entre 3.

Problema 19. Dos circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ se intersectan en los puntos A y B. Una recta es tangente a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en los puntos C y D, respectivamente. Las rectas CA y CB intersectan a $\mathcal{C}_2$ en los puntos E y F, respectivamente. Sea $G \neq C$ el otro punto de intersección entre la recta CD y el circuncírculo del triángulo CEF. Demuestra que D es el punto medio de CG.

Problema 20. (Sugerido por Irving Daniel Calderón Camacho). Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales positivos tales que $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$. Demuestra que:

$$x_1^{2^k} + x_2^{2^k} + \cdots + x_n^{2^k} \leq x_1^{2^{k+1}} + x_2^{2^{k+1}} + \cdots + x_n^{2^{k+1}},$$

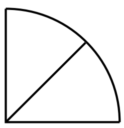
para todo entero positivo k.

Soluciones a los problemas de práctica

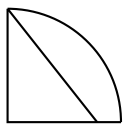
En esta sección encontrarás las soluciones que hemos preparado para los 20 problemas de la sección anterior. Es importante que tengas en cuenta que las soluciones que aquí presentamos no son necesariamente las únicas o las mejores, tan sólo son ejemplos del tipo de razonamiento que se busca estimular en los problemas de olimpiada. Piensa que cada problema puede tener tantas soluciones como ideas creativas y originales se desarrollen con base en la lógica y en la argumentación correcta.

Si encontraste una solución diferente de las nuestras y no estás seguro de su validez, o simplemente quieres compartirla con nosotros, te invitamos para que nos escribas a nuestra dirección electrónica: `revistaomm@gmail.com`.

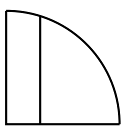
Solución del problema 1. Observemos que la recta del tercer dibujo es claramente más corta que el radio del círculo, luego, es más corta que la recta del primer dibujo.



(1)



(2)



(3)

Por otro lado, la recta del segundo dibujo es la hipotenusa de un triángulo rectángulo tal que uno de sus catetos es un radio. Luego, la recta del segundo dibujo es más larga que la del primer dibujo. Por lo tanto, la recta más larga es la del segundo dibujo.

Solución del problema 2. Observemos que el segundo renglón inicia con el número impar $3 = 2(1) + 1$ y tiene dos números impares consecutivos. El tercer renglón inicia con el número $7 = 3(2) + 1$ y tiene tres números impares consecutivos. El cuarto renglón inicia con el impar $4(3)+1 = 13$ y tiene cuatro números impares consecutivos. Luego, siguiendo con este razonamiento, tenemos que el décimo renglón inicia con el número $10(9) + 1 = 91$ y tiene los siguientes diez números impares consecutivos,

$$91, 93, 95, 97, 99, 101, 103, 105, 107, 109.$$

Por lo tanto, su suma es igual a $1, 000$.

Solución del problema 3. En total hay $\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = 120$ formas de tomar tres palitos de la mesa (ver la Definición 5 del apéndice). Ahora tenemos que ver con cuántas de éstas podemos formar un triángulo. Sea (a, b, c) una terna y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a < b < c$. Podemos formar un triángulo (ver el Teorema 31 del apéndice) con ella si

$$\begin{aligned} a + b &> c, \\ a + c &> b, \\ b + c &> a. \end{aligned}$$

Como $a < b$, tenemos que $b + c > a + c > a$, por lo que la tercera desigualdad se cumple. Además, como $b < c$, tenemos que $b < c + a$. Luego, sólo tenemos que preocuparnos por la primera desigualdad. Para que ésta se cumpla necesitamos que $c \leq a + b - 1$.

Analicemos qué pasa con cada valor posible de a.

1. Si $a = 1$, entonces $b < c \leq 1 + b - 1 = b$, lo cual es imposible. Así que con las ternas que contienen al 1 no se pueden formar triángulos.

2. Si $a = 2$, entonces $b < c \leq b + 1$. Entonces, por cada valor de b la terna $(2, b, b + 1)$ forma un triángulo. Como b puede ser igual a $3, 4, 5, \ldots, 9$, hay 7 ternas que forman un triángulo.

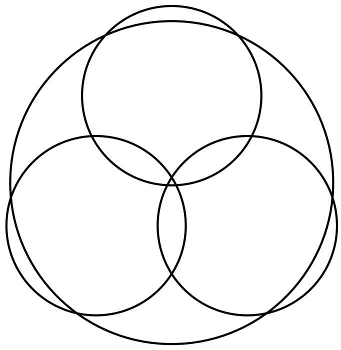
3. Si $a = 3$, entonces $b < c \leq b + 2$. Luego, por cada valor de b entre 4 y 8 se pueden formar dos ternas: $(3, b, b + 1)$ y $(3, b, b + 2)$. Además, si $b = 9$ se puede formar sólo la terna $(3, 9, 10)$. Por lo que hay $(5 \cdot 2) + 1 = 11$ ternas que forman un triángulo en este caso.

4. Si $a = 4$, entonces $b < c \leq b + 3$. Luego, para b entre 5 y 7 se forman tres ternas, para $b = 8$ dos ternas y para $b = 9$ una terna. Es decir, en este caso hay $(3 \cdot 3) + 2 + 1 = 12$ ternas.

5. Si $a = 5$, entonces $b < c \leq b + 4$. Luego, si $b = 6$ hay cuatro ternas que forman triángulo, si $b = 7$ hay tres, si $b = 8$ hay dos, y si $b = 9$ hay una. En total hay $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ ternas en este caso.

Análogamente, si $a = 6$ es fácil ver que hay seis ternas con las que se puede formar un triángulo, si $a = 7$ hay tres y si $a = 8$ hay sólo una.
Por lo tanto, en total hay $7 + 11 + 12 + 10 + 6 + 3 + 1 = 50$ ternas con las que se puede formar un triángulo, y la probabilidad buscada es $\frac{50}{120} = \frac{5}{12}$.

Solución del problema 4. Cada par de circunferencias se intersectan en 0, 1 ó 2 puntos. El máximo número de puntos de intersección entre las cuatro circunferencias se obtiene cuando no hay un ningún punto donde se intersecten más de dos. Como podemos formar $\binom{4}{2}$ parejas de circunferencias (ver la Definición 5 del apéndice), dicho número es menor o igual que $2 \cdot \binom{4}{2} = 12$. Veamos que es posible dibujar cuatro circunferencias y obtener 12 puntos de intersección.



Solución del problema 5. Observemos que $10^6 - 1 = 999,999 = 7(142,857)$, es decir $10^6 \equiv 1 \pmod 7$ (ver [14] y la Definición 3 del apéndice). De aquí que $10^{6n} = (10^6)^n \equiv 1 \pmod 7$ para todo entero positivo n.
Como $10^n = 6A + 4$, donde $A = 1\underbrace{66\ldots6}_{n-1}$, y $10 \equiv 3 \pmod 7$, tenemos que

$$10^{10^n} = 10^{6A+4} = (10^6)^A \cdot 10^4 \equiv 10^4 \equiv 3^4 \pmod 7,$$

para todo entero positivo n.

Luego,

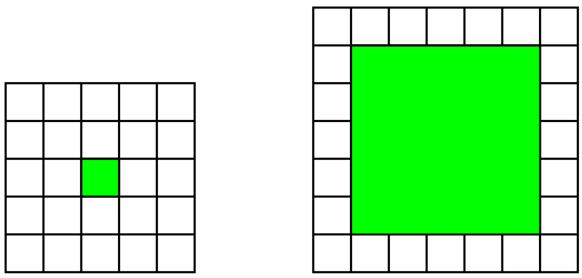
$$\begin{aligned}
10^{10} + 10^{10^2} + \cdots + 10^{10^{10}} &\equiv \underbrace{10^4 + 10^4 + \cdots + 10^4}_{10-veces} \pmod 7\\
&\equiv \underbrace{3^4 + 3^4 + \cdots + 3^4}_{10-veces} \pmod 7\\
&= 10(3^4)\\
&= 10(9)(9)\\
&\equiv 3(2)(2) \pmod 7\\
&= 12\\
&\equiv 5 \pmod 7.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el residuo es 5.

Solución del problema 6. De los 25 cuadrados, llamemos *restante* al de dimensiones desconocidas. Es claro que el cuadrado restante no puede estar en contacto con los cuatro lados del cuadrado original. Luego, un lado del cuadrado original es adyacente a cuadrados de lado $1\,cm$, y por lo tanto su longitud es un número entero. Sea x^2 el área del cuadrado original y sea y^2 el área del cuadrado restante. Tenemos que,

$$\begin{aligned}
x^2 &= y^2 + 24\\
x^2 - y^2 &= 24\\
(x+y)(x-y) &= 24.
\end{aligned}$$

Considerando las posibles factorizaciones de 24 y usando el hecho de que $x-y < x+y$, tenemos que las parejas (x, y) de enteros positivos que satisfacen la ecuación anterior son $(5, 1)$ y $(7, 5)$. Por lo tanto, la longitud de cada lado del cuadrado original pudo haber sido $5\,cm$ ó $7\,cm$. Las figuras muestran que ambos casos son posibles, donde el cuadrado sombreado es el cuadrado restante.



Por lo tanto, el área del cuadrado original es $25\,cm^2$ ó $49\,cm^2$.

Solución del problema 7. Sea $y = \sqrt{a+x}$. Luego, tenemos dos ecuaciones

$$y = \sqrt{a+x} \quad \text{y} \quad x = \sqrt{a-y}.$$

Elevando al cuadrado estas ecuaciones obtenemos,

$$y^2 = a + x \quad \text{y} \quad x^2 = a - y.$$

Restándolas, tenemos que

$$\begin{aligned} y^2 - x^2 &= x + y \\ x^2 - y^2 + x + y &= (x + y)(x - y + 1) = 0. \end{aligned}$$

Luego, $x + y = 0$ ó $x - y + 1 = 0$.
Si $x + y = 0$, entonces $y = -x$ y $x^2 + y - a = x^2 - x - a = 0$, de donde los valores posibles de x son (ver el Teorema 13 del apéndice)

$$\frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} - \sqrt{a + \frac{1}{4}}.$$

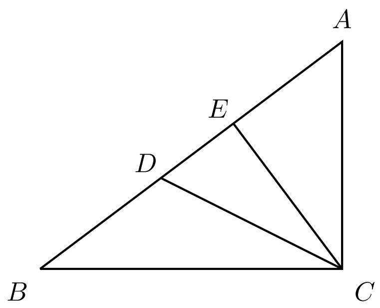
Si $x - y + 1 = 0$, entonces $y = x + 1$ y $x^2 + x + 1 - a = 0$, de donde los valores posibles de x son

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2} - \sqrt{a - \frac{3}{4}}.$$

Como $a \geq \frac{3}{4}$, concluimos que los valores reales de x que satisfacen la ecuación son

$$\frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}},\ \ \frac{1}{2} - \sqrt{a + \frac{1}{4}},\ \ -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}},\ \ -\frac{1}{2} - \sqrt{a - \frac{3}{4}}.$$

Solución del problema 8. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en C, $AB = 100\,cm$, $BC = 80\,cm$ y $CA = 60\,cm$. Tracemos un segmento CD desde el vértice C hasta la hipotenusa, de tal manera que los perímetros de los triángulos ADC y DBC sean iguales. El problema consiste en determinar la longitud de CD.
Como los triángulos ADC y DBC tienen el mismo perímetro, tenemos que $CA + AD + CD = CD + DB + BC$, de donde $CA + AD = DB + BC = \frac{240}{2} = 120\,cm$. Como $CA = 60\,cm$, tenemos que $AD = 120 - 60 = 60\,cm$. Tracemos la altura CE desde C.



Como el triángulo AEC es semejante al triángulo ACB, tenemos que $\frac{AE}{60} = \frac{60}{100}$, de donde $AE = 36\,cm$ y por lo tanto $ED = AD - AE = 60 - 36 = 24\,cm$. Por la misma semejanza tenemos también que $\frac{CE}{60} = \frac{80}{100}$, de donde $CE = 48\,cm$. Aplicando el teorema de Pitágoras (ver el Teorema 25 del apéndice) en el triángulo CED, tenemos que

$$CD^2 = ED^2 + CE^2 = 24^2 + 48^2 = 5(24^2)$$

y de aquí obtenemos $CD = 24\sqrt{5}\,cm$.

Solución del problema 9. Denotemos por x al número buscado. Como $6x$ también debe ser un número de 6 dígitos, tenemos que $x < \frac{10^6}{6} < 166,667$. Entonces, el dígito de las centenas de millar es 1 y el dígito de las decenas de millar debe ser menor o igual a 6.

Consideremos a los números x, $2x$, $3x$, $4x$, $5x$ y $6x$, cada uno de 6 dígitos. Entonces, todos los dígitos de x deben ser distintos.

Ninguno de los dígitos de x puede ser 0, pues de lo contrario alguno de los productos: $2x$, $3x$, $4x$, $5x$ ó $6x$ empezaría con 0, lo cual es imposible. Luego, el dígito de las unidades de x debe ser impar (de lo contrario $5x$ terminaría en 0) y distinto de 5 (de lo contrario $2x$ terminaría en 0).

Ahora bien, como el dígito de las centenas de millar de x, el 1, debe estar en todos los números: $2x$, $3x$, $4x$, $5x$ ó $6x$, entonces el dígito de las unidades de alguno de estos números es 1. Observemos que sólo $3x$ puede tener el dígito de las unidades igual a 1, luego el dígito de las unidades de x es 7. Entonces, el dígito de las unidades de $2x$ es 4, el de $3x$ es 1, el de $4x$ es 8, el de $5x$ es 5 y finalmente el de $6x$ es 2. Por lo tanto, los dígitos de x son: $1, 7, 4, 8, 5$ y 2 en algún orden. Entonces, escribiendo los dígitos de las centenas de millar de los números $2x$, $3x$, $4x$, $5x$ y $6x$ en orden creciente tenemos que,

$$\begin{aligned}
1x &= 1____\,7,\\
2x &= 2____\,4,\\
3x &= 4____\,1,\\
4x &= 5____\,8,\\
5x &= 7____\,5,\\
6x &= 8____\,2.
\end{aligned}$$

Observemos que en cada columna, en algún orden, están los dígitos $1, 7, 4, 8, 5$ y 2. Luego, sumando tenemos que

$$21x = (1 + 7 + 4 + 8 + 5 + 2)(111, 111) = 27(111, 111) = 2, 999, 997,$$

de donde $x = 142, 857$. Por lo tanto, el número de 6 dígitos buscado es $142, 857$.

Solución del problema 10. Tenemos que

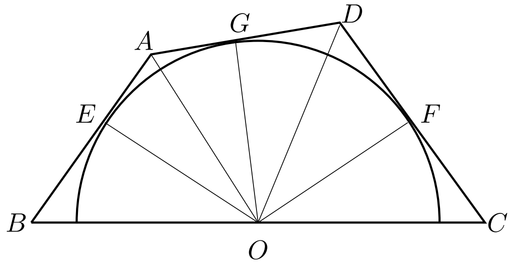
$$\begin{aligned} 0 &= a^2(b+c) - b^2(a+c) \\ &= ab(a-b) + (a^2-b^2)c \\ &= (a-b)(ab+ac+bc). \end{aligned}$$

Como $a \neq b$, tenemos que $ab+ac+bc = 0$. Multiplicando por $(a-c)$ obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= (a-c)(ab+ac+bc) \\ &= ac(a-c) + (a^2-c^2)b \\ &= a^2(b+c) - c^2(a+b), \end{aligned}$$

de donde $c^2(a+b) = a^2(b+c) = 2009$.

Solución del problema 11. Llamemos O al centro del semicírculo y dibujemos los siguientes segmentos de recta: OE, OA, OG, OD y OF, donde E, F y G son puntos de tangencia.



Por la propiedad de las tangentes (ver el artículo de matemáticas de este número) tenemos que: $AE = AG$ y $DF = DG$. Luego, tenemos las siguientes igualdades de ángulos, $\angle EAO = \angle GAO = x$ y $\angle GDO = \angle FDO = y$. Los triángulos rectángulos BOE y COF son congruentes ya que dos de sus lados son iguales. Luego, $\angle EBO = \angle FCO = z$.

Sumando los ángulos del cuadrilátero $ABCD$, tenemos que $2x + 2y + 2z = 360°$, luego $x+y+z = 180°$. Por lo que los triángulos AOB, ADO y ODC son semejantes por el criterio de semejanza AA (ver el Criterio 21 del apéndice). Considerando los triángulos AOB y ODC tenemos que

$$\frac{AB}{OB} = \frac{OC}{CD} \quad \text{ó} \quad AB \cdot CD = OC \cdot OB.$$

Como $OB = OC = \frac{1}{2}BC$, tenemos que $AB \cdot CD = \frac{1}{4}BC^2$. Por lo tanto, $BC = 2\sqrt{AB \cdot CD}$.

Solución del problema 12. Supongamos que sí existen números primos p y q, con $p - q = 2$, y un entero k, tales que $pq + 10^k$ es primo. Es claro que $k \geq 0$.

Si $k = 0$, entonces $pq + 10^k = pq + 1$. Como $p - q = 2$, entonces p y q son ambos distintos de 2, es decir, p y q son ambos impares. Luego, $pq + 1$ es par y claramente es mayor que 2, de modo que no es primo, lo que es una contradicción.
Supongamos que $k > 0$.
1. Si $p \equiv 0 \pmod 3$ (ver [14] y la Definición 3 del apéndice), entonces $p = 3$ y $q = p - 2 = 1$ no es primo, lo que es una contradicción.
2. Si $p \equiv 1 \pmod 3$, entonces $q = p - 2 \equiv 2 \pmod 3$, de modo que

$$pq + 10^k \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod 3,$$

ya que $10^k \equiv 1 \pmod 3$ para todo entero $k > 0$. Como $pq + 10^k$ debe ser primo, la única posibilidad es que $pq + 10^k = 3$, pero esto no es posible porque $10^k > 3$ si $k > 0$.
3. Si $p \equiv 2 \pmod 3$, entonces $q = p - 2 \equiv 0 \pmod 3$ y por lo tanto $q = 3$. Luego, $p = q + 2 = 5$. Pero entonces $pq + 10^k = 15 + 10^k \equiv 0 \pmod 5$ y $pq + 10^k > 5$, de modo que $pq + 10^k$ no es primo, lo que es una contradicción.
Por lo tanto, para ningún entero k existen primos p y q que satisfagan las condiciones del problema.

Solución del problema 13. En primer lugar observemos que si dos vecinos tienen la misma respuesta en la n-ésima votación, entonces ambos volverán a votar de la misma manera en la votación $n + 1$. Más aún, ambos seguirán repitiendo esa misma respuesta en todas las votaciones posteriores.
Sea A_n el conjunto de diputados que coincide con al menos uno de sus vecinos en la n-ésima votación. Por lo expuesto en el párrafo anterior tenemos que $A_n \subseteq A_{n+1}$ para toda $n \geq 1$. Observemos que para resolver el problema basta con demostrar que para alguna n, A_n contiene a los 25 diputados.
Debido a que el número de diputados en la mesa es impar, no es posible que todos ellos estén en desacuerdo con sus dos vecinos en la primera votación, por lo que A_1 es no vacío y tiene al menos 2 elementos.
Supongamos que existe un entero m tal que $A_m = A_{m+1}$ y que A_m no contiene a los 25 diputados, y veamos que esto nos lleva a una contradicción. Como A_m no es un conjunto vacío, existen dos vecinos a y b tales que $a \in A_m$ y $b \notin A_m$. Como $a \in A_m$, entonces a volverá a votar de la misma forma en la votación $m + 1$. Por otro lado, como $b \notin A_m$, sabemos que en la m-ésima votación el voto de b difirió del voto de a. De hecho, sabemos que en la m-ésima votación el voto de b difirió de los votos sus dos vecinos y, en consecuencia, b cambiará su respuesta para la votación $m + 1$. De lo anterior, se sigue que en la $(m + 1)$-ésima votación el voto de b coincidirá con el de a, lo que implica que $b \in A_{m+1}$, pero $b \notin A_m$, lo cual contradice el hecho de que $A_m = A_{m+1}$. Por lo tanto, podemos concluir que A_m contiene a los 25 diputados.

Solución del problema 14. Supongamos que el lado de la base de la pirámide contiene n esferas. Entonces, en la base de la pirámide habrán

$$n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n + 1)}{2}$$

esferas.
La segunda capa de la pirámide tendrá

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

esferas.
La tercera tendrá

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

esferas, y así sucesivamente. La última, la capa superior, sólo tendrá una esfera. Luego,

$$\begin{aligned}
120 &= \frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n-2)(n-1)}{2}+\cdots+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{1\cdot 2}{2}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2+\sum_{i=1}^{n} i\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6},
\end{aligned}$$

donde en la cuarta igualdad usamos las fórmulas de la suma de los cuadrados de los primeros números naturales y de la suma de los primeros n números naturales (ver los Teoremas 11 y 10 del apéndice).
Luego, debemos resolver la ecuación $n(n+1)(n+2)=720$. Como $720=8\cdot 9\cdot 10$, una solución de la ecuación anterior es $n=8$. Para hallar las demás soluciones dividimos al polinomio $n(n+1)(n+2)-720=n^3+3n^2+2n-720$ entre $n-8$, obteniendo como cociente al polinomio $n^2+11n+90$. Es decir, tenemos que

$$n^3+3n^2+2n-720=(n-8)(n^2+11n+90).$$

Es fácil ver que la ecuación $n^2+11n+90=0$ no tiene soluciones reales (ver el Teorema 13 del apéndice), de modo que la única solución entera de la ecuación $n(n+1)(n+2)=720$ es $n=8$. Por lo tanto, la base de la pirámide debe tener $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{8(9)}{2}=36$ esferas.

Solución del problema 15. Tenemos que $xy=-yz-zx-1$. Luego,

$$\frac{(x+1)(y+1)}{x+y}=\frac{xy+x+y+1}{x+y}=\frac{x+y-yz-zx}{x+y}=\frac{(x+y)(1-z)}{x+y}=1-z.$$

De manera análoga tenemos que,

$$\frac{(y+1)(z+1)}{y+z}=1-x \quad \text{y} \quad \frac{(z+1)(x+1)}{z+x}=1-y.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
& \frac{(x+1)(y+1)}{x+y}+\frac{(y+1)(z+1)}{y+z}+\frac{(z+1)(x+1)}{z+x} \\
= \quad & (1-z)+(1-x)+(1-y) \\
= \quad & 3-(x+y+z) \\
= \quad & 3-3 \\
= \quad & 0.
\end{aligned}$$

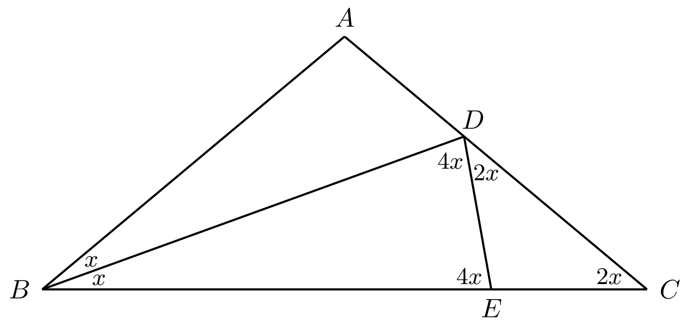
Solución del problema 16. Para facilitar la exposición, a los ángulos interiores de los boomerangs mayores que $180°$ les llameremos *ángulos reflex*. Es evidente que en el interior del polígono C hay b ángulos reflex, cada uno de ellos correspondiente a cada uno de los b boomerangs. Consideremos a los b vértices de los ángulos reflex en el interior de C y observemos que los ángulos que están alrededor de estos vértices suman un total de $b\,(360°)$. Por otro lado, la suma de los ángulos interiores de C es igual a $(s-2)\,180°$ y la suma de los ángulos interiores de los q cuadriláteros es igual a $q\,(360°)$. Luego, tenemos que

$$q\,(360°) \geq b\,(360°)+(s-2)\,180°,$$

de donde dividiendo entre $360°$ obtenemos

$$q \geq b+\frac{s-2}{2}.$$

Solución del problema 17. Como $BC = BD + AD$, podemos tomar E sobre BC de forma que $BE = BD$ y entonces $AD = CE$.



Como BD es la bisectriz del $\angle ABC$ y D está sobre AC, sabemos, por el teorema de la bisectriz (ver el Teorema 16 del apéndice), que D divide al segmento AC en la misma razón que guardan los lados AB y BC, es decir

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}.$$

Luego, $\frac{CE}{CD} = \frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC} = \frac{CA}{BC}$ y como $\angle BCA$ es un ángulo común a los triángulos EDC y ABC, tenemos que éstos son semejantes por el criterio de semejanza LAL (ver el Criterio 22 del apéndice). En consecuencia, $\angle CDE = \angle ECD = \angle ABC = 2x$. Entonces $\angle BDE = \angle BED = 4x$, de donde se sigue que $9x = 180°$ y $x = 20°$. Por lo tanto, $\angle CAB = 180° - 4x = 100°$.

Solución del problema 18. Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n$, una permutación de los números 1, 2, ..., n, que cumple las condiciones (1) y (2). Usando la condición (2) y el hecho de que $a_1 = 1$, se sigue que $a_2 = 2$ ó $a_2 = 3$.
Haremos un análisis por casos, pero antes conviene hacer la siguiente observación que utilizaremos: si a_k y a_{k+1} son enteros consecutivos, entonces los términos a la derecha de a_{k+1} (igualmente para los de la izquierda de a_k) son o todos menores que a_k y a_{k+1} (ambos), o todos mayores.

- **CASO I:** supongamos que $a_2 = 2$. Entonces, sabemos que $a_3, a_4, \ldots, a_n$ es una permutación de los números $3, 4, \ldots, n$. Entonces $a_2, a_3, \ldots, a_n$ es una permutación de los números $2, 3, \ldots, n$ tal que $a_2 = 2$ y que cumple con la propiedad (2). Es claro que hay $f(n-1)$ de estas permutaciones.

- **CASO II:** supongamos que $a_2 = 3$. Entonces, $a_3 = 2$, 4 ó 5.

  - Supongamos que $a_3 = 2$. En este caso tenemos que $a_4, a_5, \ldots, a_n$ es una permutación de los números $4, 5, \ldots, n$ donde $a_4 = 4$ y que cumple con (2). Por lo tanto sabemos que hay $f(n-3)$ de estas permutaciones.

  - Supongamos que $a_3 \geq 4$. Si a_{k+1} es el primer número par en la permutación, debido a la propiedad (2) tenemos que $a_1, a_2, \ldots, a_k$ debe ser la permutación $1, 3, 5, \ldots, 2k-1$ (en ese mismo orden). Entonces a_{k+1} debe ser $2k$ ó $2k-2$, por lo que a_k y a_{k+1} son enteros consecutivos. Aplicando la observación crucial que hicimos arriba, se deduce que $a_{k+2}, \ldots, a_n$ son todos o más grandes o más pequeños que a_k y a_{k+1}. Pero en este caso el número 2 debe estar a la derecha de a_{k+1}. Por lo tanto $a_{k+2}, \ldots, a_n$ son los enteros pares menores que a_{k+1}. Entonces, la única posibilidad es: $1, 3, 5, \ldots, a_{k-1}, a_k, \ldots, 6, 4, 2$.

Los Casos I y II muestran que

$$f(n) \quad = \quad f(n-1) + f(n-3) + 1, \quad \text{si} \quad n \geq 6. \tag{1}$$

Calculando directamente los primeros valores de $f(n)$ obtenemos

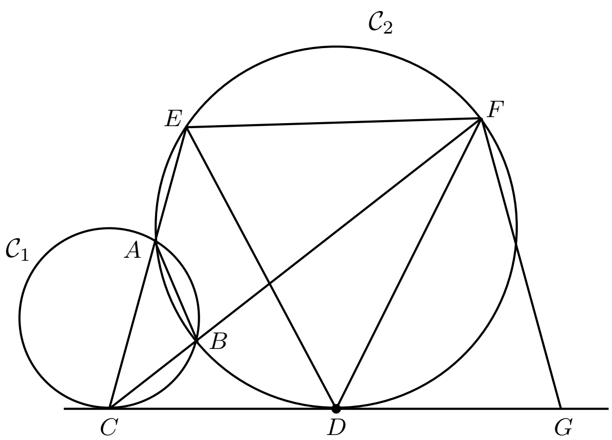
$$f(1) = 1,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2,\ f(4) = 4,\ f(5) = 6.$$

Usando la ecuación (1) y calculando los primeros 11 valores de f según la aritmética módulo 3, tenemos:

$$\begin{array}{ll}
f(1)\equiv 1 & f(2)\equiv 1\\
f(3)\equiv 2 & f(4)\equiv 1\\
f(5)\equiv 0 & f(6)=f(5)+f(3)+1\equiv 0\\
f(7)=f(6)+f(4)+1\equiv 2 & f(8)=f(7)+f(5)+1\equiv 0\\
f(9)=f(8)+f(6)+1\equiv 1 & f(10)=f(9)+f(7)+1\equiv 1\\
f(11)=f(10)+f(8)+1\equiv 2. &
\end{array}$$

Como $f(1)\equiv f(9) \pmod 3$, $f(2)\equiv f(10) \pmod 3$ y $f(3)\equiv f(11) \pmod 3$, tenemos que $f(a)\equiv f(a+8k) \pmod 3$ para todo entero $k\geq 0$. Por lo tanto, $f(2009)=f(1+8(251))\equiv f(1)\equiv 1 \pmod 3$, es decir, el residuo que se obtiene al dividir $f(2009)$ entre 3 es 1.

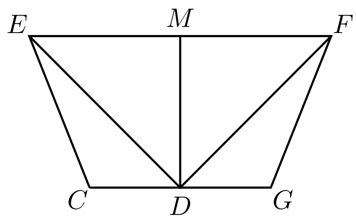
Solución del problema 19. Si nos fijamos en la circunferencia $\mathcal{C}_1$, tenemos que los ángulos $\angle CAB$ y $\angle GCF$ son iguales, ya que abren el mismo arco.



Por otro lado, tomando la potencia del punto C con respecto a la circunferencia $\mathcal{C}_2$ (ver el artículo de matemáticas de este número), tenemos que $CA\cdot CE=CB\cdot CF$, es decir, $\frac{CA}{CF}=\frac{CB}{CE}$. Luego, los triángulos CEF y CBA son semejantes, de modo que $\angle CAB=\angle CFE=\angle GCF=\alpha$. De aquí que EF es paralela a CG.
Ahora, el cuadrilátero $CGFE$ es cíclico, ya que sus vértices están sobre el circuncírculo del triángulo CEF. Entonces, $\angle FEC+\angle CGF=\angle GFE+\angle ECG=180°$.
Luego, en el triángulo CGF, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\angle GFC &= 180°-\angle CGF-\alpha\\
&= \angle CGF+\angle FEC-\angle CGF-\alpha\\
&= \angle FEC-\alpha.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\angle GFE=\angle FEC-\alpha+\alpha=\angle FEC$ y $\angle CGF=\angle ECG$.
Sea M el punto medio de EF y tracemos la recta MD.



Tenemos que $\angle FED = \angle FDG$, ya que abren el mismo arco en la circunferencia $\mathcal{C}_2$, y como EF es paralela a CG, tenemos que $\angle FED = \angle CDE = \angle FDG = \angle DFE$. Luego, el triángulo EDF es isósceles con $ED = DF$. Además, los triángulos CDE y GDF son congruentes por el criterio ALA (ver el Criterio 19 del apéndice) y por lo tanto, $CD = DG$. Es decir, D es punto medio de CG.

Solución del problema 20. La demostración la haremos por inducción fuerte en k (ver [15] y el Teorema 4 del apéndice).
Si $k = 1$, entonces aplicando la desigualdad media aritmética - media geométrica (ver el Teorema 7 del apéndice), tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} = n,$$

de donde

$$\sqrt{n} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (ver el Teorema 8 del apéndice) y usando la desigualdad anterior, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Dividiendo ambos lados de esta desigualdad entre $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i}$, obtenemos

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Esto demuestra el caso $k = 1$.
Supongamos entonces que el resultado es cierto para algún entero $k > 1$ y para todos los enteros positivos menores o iguales que k. Entonces tenemos las siguientes desigualdades

$$n \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \cdots \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^{2^k}.$$

Luego, aplicando nuevamente la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{2^k} \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{2^{k+1}}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{2^k}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{2^{k+1}}},$$

de donde

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{2^k}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{2^{k+1}}}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{2^k} \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^{2^{k+1}},$$

lo que completa la inducción y termina la demostración.

Problemas propuestos

Tzaloa es tu revista y no podrá estar completa sin ti. En esta sección te proponemos 5 nuevos problemas que necesitan de tu participación y ayuda para encontrar sus soluciones.

Agradecemos a Luis Brandon Guzmán Navarrete, del Estado de Tamaulipas por haber enviado su solución al problema propuesto número 5 de Tzaloa 2. Su solución no fue posible publicarla en el número 3 de la revista, debido a que ya estaba en impresión cuando nos escribió. Sin embargo, la solución de Luis Brandon es esencialmente la misma que se publicó en Tzaloa 3.
También agradecemos a Irving Daniel Calderón Camacho del Estado de México, por sus soluciones correctas a los problemas propuestos 1, 2 y 4 de Tzaloa No. 2 de 2009. Debido a que dichas soluciones fueron enviadas cuando ya estaba en impresión el número 3 de la revista, no fue posible publicarlas.

Recuerda que nuestra dirección electrónica es `revistaomm@gmail.com` y a través de ella estaremos recibiendo todas las contribuciones que nos lleguen desde todos los rincones del país. No dudes en enviarnos tus soluciones y problemas que desees que se publiquen en esta sección.

Problemas propuestos.
Año 2009 No. 4.

Problema 1. (Intermedio) Para cada entero positivo n, denotamos por $a(n)$ al producto de los dígitos de n.
(a) Demuestra que $a(n) \leq n$.
(b) Determina todas las soluciones de la ecuación $n^2 - 17n + 56 = a(n)$.

Problema 2. (Intermedio) Sea S un conjunto de 2010 puntos del plano tales que 3 cualesquiera de ellos no son colineales. Denotemos por $\mathcal{L}$ al conjunto de todas las rectas (extendidas indefinidamente en ambas direcciones) que determinan dos puntos de S. Demuestra que es posible colorear los puntos de S con a lo más dos colores, de modo que para cualesquiera dos puntos, p y q de S, el número de rectas en $\mathcal{L}$ que *separan* a p de q es impar si y sólo si p y q tienen el mismo color.

Nota: Una recta l *separa* dos puntos p y q si p y q están en lados opuestos de l pero ninguno de los dos está en l.

Problema 3. (Intermedio) En un triángulo acutángulo ABC, los puntos E y F están en AC y BC, respectivamente. Las rectas BE y AF se cortan en un punto T, de manera que $\frac{AT}{TF} = 4$ y $\frac{BT}{TE} = 3$. Encuentra el valor de $\frac{CE}{EA}$.

Problema 4. (Avanzado) Si se ponen tres puntos en una circunferencia, ¿cuál es la probabilidad de que estén en una misma semicircunferencia?

Problema 5. (Avanzado) Sea $A = (a_1, a_2, \ldots, a_{2010})$ una sucesión de enteros no necesariamente distintos, cada uno de ellos tomados del intervalo $[-1005, 1005]$. Además, supongamos que la suma de todos los términos de A es igual a 1. Demuestra que existe una subsucesión de A tal que la suma de sus términos es igual a cero.

Olimpiadas Internacionales

50ª Olimpiada Internacional

La 50^a Olimpiada Internacional de Matemáticas se llevó a cabo del 10 al 22 de julio de 2009 en Bremen, Alemania, con la participación de 104 países. México ocupó el lugar número 50. La delegación que representó a México estuvo integrada por los alumnos: Flavio Hernández González, de Aguascalientes; Manuel Guillermo López Buenfil, de Chihuahua; Luis Ángel Isaías Castellanos, de Colima; César Bibiano Velasco, de Morelos; César Ernesto Rodríguez Angón, del Distrito Federal y Erik Alejandro Gallegos Baos, de Oaxaca. Los alumnos, Manuel Guillermo, César Bibiano y Erik Alejandro obtuvieron medalla de bronce, y Flavio obtuvo mención honorífica.

A continuación presentamos el examen de la 50^a Olimpiada Internacional.

Problema 1. Sea n un entero positivo y sean $a_1, \ldots, a_k$ ($k \geq 2$) enteros distintos del conjunto $\{1, \ldots, n\}$, tales que n divide a $a_i(a_{i+1}-1)$, para $i = 1, \ldots, k-1$. Demostrar que n no divide a $a_k(a_1 - 1)$.

Problema 2. Sea ABC un triángulo con circuncentro O. Sean P y Q puntos interiores de los lados CA y AB, respectivamente. Sean K, L y M los puntos medios de los segmentos BP, CQ y PQ, respectivamente, y Γ la circunferencia que pasa por K, L y M. Se sabe que la recta PQ es tangente a la circunferencia Γ. Demostrar que $OP = OQ$.

Problema 3. Sea $s_1, s_2, s_3, \ldots$ una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos tal que las subsucesiones

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{y} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

son ambas progresiones aritméticas. Demostrar que la sucesión $s_1, s_2, s_3, \ldots$ es también una progresión aritmética.

Problema 4. Sea ABC un triángulo con $AB = AC$. Las bisectrices de los ángulos $\angle CAB$ y $\angle ABC$ cortan a los lados BC y CA en D y E, respectivamente. Sea K el incentro del triángulo ADC. Supongamos que el ángulo $\angle BEK = 45°$. Determinar todos los posibles valores de $\angle CAB$.

Problema 5. Determinar todas las funciones f del conjunto de los enteros positivos en el conjunto de los enteros positivos tales que, para todos los enteros positivos a y b, existe un triángulo no degenerado cuyos lados miden

$$a,\ f(b)\ \text{ y }\ f(b + f(a) - 1).$$

(Un triángulo es *no degenerado* si sus vértices no están alineados).

Problema 6. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros positivos distintos y M un conjunto de $n-1$ enteros positivos que no contiene al número $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Un saltamontes se dispone a saltar a lo largo de la recta real. Empieza en el punto 0 y da n saltos hacia la derecha de longitudes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, en algún orden. Demostrar que el saltamontes puede organizar los saltos de manera que nunca caiga en un punto de M.

Problemas y Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XXI Olimpiada de la Cuenca del Pacífico

A continuación presentamos el examen con sus soluciones de la XXI Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Problema 1. En un pizarrón están escritos algunos números reales positivos. Considera el siguiente procedimiento: *se elige uno de los números del pizarrón, digamos r. Luego se borra r y se escriben dos números reales positivos a y b tales que $2r^2 = ab$.* Si al inicio hay un solo número real positivo r en el pizarrón, y se aplica este procedimiento $k^2 - 1$ veces, se obtienen k^2 números reales positivos, no necesariamente distintos. Demuestra que existe un número en el pizarrón que es menor o igual que kr.

Solución. Sean a, b y r números reales positivos tales que $2r^2 = ab$. Aplicando la desigualdad media aritmética - media geométrica a los números a^2 y b^2, tenemos que $2ab \leq a^2 + b^2$. Dividiendo ambos lados de esta desigualdad entre a^2b^2 (que es un número mayor que cero), obtenemos

$$\frac{1}{r^2} = \frac{2}{ab} = \frac{2ab}{a^2b^2} \leq \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Luego, si S_l denota la suma de los cuadrados de los recíprocos de los números escritos en el pizarrón después de l operaciones, entonces S_l aumenta cuando l aumenta, es decir

$$S_0 \leq S_1 \leq \cdots \leq S_{k^2-1}.$$

Por lo tanto, si s es el menor número real escrito en el pizarrón después de $k^2 - 1$ operaciones, entonces $\frac{1}{s^2} \geq \frac{1}{t^2}$ para cualquier número t entre los k^2 números del pizarrón, y así

$$k^2 \times \frac{1}{s^2} \geq S_{k^2-1} \geq S_0 = \frac{1}{r^2},$$

lo cual implica que $s \leq kr$, como queríamos.

Problema 2. Sean a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 números reales que satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\frac{a_1}{k^2+1} + \frac{a_2}{k^2+2} + \frac{a_3}{k^2+3} + \frac{a_4}{k^2+4} + \frac{a_5}{k^2+5} = \frac{1}{k^2},$$

para $k = 1, 2, 3, 4, 5$.
Determina el valor de $\frac{a_1}{37} + \frac{a_2}{38} + \frac{a_3}{39} + \frac{a_4}{40} + \frac{a_5}{41}$. (Expresa el resultado como una sola fracción).

Solución. Sea $R(x) = \frac{a_1}{x^2+1} + \frac{a_2}{x^2+2} + \frac{a_3}{x^2+3} + \frac{a_4}{x^2+4} + \frac{a_5}{x^2+5}$. Entonces

$$R(\pm 1) = 1,\ R(\pm 2) = \frac{1}{4},\ R(\pm 3) = \frac{1}{9},\ R(\pm 4) = \frac{1}{16},\ R(\pm 5) = \frac{1}{25},$$

y $R(6)$ es el valor que queremos obtener.
Consideremos los polinomios $P(x) = (x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)(x^2+4)(x^2+5)$ y $Q(x) = R(x)P(x)$. Entonces, para $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$, tenemos que $Q(k) = R(k)P(k) = \frac{P(k)}{k^2}$, es decir, $P(k) - k^2 Q(k) = 0$. Como $P(x) - x^2 Q(x)$ es un polinomio de grado 10 con raíces $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$, tenemos

$$P(x) - x^2 Q(x) = A(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)(x^2-16)(x^2-25). \qquad (2)$$

Si $x = 0$, obtenemos $A = \frac{P(0)}{(-1)(-4)(-9)(-16)(-25)} = -\frac{1}{120}$. Finalmente, dividiendo ambos lados de la ecuación (2) entre $P(x)$ obtenemos

$$1 - x^2 R(x) = 1 - x^2 \frac{Q(x)}{P(x)} = -\frac{1}{120} \cdot \frac{(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)(x^2-16)(x^2-25)}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)(x^2+4)(x^2+5)},$$

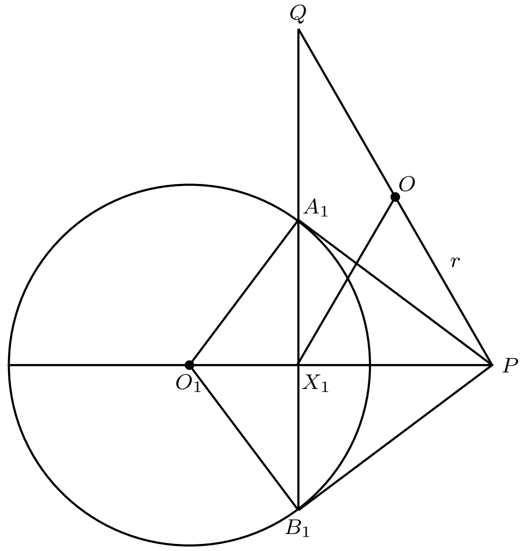
de modo que para $x = 6$, obtenemos

$$\begin{aligned} 1 - 36R(6) &= -\frac{35 \times 32 \times 27 \times 20 \times 11}{120 \times 37 \times 38 \times 39 \times 40 \times 41} = -\frac{3 \times 7 \times 11}{13 \times 19 \times 37 \times 41} \\ &= -\frac{231}{374{,}699}, \end{aligned}$$

lo cual implica que $R(6) = \frac{187{,}465}{6{,}744{,}582}$.

Problema 3. Considera tres circunferencias en el plano Γ_1, Γ_2 y Γ_3 mutuamente externas y que no se intersectan. Para cada punto P del plano que se encuentre fuera de las tres circunferencias, construimos seis puntos distintos A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, tales que las rectas PA_i y PB_i son tangentes a la circunferencia Γ_i en los puntos A_i y B_i, para $i = 1, 2, 3$. Llamaremos al punto P *excepcional*, si las rectas A_1B_1, A_2B_2 y A_3B_3 son concurrentes. Demuestra que todos los puntos excepcionales del plano, si existen, están sobre una misma circunferencia.

Solución. Sean O_i el centro y r_i el radio del círculo Γ_i para cada $i = 1, 2, 3$. Sea P un punto excepcional y sean A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 las tres rectas correspondientes concurrentes en el punto Q. Construyamos el círculo de diámetro PQ. Llamaremos a este círculo Γ, a su centro O y a su radio r. Demostraremos que todos los puntos excepcionales están sobre Γ.



Supongamos que PO_1 intersecta a A_1B_1 en X_1. Como PO_1 y A_1B_1 son perpendiculares, tenemos que X_1 está sobre Γ. Como PA_1 es una tangente a Γ_1, el triángulo PA_1O_1 es rectángulo y es semejante al triángulo $A_1X_1O_1$. Luego,

$$\frac{O_1X_1}{O_1A_1} = \frac{O_1A_1}{O_1P}, \quad \text{es decir} \quad O_1X_1 \cdot O_1P = O_1A_1^2 = r_1^2.$$

Por otro lado, $O_1X_1 \cdot O_1P$ también es la potencia de O_1 con respecto a Γ, de modo que

$$r_1^2 = O_1X_1 \cdot O_1P = (O_1O - r)(O_1O + r) = O_1O^2 - r^2,$$

y por lo tanto

$$r^2 = OO_1^2 - r_1^2 = (OO_1 - r_1)(OO_1 + r_1).$$

Luego, r^2 es la potencia de O con respecto a Γ_1. De manera análoga tenemos que r^2 es también la potencia de O con respecto a Γ_2 y Γ_3. Luego, O debe ser el centro radical de los tres círculos. Ya que r, como raíz cuadrada de la potencia de O con respecto a los tres círculos dados, no depende de P, se sigue que todos los puntos excepcionales están sobre Γ.

Problema 4. Demuestra que para cada entero positivo k, existe una sucesión aritmética

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_k}{b_k}$$

de fracciones irreducibles, tales que los enteros positivos $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k$ son todos distintos.

Solución. Para $k=1$ no hay nada que probar. Supongamos entonces que $k \geq 2$. Sean $p_1, p_2, \ldots, p_k$ diferentes primos tales que

$$k < p_k < \cdots < p_2 < p_1,$$

y sea $N = p_1 p_2 \cdots p_k$. Por el teorema chino del residuo, existe un entero positivo x que satisface

$$x \equiv -i \pmod{p_i}$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, k$ y $x > N^2$. Consideremos la siguiente sucesión,

$$\frac{x+1}{N}, \frac{x+2}{N}, \ldots, \frac{x+k}{N}.$$

Esta sucesión es claramente una sucesión aritmética de k números racionales positivos. Para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, el numerador $x+i$ es divisible entre p_i pero no entre p_j si $j \neq i$, ya que de no ser así p_j dividiría a $|i-j|$, lo cual no es posible porque $p_j > k > |i-j|$.
Sean

$$a_i = \frac{x+i}{p_i}, \quad b_i = \frac{N}{p_i} \quad \text{para todo} \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Entonces,

$$\frac{x+i}{N} = \frac{a_i}{b_i}, \quad \text{mcd}(a_i, b_i) = 1, \quad \text{para todo} \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

y todos los b_i's son distintos entre sí. Además, $x > N^2$ implica que

$$a_i = \frac{x+i}{p_i} > \frac{N^2}{p_i} > N > \frac{N}{p_j} = b_j \quad \text{para todo} \quad i, j = 1, 2, \ldots, k,$$

y en consecuencia todos los a_i's son distintos de los b_i's. Sólo falta demostrar que todos los a_i's son distintos entre sí. Pero ésto se sigue de que

$$a_j = \frac{x+j}{p_j} > \frac{x+i}{p_j} > \frac{x+i}{p_i} = a_i \quad \text{para todo} \quad i < j,$$

por nuestra elección de $p_1, p_2, \ldots, p_k$.
Por lo tanto, la sucesión aritmética

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_k}{b_k}$$

de números racionales positivos, satisface las condiciones del problema.
Solución alternativa. Para cada entero positivo $k \geq 2$, consideremos la sucesión

$$\frac{(k!)^2+1}{k!}, \frac{(k!)^2+2}{k!}, \ldots, \frac{(k!)^2+k}{k!}.$$

Notemos que el máximo común divisor de $k!$ y $(k!)^2 + i$ es igual a i para todo $i = 1, 2, \ldots, k$. Luego, haciendo $a_i = \frac{(k!)^2+i}{i}$ y $b_i = \frac{k!}{i}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, tenemos que a_i y b_i son primos relativos y

$$a_i = \frac{(k!)^2+i}{i} > a_j = \frac{(k!)^2+j}{j} > b_i = \frac{k!}{i} > b_j = \frac{k!}{j}$$

para cualesquiera $1 \leq i < j \leq k$. Por lo tanto, esta sucesión satisface las condiciones del problema.

Problema 5. Larry y Rob son dos robots que viajan en un coche desde Argovia a Zillis. Ambos robots tienen el control de la dirección del coche de acuerdo con el siguiente algoritmo: Larry da vuelta a la izquierda $90°$ después de cada l kilómetros recorridos, y Rob da vuelta a la derecha $90°$ después de cada r kilómetros recorridos, donde l y r son enteros positivos primos relativos. En caso de que se produzcan simultáneamente dos vueltas, el coche se mantiene sin cambiar su dirección. Suponga que el terreno es plano y que el coche puede moverse en cualquier dirección. Si el coche sale de Argovia en dirección de Zillis, ¿para qué elecciones de la pareja (l, r) se puede garantizar que el coche llegará a Zillis, independientemente de la distancia entre Argovia y Zillis?

Solución. Supongamos que la distancia entre Argovia y Zillis es d kilómetros, donde d es un número real positivo. Por simplicidad, colocaremos a Argovia en el origen $(0, 0)$ del plano cartesiano y a Zillis en $(d, 0)$, de modo que el coche comienza mirando hacia el este. Investigaremos cómo se mueve el coche durante los primeros lr kilómetros, los siguientes lr kilómetros, y así sucesivamente. Llamaremos a cada periodo de viaje de lr kilómetros una *sección*. Es claro que el coche tendrá un comportamiento idéntico en todas las secciones, excepto la dirección del coche en el comienzo.

Caso 1: $l-r \equiv 2 \pmod 4$. Después de la primera sección, el coche ha dado $l-1$ vueltas a la derecha y $r-1$ vueltas a la izquierda, lo cual hace un total de 2 $(\equiv l-r \pmod 4)$ vueltas a la derecha.

Supongamos que el vector de desplazamiento para la primera sección es (x, y). Ya que el coche ha girado $180°$, el vector de desplazamiento para la segunda sección será $(-x, -y)$, el cual regreserá al coche al origen $(0, 0)$ mirando hacia el este nuevamente. Ahora tenemos nuestra situación original, y el coche nunca ha viajado más de lr kilómetros desde Argovia. Luego, el coche no puede llegar a Zillis si Argovia está a más de lr kilómetros.

Caso 2: $l-r \equiv 1 \pmod 4$. Después de la primera sección, el coche ha dado en total una vuelta a la derecha. Supongamos que el vector de desplazamiento para la primera sección es (x, y). En esta ocasión el coche ha girado $90°$ en el sentido de las manecillas del reloj. Podemos ver que los desplazamientos para la segunda, tercera y cuarta secciones serán $(y, -x)$, $(-x, -y)$ y $(-y, x)$, respectivamente, de modo que después de cuatro secciones el coche está de vuelta en $(0, 0)$ mirando al este. Ya que el coche nunca ha viajado más de $2lr$ kilómetros desde Argovia, el coche no puede llegar a Zillis si la distancia es mayor a $2lr$ kilómetros.

Caso 3: $l-r \equiv 3 \pmod 4$. Un argumento similar al Caso 2 (intercambiando los roles de izquierda y derecha), muestra que el coche no puede llegar a Zillis.

Caso 4: $l \equiv r \pmod 4$. El coche da un giro total de $0°$ después de cada sección, de modo que debe mirar hacia el este. Vamos a demostrar que, después de recorrer la primera sección, el coche estará en $(1, 0)$. Será útil interpretar el plano cartesiano como el plano complejo, es decir, escribiremos $x + iy$ para (x, y), donde $i = \sqrt{-1}$. Denotaremos por m_k al movimiento en el k-ésimo kilómetro, el cual toma valores del conjunto $\{1, i, -1, -i\}$, dependiendo de la dirección $\{$este, norte, oeste, sur$\}$, respectivamente.

Luego, debemos demostrar que

$$\sum_{k=0}^{lr-1} m_k = 1,$$

lo cual implica que el coche llegará a Zillis sin importar qué tan lejos se encuentre de Argovia.
Caso $4a$: $l \equiv r \equiv 1 \pmod 4$. Notemos primero que para $k = 0, 1, \ldots, lr - 1$,

$$m_k = i^{\lfloor k/l \rfloor}(-i)^{\lfloor k/r \rfloor},$$

ya que $\lfloor k/l \rfloor$ y $\lfloor k/r \rfloor$ son los números exactos de vueltas a la izquierda y a la derecha antes del $(k+1)$-ésimo kilómetro, respectivamente. Sean a_k $(\equiv k \pmod l)$ y b_k $(\equiv k \pmod r)$ los residuos que se obtienen al dividir k entre l y r, respectivamente. Entonces, ya que

$$a_k = k - \left\lfloor \frac{k}{l} \right\rfloor l \equiv k - \left\lfloor \frac{k}{l} \right\rfloor \pmod 4 \quad \text{y} \quad b_k = k - \left\lfloor \frac{k}{r} \right\rfloor r \equiv k - \left\lfloor \frac{k}{r} \right\rfloor \pmod 4,$$

tenemos que $\lfloor \frac{k}{l} \rfloor \equiv k - a_k \pmod 4$ y $\lfloor \frac{k}{r} \rfloor \equiv k - b_k \pmod 4$. Por lo tanto,

$$m_k = i^{k-a_k}(-i)^{k-b_k} = (-i^2)^k i^{-a_k}(-i)^{-b_k} = (-i)^{a_k} i^{b_k}.$$

Como l y r son primos relativos, por el teorema chino del residuo existe una biyección entre las parejas $(a_k, b_k) = (k \pmod l, k \pmod r)$ y los números $k = 0, 1, \ldots, lr - 1$. Así

$$\sum_{k=0}^{lr-1} m_k = \sum_{k=0}^{lr-1} (-i)^{a_k} i^{b_k} = \left(\sum_{k=0}^{l-1} (-i)^{a_k} \right) \left(\sum_{k=0}^{r-1} i^{b_k} \right) = 1 \times 1 = 1,$$

ya que $l \equiv r \equiv 1 \pmod 4$.
Caso $4b$: $l \equiv r \equiv 3 \pmod 4$. En este caso, tenemos que

$$m_k = i^{a_k}(-i)^{b_k},$$

donde a_k $(\equiv k \pmod l)$ y b_k $(\equiv k \pmod r)$ para $k = 0, 1, \ldots, lr - 1$. Procediendo de manera análoga al Caso $4a$ obtenemos

$$\sum_{k=0}^{lr-1} m_k = \sum_{k=0}^{lr-1} (-i)^{a_k} i^{b_k} = \left(\sum_{k=0}^{l-1} (-i)^{a_k} \right) \left(\sum_{k=0}^{r-1} i^{b_k} \right) = i \times (-i) = 1,$$

ya que $l \equiv r \equiv 3 \pmod 4$.
Es claro ahora que el coche atraviesa todos los puntos entre $(0, 0)$ y $(1, 0)$ durante la primera sección y, de hecho, atraviesa todos los puntos entre $(n - 1, 0)$ y $(n, 0)$ durante la n-ésima sección. Luego, eventualmente llegará a $(d, 0)$ para todo número positivo d. Por lo tanto, (l, r) satisface las condiciones del problema si y sólo si $l \equiv r \equiv 1 \pmod 4$ ó $l \equiv r \equiv 3 \pmod 4$.

American Mathematics Competition (AMC)

A continuación presentamos los exámenes con sus soluciones, del 10^{th} AMC 10 y del 60^{th} AMC 12. Es importante mencionar, que aunque el nivel de los problemas va subiendo rápidamente en cada examen, los concursantes tienen sólo 75 minutos para resolverlo.

En las soluciones de los problemas se incluyeron referencias al apéndice, excepto en los problemas 24 y 25 del AMC 12, debido a que dichos problemas tratan temas que no se manejan en la olimpiada mexicana de matemáticas.

10^{th} AMC 10

Problema 1. Si un envase contiene 12 onzas de refresco, ¿cuál es el mínimo número de envases necesarios para llenar un galón (128 onzas) de refresco?

(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 11

Solución. La respuesta es (e).
Tenemos que $\frac{128}{12} = 10\frac{2}{3}$, luego se necesitan 11 envases.

Problema 2. Cuatro monedas se sacaron de una alcancía que contiene monedas de 1, 5, 10 y 25 centavos. ¿Cuál de los siguientes resultados no puede ser el valor total de las cuatro monedas?

(a) 15 (b) 25 (c) 35 (d) 45 (e) 55

Solución. La respuesta es (a).
El valor de cualquier combinación de 4 monedas que incluya monedas de 1 centavo, no puede ser múltiplo de 5 y el valor de cualquier combinación de 4 monedas que no contenga monedas de 1 centavo debe ser mayor o igual a 20 centavos. Por lo tanto, con 4 monedas no se puede obtener un valor total de 15 centavos. Además,

$$\begin{aligned}
25 &= 10+5+5+5,\\
35 &= 10+10+10+5,\\
45 &= 25+10+5+5,\\
55 &= 25+10+10+10.
\end{aligned}$$

Problema 3. ¿Cuál de los siguientes números es igual a $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+1}}$?

(a) $\frac{5}{4}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $\frac{5}{3}$ (d) 2 (e) 3

Solución. La respuesta es (c).
Simplificando la expresión obtenemos

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}.$$

Problema 4. Eric planea competir en un triatlón. Su velocidad promedio en la competencia de natación de $\frac{1}{4}$ de milla, es de 2 millas por hora y su velocidad promedio en la carrera de 3 millas es de 6 millas por hora. Si su meta es terminar el triatlón en 2 horas, ¿cuál debe ser su velocidad promedio (en millas por hora) en la carrera de bicicleta de 15 millas?

(a) $\frac{120}{11}$ (b) 11 (c) $\frac{56}{5}$ (d) $\frac{45}{4}$ (e) 12

Solución. La respuesta es (a).
Eric termina la competencia de natación en $\frac{\frac{1}{4}}{2}=\frac{1}{8}$ de hora. Completa la carrera en $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ de hora. Luego le quedan, $2-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=\frac{11}{8}$ de hora para realizar la carrera de bicicleta. Entonces, su velocidad promedio en bicicleta será de $\frac{15}{\frac{11}{8}}=\frac{120}{11}$ millas por hora.

Problema 5. ¿Cuál es la suma de los dígitos del cuadrado de $111,111,111$?

(a) 18 (b) 27 (c) 45 (d) 63 (e) 81

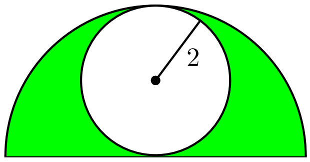
Solución. La respuesta es (e).
Tenemos que

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
 & & & & & & & \times & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
\hline
 & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
 & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & -\\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & - & - & - & -\\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1
\end{array}$$

es decir, $(111,111,111)^2=12,345,678,987,654,321$. Luego, la suma de los dígitos es

$$2(1+2+3+4+5+6+7+8)+9=2\left(\frac{8\times 9}{2}\right)+9=(8\times 9)+9=9\times 9=81.$$

Problema 6. Un círculo de radio 2 está inscrito en un semicírculo, como se muestra. El área del semicírculo que está afuera del círculo está sombreada. ¿Qué fracción del área del semicírculo está sombreada?



(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{2}{\pi}$ (d) $\frac{2}{3}$ (e) $\frac{3}{\pi}$

Solución. La respuesta es (a).
El área del semicírculo de radio 4 es $\frac{1}{2}\left(\pi \times 4^2\right) = 8\pi$ (ver el Teorema 14 del apéndice). El área del círculo es $\pi \times 2^2 = 4\pi$. Luego, $\frac{1}{2}$ del área del semicírculo está sombreada.

Problema 7. Una caja de leche contiene $2\,\%$ de grasa, cantidad que es $40\,\%$ menos grasa que la que contiene una caja de leche entera. ¿Cuál es el porcentaje de grasa en una caja de leche entera?

(a) $\frac{12}{5}$ (b) 3 (c) $\frac{10}{3}$ (d) 38 (e) 42

Solución. La respuesta es (c).
Supongamos que una caja de leche entera contiene $x\,\%$ de grasa. Entonces el $60\,\%$ de $x\,\%$ corresponde a 2, luego, $x = \frac{2}{0.6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$.

Problema 8. La familia Wen está formada por tres generaciones, y un día dos miembros de cada generación van al cine. Los dos miembros de la generación más joven reciben un $50\,\%$ de descuento como niños. Los dos miembros de la generación más vieja, reciben un $25\,\%$ de descuento como adultos mayores. Los dos miembros de la generación de en medio no reciben descuento. El abuelo Wen, cuyo boleto costó $\$6$, pagará la cuenta de todos los miembros. ¿Cuánto deberá pagar?

(a) $\$34$ (b) $\$36$ (c) $\$42$ (d) $\$46$ (e) $\$48$

Solución. La respuesta es (b).
Como el boleto del abuelo Wen tiene un $25\,\%$ de descuento, los 6 pesos que paga corresponden a las $\frac{3}{4}$ del total del boleto sin descuento, es decir, cada boleto cuesta $\frac{4}{3} \times 6 = 8$ pesos. Entonces, los boletos de los niños cuestan $\$4$ y en total pagó $2(4 + 6 + 8) = 2(18) = 36$ pesos.

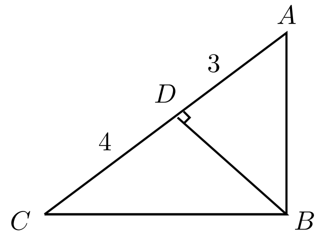
Problema 9. Los enteros positivos a, b y 2009, con $a < b < 2009$, forman una sucesión geométrica cuya razón es un número entero. ¿Cuál es el valor de a?

(a) 7 (b) 41 (c) 49 (d) 287 (e) 2009

Solución. La respuesta es (b).
Como a, b y 2009, con $a < b < 2009$, forman una sucesión geométrica de razón r, un

número entero, tenemos r tal que $ar^2 = 2009$ (ver la Definición 9 del apéndice). Pero $2009 = 41 \times 7^2$ y r tiene que ser un entero mayor que 1, luego $a = 41$ y $r = 7$.

Problema 10. Un triángulo ABC tiene ángulo recto en B. El punto D es el pie de la altura desde B. Si se sabe que $AD = 3$ y $DC = 4$, ¿cuál es el área del triángulo ABC?



(a) $4\sqrt{3}$ (b) $7\sqrt{3}$ (c) 21 (d) $14\sqrt{3}$ (e) 42

Solución. La respuesta es (b).
Los triángulos ABC, BDC y ADB son triángulos rectángulos, luego por el teorema de Pitágoras tenemos que, $AB^2 + BC^2 = 49$, $BC^2 = BD^2 + 16$ y $AB^2 = BD^2 + 9$ (ver el Teorema 25 del apéndice). Entonces

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 &= 49 \\ (BD^2 + 9) + (BD^2 + 16) &= 49 \\ 2BD^2 + 25 &= 49 \\ BD &= 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Luego, el área del triángulo ABC es $\frac{7\times 2\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$ (ver el Teorema 14 del apéndice).
Solución alternativa. Como los triángulos ADB y BDC son semejantes, tenemos que $\frac{BD}{3} = \frac{4}{BD}$, de donde $BD = 2\sqrt{3}$. Entonces el área del triángulo ABC es $\frac{7\times 2\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$.

Problema 11. Una dimensión de un cubo se incrementó en 1, otra se disminuyó en 1 y la tercera se quedó inalterada. Si el volumen del nuevo sólido rectangular es 5 unidades menor que el volumen del cubo, ¿cuál era el volumen del cubo?

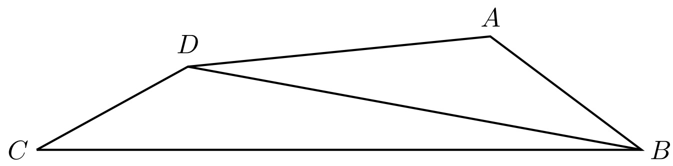
(a) 8 (b) 27 (c) 64 (d) 125 (e) 216

Solución. La respuesta es (d).
Denotemos por x a la medida del lado del cubo. Entonces, el volumen del cubo es x^3 y el volumen del nuevo sólido rectangular es $x(x+1)(x-1)$. Luego,

$$\begin{aligned} x(x+1)(x-1) &= x^3 - 5 \\ x^3 - x &= x^3 - 5 \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el volumen del cubo es $5^3 = 125$.

Problema 12. En el cuadrilátero $ABCD$ se tiene que $AB = 5$, $BC = 17$, $CD = 5$, $DA = 9$ y BD es un entero. ¿Cuál es el valor de BD?



(a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 14 (e) 15

Solución. La respuesta es (c).
Denotemos por x a la medida de BD. Por la desigualdad del triángulo en el triángulo BCD tenemos que $5 + x > 17$, luego $x > 12$ (ver el Teorema 31 del apéndice). Por la desigualdad del triángulo en el triángulo ABD tenemos que $5 + 9 > x$, es decir $x < 14$. Luego, $12 < x < 14$, pero x debe ser un entero, entonces $x = 13$.

Problema 13. Suponga que $P = 2^m$ y $Q = 3^n$. ¿Cuál de los siguientes resultados es igual a 12^{mn} para toda pareja de enteros (m, n)?

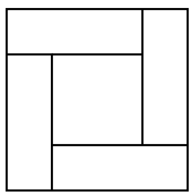
(a) P^2Q (b) P^nQ^m (c) P^nQ^{2m} (d) $P^{2m}Q^n$ (e) $P^{2n}Q^m$

Solución. La respuesta es (e).
Tenemos que,

$$12^{mn} = (2^2 \cdot 3)^{mn} = 2^{2mn} \cdot 3^{mn} = (2^m)^{2n} \cdot (3^n)^m = P^{2n}Q^m.$$

Además, podemos observar que la pareja de números $(m, n) = (2, 1)$ prueba que las otras opciones no son posibles.

Problema 14. Cuatro rectángulos congruentes están colocados como se muestra. El área del cuadrado exterior es 4 veces el área del cuadrado interior. ¿Cuál es la razón de la longitud del lado más largo de cada rectángulo entre la longitud de su lado más corto?

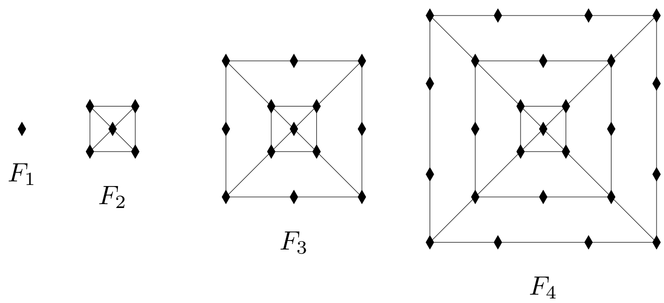


(a) 3 (b) $\sqrt{10}$ (c) $2 + \sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{3}$ (e) 4

Solución. La respuesta es (a).
Denotemos por x y y a las medidas de los lados corto y largo de cada rectángulo,

respectivamente. El lado del cuadrado grande mide $x + y$, y el lado del cuadrado pequeño es $y - x$. Como la razón entre la medida de sus lados es $\sqrt{4} = 2$, tenemos que $y + x = 2(y - x)$, de donde $y = 3x$. Por lo tanto, la razón de la longitud del lado más largo de cada rectángulo entre la longitud de su lado más corto es 3.

Problema 15. Las figuras F_1, F_2, F_3 y F_4 que se muestran, son las primeras en una secuencia de figuras. Para $n \geq 3$, F_n se construye a partir de F_{n-1} formando un cuadrado a su alrededor y colocando un diamante más en cada lado del nuevo cuadrado que el que tenía F_{n-1} en cada lado de su cuadrado exterior. Por ejemplo, la figura F_3 tiene 13 diamantes. ¿Cuántos diamantes hay en la figura F_{20}?



(a) 401 (b) 485 (c) 585 (d) 626 (e) 761

Solución. La respuesta es (e).
Observemos que el cuadrado exterior de F_n tiene 4 diamantes más en su frontera que el cuadrado exterior de F_{n-1}. Como el cuadrado exterior de F_2 tiene 4 diamantes, el cuadrado exterior de F_n tiene $4(n - 2) + 4 = 4(n - 1)$ diamantes. Luego, el número de diamantes en la figura F_n es igual al número de diamantes de la figura F_{n-1} más $4(n - 1)$, es decir, en F_n hay (ver el Teorema 10 del apéndice)

$$\begin{aligned} & 1 + 4 + 8 + 12 + \cdots + 4(n-2) + 4(n-1) \\ = \ & 1 + 4(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1)) \\ = \ & 1 + 4\left(\frac{(n-1)n}{2}\right) \\ = \ & 1 + 2(n-1)n \ \text{ diamantes.} \end{aligned}$$

Entonces, la figura F_{20} tiene $1 + 2(19)(20) = 761$ diamantes.

Problema 16. Sean a, b, c y d números reales tales que $|a - b| = 2$, $|b - c| = 3$ y $|c - d| = 4$. ¿Cuál es la suma de todos los valores posibles de $|a - d|$?

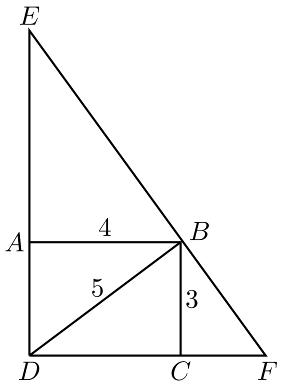
(a) 9 (b) 12 (c) 15 (d) 18 (e) 24

Solución. La respuesta es (d).
Como $|a-b|=2$, $|b-c|=3$ y $|c-d|=4$, entonces $b=a\pm 2$, $c=b\pm 3=a\pm 2\pm 3$, $d=c\pm 4=a\pm 2\pm 3\pm 4$ donde los signos se pueden combinar de todas las formas posibles. Así, los posibles valores para $|a-d|$ son: $2+3+4=9=|-2-3-4|$, $2+3-4=1=|-2-3+4|$, $2-3+4=3=|-2+3-4|$ y $-2+3+4=5=|2-3-4|$. Luego, la suma de todos los valores posibles de $|a-d|$ es $9+1+3+5=18$.

Problema 17. En un rectángulo $ABCD$ se tiene que $AB=4$ y $BC=3$. Se traza el segmento EF que pasa por B de forma que EF y DB sean perpendiculares, y A y C están sobre DE y DF, respectivamente. ¿Cuál es el valor de EF?

(a) 9 (b) 10 (c) $\frac{125}{12}$ (d) $\frac{103}{9}$ (e) 12

Solución. La respuesta es (c).
Observemos que $DB=5$ y que los triángulos EAB, BDC y BCF son todos semejantes (ver la Definición 20 del apéndice).



Entonces, $\frac{4}{EB}=\frac{3}{5}$, de donde $EB=\frac{20}{3}$. Análogamente $\frac{3}{BF}=\frac{4}{5}$, de donde $BF=\frac{15}{4}$. Luego,

$$EF=EB+BF=\frac{20}{3}+\frac{15}{4}=\frac{125}{12}.$$

Problema 18. En un campamento de verano, el $60\,\%$ de los niños juegan futbol, el $30\,\%$ de los niños practican la natación, y el $40\,\%$ de los que juegan futbol practican la natación. ¿Cuál de los siguientes porcentajes enteros es el que más se aproxima al porcentaje de niños que no practican la natación y juegan futbol?

(a) $30\,\%$ (b) $40\,\%$ (c) $49\,\%$ (d) $51\,\%$ (e) $70\,\%$

Solución. La respuesta es (d).
De cada 100 niños, 60 juegan futbol y 40 no. El $40\,\%$ de los 60 niños que juegan futbol, practican natación, es decir, $60\times\frac{40}{100}=24$ niños son también nadadores. Luego, $60-24=36$ niños no practican natación y juegan futbol.

Por otra parte, de cada 100 niños, 30 son nadadores y 70 no. Entonces, la fracción de niños que no practican natación y juegan futbol es $\frac{36}{70} \approx 0.51$, es decir, aproximadamente el $51\,\%$ de los niños no practican la natación y juegan futbol.

Problema 19. Una circunferencia A tiene radio de longitud 100. Una circunferencia B tiene radio de longitud entera $r < 100$ y permanece internamente tangente a la circunferencia A mientras rueda a lo largo de ella misma. Si las dos circunferencias tienen el mismo punto de tangencia al principio y al final del recorrido de B, ¿cuántos valores posibles puede tener r?

(a) 4 (b) 8 (c) 9 (d) 50 (e) 90

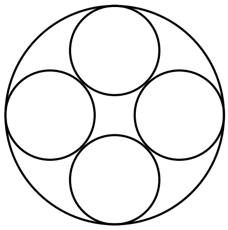
Solución. La respuesta es (b).
Los perímetros de las circunferencias A y B miden 200π y $2\pi r$, respectivamente. Después de que la circunferencia B empieza a rodar, el punto inicial de tangencia con la circunferencia A, toca de nuevo a la circunferencia A un total de $\frac{200\pi}{2\pi r} = \frac{100}{r}$ veces. Luego, r debe ser un divisor de 100, es decir, $r = 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25$ ó 50. Por lo tanto, en total r puede tener 8 valores.

Problema 20. Andrea y Laura están a 20 kilómetros de distancia. Ambas manejan una bicicleta, cada una con dirección hacia la otra. Andrea conduce tres veces más rápido que Laura, y la distancia entre ellas disminuye a una velocidad de $1km/min$. Después de 5 minutos, Andrea deja de manejar su bicicleta debido a una llanta desinflada, y espera a Laura. ¿Después de cuántos minutos, contados desde el inicio, llega Laura a donde está Andrea?

(a) 20 (b) 30 (c) 55 (d) 65 (e) 80

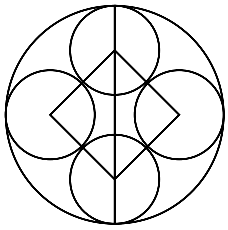
Solución. La respuesta es (d).
Sea r la velocidad a la que pedalea Laura, en kilómetros por minuto. Entonces $r+3r = 1$, luego $r = \frac{1}{4}$. En los primeros 5 minutos, la distancia entre Andrea y Laura decrece por $5 \cdot 1 = 5$ kilómetros, dejando que Laura recorra los últimos 15 kilómetros entre ellas. Para ello se requieren de $\frac{15}{\frac{1}{4}} = 60$ minutos, luego después de $5+60 = 65$ minutos Laura alcanza a Andrea.

Problema 21. Muchas de las catedrales góticas tienen ventanas con partes que contienen figuras formadas de círculos congruentes que están inscritos a un círculo más grande. En la figura que se muestra el número de círculos pequeños es 4. ¿Cuál es la razón de la suma de las áreas de los cuatro círculos pequeños con respecto al área del círculo mayor?



(a) $3-2\sqrt{2}$ (b) $2-\sqrt{2}$ (c) $4(3-2\sqrt{2})$ (d) $\frac{1}{2}(3-\sqrt{2})$ (e) $2\sqrt{2}-2$

Solución. La respuesta es (c).
Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el radio de los círculos pequeños mide 1. Los centros de estos círculos forman un cuadrado de lado 2, cuya diagonal mide $2\sqrt{2}$ (ver el Teorema 25 del apéndice).



Entonces el diámetro del círculo grande es $2+2\sqrt{2}$ y su área es $(1+\sqrt{2})^2\pi = (3+2\sqrt{2})\pi$ (ver el Teorema 14 del apéndice). Por lo tanto, la razón de la suma de las áreas de los cuatro círculos pequeños con respecto al área del círculo mayor es $\frac{4\pi}{(3+2\sqrt{2})\pi} = 4(3-2\sqrt{2})$.

Problema 22. Dos dados cúbicos tienen, cada uno, números del 1 al 6 que se pueden extraer. Los doce números de los dos dados se retiran y se colocan en una bolsa. Luego, se van a extraer de la bolsa de uno en uno de manera aleatoria para colocarse nuevamente en las caras de los cubos, un número en cada cara. Los dados se lanzan y se suman los números de las caras hacia arriba. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 7?

(a) $\frac{1}{9}$ (b) $\frac{1}{8}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{2}{11}$ (e) $\frac{1}{5}$

Solución. La respuesta es (d).
Supongamos que los dos dados tienen los números $1, 2, 3, 4, 5, 6$ y $1', 2', 3', 4', 5', 6'$, respectivamente. El proceso de extraer aleatoriamente de la bolsa los números de uno en uno para colocarlos nuevamente en las caras de los cubos, lanzarlos y sumar los números de las caras que esten hacia arriba, es equivalente a escoger aleatoriamente 2 números cualesquiera de los 12 que existen y sumarlos. Hay $\binom{12}{2} = 66$ conjuntos de

dos elementos tomados de

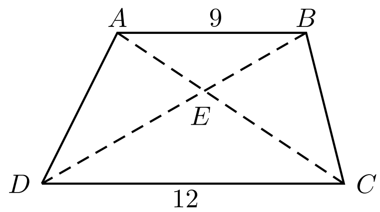
$$S = \{1, 1', 2, 2', 3, 3', 4, 4', 5, 5', 6, 6'\}.$$

Hay cuatro maneras de utilizar al 1 y al 6 para obtener 7: $\{1, 6\}, \{1', 6\}, \{1, 6'\}$ y $\{1', 6'\}$. Análogamente hay 4 maneras de obtener 7 sumando al 2 y al 5, y 4 maneras utilizando al 3 y al 4. Luego, hay 12 parejas de S cuya suma es 7. Por lo tanto, la probabilidad es $\frac{12}{66} = \frac{2}{11}$.

Problema 23. En un cuadrilátero convexo $ABCD$ se tiene que $AB = 9$ y $CD = 12$. Las diagonales AC y BD se intersectan en E, $AC = 14$ y los triángulos AED y BEC tienen la misma área. ¿Cuál es el valor de AE?

(a) $\frac{9}{2}$ (b) $\frac{50}{11}$ (c) $\frac{21}{4}$ (d) $\frac{17}{3}$ (e) 6

Solución. La respuesta es (e).
Como los triángulos AED y BEC tienen la misma área, entonces los triángulos ACD y BCD también. El lado CD es común a los triángulos ACD y BCD, entonces las alturas desde A y B sobre CD tienen la misma longitud.



Así, AB es paralela a CD, luego el triángulo ABE es semejante al triángulo CDE (ver la Definición 20 del apéndice). Entonces

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{CD} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

Si $AE = 3x$ y $EC = 4x$, entonces $7x = AE + EC = AC = 14$. Luego $x = 2$, de donde $AE = 3x = 6$.

Problema 24. Tres vértices distintos de un cubo se eligen al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el plano determinado por estos tres vértices contenga puntos en el interior del cubo?

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) $\frac{4}{7}$ (d) $\frac{5}{7}$ (e) $\frac{3}{4}$

Solución. La respuesta es (c).
Un plano que intersecta al menos a tres vértices de un cubo, corta al cubo o está en el mismo plano (coplanar) que una cara del cubo. Entonces el plano determinado por los tres vértices elegidos aleatoriamente no contienen puntos del interior del cubo, si y sólo

si los tres vértices provienen de la misma cara del cubo. Hay 6 caras del cubo, luego el número de maneras de elegir tres vértices en la misma cara es $6 \times \binom{4}{3} = 24$ (ver la Definición 5 del apéndice). Por otra parte, el total de maneras de elegir cualesquiera 3 vértices es $\binom{8}{3} = 56$. Por lo tanto, la probabilidad es $1 - \frac{24}{56} = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$.

Problema 25. Para $k > 0$, sea $I_k = 10\ldots064$, donde hay k ceros entre el 1 y el 6. Sea $N(k)$ el número de factores 2 en la factorización en primos de I_k. ¿Cuál es el máximo valor de $N(k)$?

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9 (e) 10

Solución. La respuesta es (b).
Observemos que $I_k = 10^{k+2}+2^6 = 2^{k+2}(5^{k+2})+2^6$. Para $k < 4$ el primer término no es divisible entre 2^6, de modo que $N(k) < 6$. Para $k > 4$, el primer término es divisible entre 2^7, pero el segundo término no, entonces $N(k) < 7$. Para $k = 4$, $I_4 = 2^6(5^6+1)$, y como el segundo factor es par, $N(4) \geq 7$. De hecho el segundo factor es una suma de cubos, es decir, $5^6+1 = (5^2)^3+1^3 = (5^2+1)((5^2)^2-5^2+1)$. El factor $5^2+1 = 26$ es divisible entre 2 pero no entre 4, y el segundo factor es impar, luego $5^6 + 1$ contribuye con un factor 2 más. Por lo tanto, el valor máximo de $N(k)$ es 7.

60^{th} **AMC** 12

Problema 1. El vuelo de Kim despegó de Newark a las $10 : 34$ a.m. y aterrizó en Miami a la $1 : 18$ p.m. Las dos ciudades se encuentran en el mismo huso horario. Si el vuelo duró h horas con m minutos, con $0 \leq m < 60$, ¿cuál es el valor de $h + m$?

(a) 46 (b) 47 (c) 50 (d) 53 (e) 54

Solución. La respuesta es (a).
Hay $60 - 34 = 26$ minutos de las $10 : 34$ a.m. a las $11 : 00$ a.m. y hay 2 horas con 18 minutos de las $11 : 00$ a.m. a las $1 : 18$ p.m. Luego, el vuelo tarda 2 horas con $26 + 18 = 44$ minutos. Por lo tanto, $h + m = 2 + 44 = 46$.

Problema 2. ¿Cuál de los siguientes números es igual a $1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{1+1}}$?

(a) $\frac{5}{4}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $\frac{5}{3}$ (d) 2 (e) 3

Solución. La respuesta es (c).
Véase la solución del problema 3 del AMC 10.

Problema 3. ¿Cuál de los siguientes números está a un tercio de la distancia entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$?

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{5}{12}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{7}{12}$ (e) $\frac{2}{3}$

Solución. La respuesta es (b).
El número es:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}.$$

Problema 4. Cuatro monedas se sacaron de una alcancía que contiene monedas de 1, 5, 10 y 25 centavos. ¿Cuál de los siguientes resultados no puede ser el valor total de las cuatro monedas?

(a) 15 (b) 25 (c) 35 (d) 45 (e) 55

Solución. La respuesta es (a).
Véase la solución del problema 2 del AMC 10.

Problema 5. Una dimensión de un cubo se incrementó en 1, otra se disminuyó en 1 y la tercera se quedó inalterada. Si el volumen del nuevo sólido rectangular es 5 unidades menor que el volumen del cubo, ¿cuál era el volumen del cubo?

(a) 8 (b) 27 (c) 64 (d) 125 (e) 216

Solución. La respuesta es (d).
Véase la solución del problema 11 del AMC 10.

Problema 6. Suponga que $P=2^m$ y $Q=3^n$. ¿Cuál de los siguientes resultados es igual a 12^{mn} para toda pareja de enteros (m,n)?

(a) P^2Q (b) P^nQ^m (c) P^nQ^{2m} (d) $P^{2m}Q^n$ (e) $P^{2n}Q^m$

Solución. La respuesta es (e).
Véase la solución del problema 13 del AMC 10.

Problema 7. Los primeros tres términos de una sucesión aritmética son $2x-3$, $5x-11$ y $3x+1$, en ese orden. Si el n-ésimo término de la sucesión es 2009, ¿cuál es el valor de n?

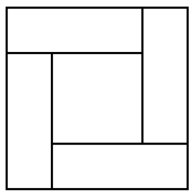
(a) 255 (b) 502 (c) 1004 (d) 1506 (e) 8037

Solución. La respuesta es (b).
Como la diferencia entre dos términos consecutivos es constante (ver la Definición 12 del apéndice), tenemos que,

$$\begin{aligned}(5x-11)-(2x-3) &= (3x+1)-(5x-11)\\ 3x-8 &= -2x+12\\ x &= 4.\end{aligned}$$

Entonces, los primeros tres términos de la sucesión son: 5, 9 y 13 y la diferencia entre términos consecutivos es 4. Luego, el n-ésimo término es $5 + 4(n - 1) = 2009$, de donde $n = 502$.

Problema 8. Cuatro rectángulos congruentes están colocados como se muestra. El área del cuadrado exterior es 4 veces el área del cuadrado interior. ¿Cuál es la razón de la longitud del lado más largo de cada rectángulo entre la longitud de su lado más corto?



(a) 3 (b) $\sqrt{10}$ (c) $2+\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{3}$ (e) 4

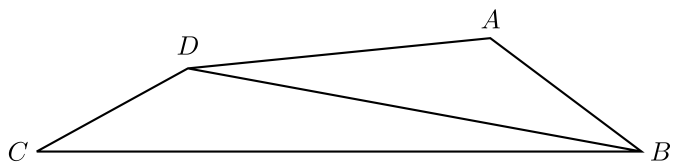
Solución. La respuesta es (a).
Véase la solución del problema 14 del AMC 10.

Problema 9. Si $f(x+3) = 3x^2+7x+4$ y $f(x) = ax^2+bx+c$, ¿cuánto vale $a+b+c$?

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 2 (e) 3

Solución. La respuesta es (d).
Observemos que $f(1) = a+b+c$ y que $f(1) = f(-2+3) = 3(-2)^2+7(-2)+4 = 2$. Por lo tanto, $a + b + c = 2$.

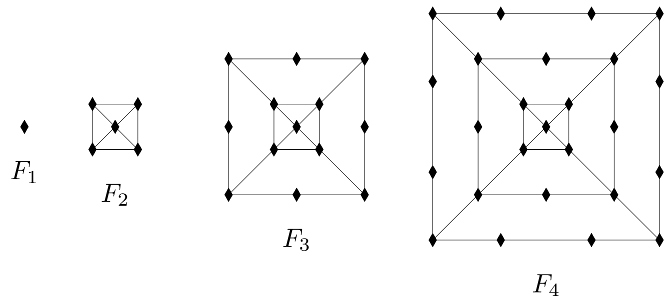
Problema 10. En el cuadrilátero $ABCD$ se tiene que $AB = 5$, $BC = 17$, $CD = 5$, $DA = 9$ y BD es un entero. ¿Cuál es el valor de BD?



(a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 14 (e) 15

Solución. La respuesta es (c).
Véase la solución del problema 12 del AMC 10.

Problema 11. Las figuras F_1, F_2, F_3 y F_4 que se muestran, son las primeras en una secuencia de figuras. Para $n \geq 3$, F_n se construye a partir de F_{n-1} formando un cuadrado a su alrededor y colocando un diamante más en cada lado del nuevo cuadrado que el que tenía F_{n-1} en cada lado de su cuadrado exterior. Por ejemplo, la figura F_3 tiene 13 diamantes. ¿Cuántos diamantes hay en la figura F_{20}?



(a) 401 (b) 485 (c) 585 (d) 626 (e) 761

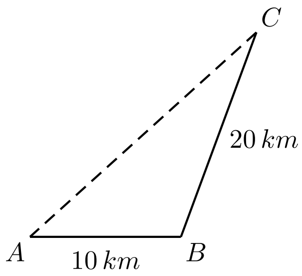
Solución. La respuesta es (e).
Véase la solución del problema 15 del AMC 10.

Problema 12. ¿Cuántos enteros positivos menores que 1000 son iguales a 6 veces la suma de sus dígitos?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4 (e) 12

Solución. La respuesta es (b).
Veamos que el único número es el 54. Un número de un solo dígito tendría que satisfacer que $6u = u$, es decir, $u = 0$ lo cual es imposible. Sea tu un número de dos dígitos. Luego, $10t+u = 6(t+u)$, de donde $4t = 5u$, luego necesariamente $t = 5$ y $u = 4$ y el número es el 54. Sea htu un número de tres dígitos, luego $100h+10t+u = 6(h+t+u)$, es decir, $94h + 4t = 5u$. Sin embargo, $94h + 4t \geq 94$ y $5u \leq 45$, por lo que no existe ningún número de tres dígitos.

Problema 13. Un barco navega $10\,km$ en línea recta de A a B, luego gira un ángulo entre $45°$ y $60°$, y navega otros $20\,km$ hasta C. Si medimos AC en kilómetros, ¿cuál de los siguientes intervalos contiene a AC^2?



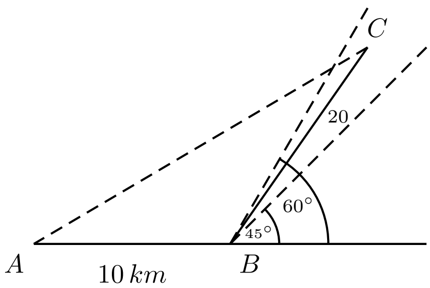
(a) $[400, 500]$ (b) $[500, 600]$ (c) $[600, 700]$ (d) $[700, 800]$ (e) $[800, 900]$

Solución. La respuesta es (d).
Por la ley de cosenos tenemos que (ver el Teorema 32 del apéndice):

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 500 - 400 \cos \angle ABC.$$

Como $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos \angle ABC < \cos 120° = -\frac{1}{2}$, tenemos que

$$700 = 500 + 200 \leq AC^2 \leq 500 + 200\sqrt{2} < 800.$$



Problema 14. En el plano, un triángulo tiene vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(6m, 0)$, y la recta $y = mx$ divide al triángulo en dos triángulos de la misma área. ¿Cuál es la suma de todos los valores posibles de m?

(a) $-\frac{1}{3}$ (b) $-\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{1}{2}$

Solución. La respuesta es (b).
Observemos que la recta $y = mx$ debe contener al punto medio del la recta que une a los puntos $(1, 1)$ y $(6m, 0)$, que es $\left(\frac{6m+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Como $m = \frac{y}{x}$, tenemos que

$$\begin{aligned} m &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{6m+1}{2}} \\ m &= \frac{1}{6m+1} \\ 6m^2 + m - 1 &= 0 \\ (3m-1)(2m+1) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces, $m = -\frac{1}{2}$ ó $m = \frac{1}{3}$, y su suma es $-\frac{1}{6}$.
Si $m = -\frac{1}{2}$, el triángulo con vértices $(0, 0), (1, 1)$ y $(-3, 0)$ es bisectado por la recta que pasa por el origen y el punto $(-1, \frac{1}{2})$. Análogamente, cuando $m = \frac{1}{3}$ el triángulo con vértices en $(0, 0), (1, 1)$ y $(2, 0)$ es bisectado por la recta que pasa por el origen y el punto $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

Problema 15. Si $i = \sqrt{-1}$, ¿para que valor de n se cumple que

$$i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + ni^n = 48 + 49i?$$

(a) 24 (b) 48 (c) 49 (d) 97 (e) 98

Solución. La respuesta es (d).
Tenemos que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ y $i^4 = 1$. Sea k múltiplo de 4. Si $k \geq 0$, entonces:

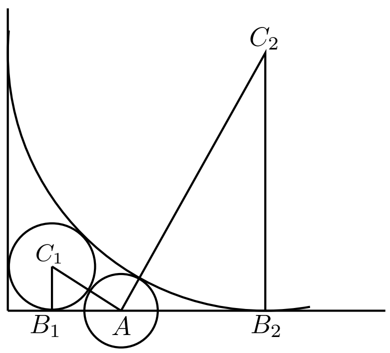
$$\begin{aligned} & (k+1)i^{k+1} + (k+2)i^{k+2} + (k+3)i^{k+3} + (k+4)i^{k+4} \\ = \quad & (k+1)i + (k+2)(-1) + (k+3)(-i) + (k+4) \\ = \quad & 2 - 2i. \end{aligned}$$

Si $n = 4 \times 24 = 96$, entonces $i + 2i^2 + \cdots + ni^n = 24(2-2i) = 48 - 48i$. Sumando el término $97i^{97} = 97i$, tenemos que $(48 - 48i) + 97i = 48 + 49i$. Por lo tanto, $n = 97$.

Problema 16. Un círculo con centro en C es tangente a los ejes positivos del plano cartesiano, y es tangente externamente al círculo centrado en $(3, 0)$ de radio 1. ¿Cuál es la suma de las longitudes de todos los radios posibles del círculo centrado en C?

(a) 3 (b) 4 (c) 6 (d) 8 (e) 9

Solución. La respuesta es (d).
Denotemos por r al radio del círculo con centro C, $A = (3, 0)$ y $B = (r, 0)$ (en la figura el punto B es el punto B_1 ó B_2, dependiendo de la posición del punto C que puede ser C_1 ó C_2). Entonces, $AC = 1 + r$ y $CB = r$. Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC, tenemos que $AB^2 = (1 + r)^2 - r^2 = 1 + 2r$.
Ahora bien, como $AB = |3 - r|$, entonces $1 + 2r = (3 - r)^2$, luego $r^2 - 8r + 8 = 0$, de donde $r = 4 \pm 2\sqrt{2}$ (ver el Teorema 13 del apéndice). Ambos valores de r son positivos, y su suma es 8.



Problema 17. Sean $a + ar_1 + ar_1^2 + ar_1^3 + \cdots$ y $a + ar_2 + ar_2^2 + ar_2^3 + \cdots$ dos series geométricas infinitas distintas de números positivos con el mismo primer término. Si la primera serie tiene suma r_1 y la segunda serie tiene suma r_2, ¿cuál de los siguientes valores puede ser igual a $r_1 + r_2$?

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (e) 2

Solución. La respuesta es (c).
La suma de la primera serie es $\frac{a}{1-r_1} = r_1$ (ver la Defınción 9 del apéndice). Luego, $r_1^2 - r_1 + a = 0$, de donde $r_1 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-4a})$. Análogamente, $r_2 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-4a})$. Como las series geométricas son distintas, tenemos que r_1 y r_2 son distintos. Luego, $r_1 + r_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4a}) + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4a}) = 1$. Estas series existen cuando $0 < a < \frac{1}{4}$.

Problema 18. Para $k > 0$, sea $I_k = 10 \ldots 064$, donde hay k ceros entre el 1 y el 6. Sea $N(k)$ el número de factores 2 en la factorización en primos de I_k. ¿Cuál es el máximo valor de $N(k)$?

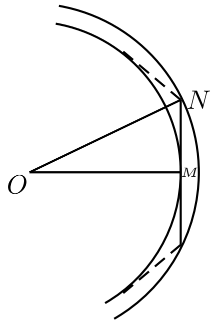
(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9 (e) 10

Solución. La respuesta es (b).
Véase la solución del problema 25 del AMC 10.

Problema 19. Andrea dibujó un círculo inscrito y un círculo circunscrito a un pentágono regular, y calculó el área de la región comprendida entres los dos círculos. Begoña hizo lo mismo con un heptágono regular. Las áreas de las dos regiones fueron A y B, respectivamente. Si los lados de cada polígono miden 2, ¿cuál de las siguientes expresiones es válida?

(a) $A = \frac{25}{49}B$ (b) $A = \frac{5}{7}B$ (c) $A = B$ (d) $A = \frac{7}{5}B$ (e) $A = \frac{49}{25}B$

Solución. La respuesta es (c).
Consideremos un n-ágono regular cuyo lado mida 2. Denotemos por r y R a los radios del círculo inscrito y circunscrito, respectivamente. Sean O el centro común de los círculos, M el punto medio de un lado del polígono y N uno de los extremos de ese lado.



Luego, el triángulo OMN tiene un ángulo recto, $MN = 1$, $OM = r$ y $ON = R$. Entonces por el teorema de Pitágoras tenemos que, $R^2 - r^2 = 1$ (ver el Teorema 25 del apéndice). Luego, el área del anillo entre los dos círculos es $\pi(R^2 - r^2) = \pi$ para toda $n \geq 3$. Por lo tanto, $A = B$.

Problema 20. En un cuadrilátero convexo $ABCD$ se tiene que $AB = 9$ y $CD = 12$. Las diagonales AC y BD se intersectan en E, $AC = 14$ y los triángulos AED y BEC tienen la misma área. ¿Cuál es el valor de AE?

(a) $\frac{9}{2}$ (b) $\frac{50}{11}$ (c) $\frac{21}{4}$ (d) $\frac{17}{3}$ (e) 6

Solución. La respuesta es (e).
Véase la solución del problema 23 del AMC 10.

Problema 21. Sea $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, con a, b, c números complejos. Si

$$p(2009 + 9002\pi i) = p(2009) = p(9002) = 0,$$

¿cuántas raíces no reales tiene el polinomio $x^{12} + ax^8 + bx^4 + c$?

(a) 4 (b) 6 (c) 8 (d) 10 (e) 12

Solución. La respuesta es (c).
Como $x^{12} + ax^8 + bx^4 + c = p(x^4)$, entonces el valor de este polinomio es 0 si y sólo si

$$x^4 = 2009 + 9002\pi i \quad \text{ó} \quad x^4 = 2009 \quad \text{ó} \quad x^4 = 9002.$$

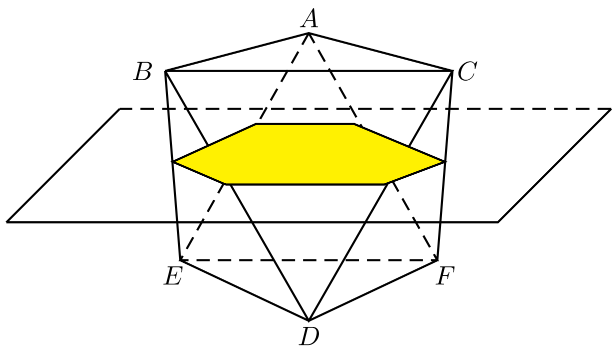
La primera de estas tres ecuaciones tiene cuatro soluciones no reales distintas. La segunda y tercera ecuación tienen dos soluciones no reales distintas. Por lo tanto, $p(x^4) = x^{12} + ax^8 + bx^4 + c$ tiene en total 8 raíces no reales.

Problema 22. Un octaedro regular tiene lado 1. Un plano paralelo a dos caras opuestas corta al octaedro en dos sólidos congruentes. El polígono formado por la intersección del plano con el octaedro tiene área $\frac{a\sqrt{b}}{c}$ con a, b y c números enteros positivos, tales que a y c son primos relativos y b no es divisible por el cuadrado de ningún primo.

¿Cuánto vale $a+b+c$?

(a) 10 (b) 11 (c) 12 (d) 13 (e) 14

Solución. La respuesta es (e).
Denotemos por ABC y DEF a las dos caras del octaedro paralelas al plano de corte.



El plano pasa a través de los puntos medios de las 6 aristas del octaedro que no son lados de los triángulos ABC y DEF. Luego, la intersección del plano y el octaedro es un hexágono equilátero cuyo lado mide $\frac{1}{2}$. Entonces por simetria el hexágono es también equiangular y por lo tanto regular. El área del hexágono es 6 veces el área de uno de los triángulos equiláteros de lado $\frac{1}{2}$ que lo forman, es decir, el área es $6\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{a\sqrt{b}}{c}$. Por lo tanto, $a+b+c = 3+3+8 = 14$.

Problema 23. Las funciones f y g son cuadráticas con $g(x) = -f(100-x)$, donde la gráfica de g contiene al vértice de la gráfica de f. Las cuatro intersecciones de las gráficas con el eje de las x tienen coordenada x igual a x_1, x_2, x_3 y x_4, en orden creciente con $x_3 - x_2 = 150$. Se sabe que el valor de $x_4 - x_1$ es $m + n\sqrt{p}$, donde m, n y p son enteros positivos, y p no es divisible por el cuadrado de ningún primo. ¿Cuál es el valor de $m+n+p$?

(a) 602 (b) 652 (c) 702 (d) 752 (e) 802

Solución. La respuesta es (d).
Denotemos por (h,k) al vértice de la gráfica f. Como la gráfica f intersecta dos veces al eje de las x, entonces podemos suponer que $f(x) = a(x-h)^2 + k$, con $\frac{-k}{a} > 0$. Sea $s = \sqrt{\frac{-k}{a}}$, luego las intersecciones con el eje x de la gráfica de f son $h \pm s$. Como $g(x) = -f(100-x) = -a(100-x-h)^2 - k$, tenemos que las intersecciones de la gráfica g con el eje x son $100 - h \pm s$.
La gráfica de g contiene a (h,k), entonces,

$$k = f(h) = g(h) = -a(100-2h)^2 - k,$$

de donde, $h = 50 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}s$ (ver el Teorema 13 del apéndice). Considerando el signo de

h, tenemos que las intersecciones con el eje de las x son:

$$50-s\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 50-s\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 50+s\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 50+s\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Como $x_3 - x_2 = 150$, tenemos que $150 = s(2-\sqrt{2})$, es decir, $s = 150\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Luego, $x_4 - x_1 = s(2+\sqrt{2}) = 450+300\sqrt{2}$. Por lo tanto, $m+n+p = 450+300+2 = 752$.

Problema 24. La *función torre de doses* se define recursivamente de la siguiente forma: $T(1) = 2$ y $T(n+1) = 2^{T(n)}$, para $n \geq 1$. Sea $A = (T(2009))^{T(2009)}$ y $B = (T(2009))^A$. ¿Cuál es el mayor entero k para el cual

$$\underbrace{\log_2 \log_2 \cdots \log_2}_{k-veces} B$$

está definido?

(a) 2009 (b) 2010 (c) 2011 (d) 2012 (e) 2013

Solución. La respuesta es (e).
Definamos la función *logarítmica k-iterada* como sigue:

$$\log_2^1 x = \log_2 x \quad \text{y} \quad \log_2^{k+1} x = \log_2(\log_2^k x), \quad \text{para} \quad k \geq 1.$$

Como $\log_2 T(n+1) = T(n)$ para $n \geq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \log_2 A &= T(2009)\log_2 T(2009) = T(2009)T(2008), \\ \log_2 B &= A\log_2 T(2009) = A \cdot T(2008). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\log_2^2 B = \log_2 A + \log_2 T(2008) = T(2009)T(2008) + T(2007).$$

Luego,

$$\log_2^3 B > \log_2(T(2009)T(2008)) > \log_2 T(2009) = T(2008),$$

y recursivamente para $k \geq 1$,

$$\log_2^{k+3} B > T(2008-k).$$

En particular, $\log_2^{2010} B > T(1) = 2$, y por lo tanto $\log_2^{2012} B > 0$. Entonces $\log_2^{2013} B$ está definido.
Por otra parte, como $T(2007) < T(2008)T(2009)$ y $1+T(2007) < T(2008)$, tenemos que,

$$\log_2^3 B < \log_2(2T(2008)T(2009)) = 1 + T(2007) + T(2008) < 2T(2008) \quad \text{y}$$

$$\log_2^4 B < \log_2(2T(2008)) = 1 + T(2007) < T(2008).$$

Aplicando $\log_2$ recursivamente para $k \geq 1$ obtenemos,

$$\log_2^{4+k} B < T(2008 - k).$$

En particular $\log_2^{2011} B < T(1) = 2$, luego $\log_2^{2013} B < 0$. Entonces $\log_2^{2014} B$ no está definida.

Problema 25. Los primeros dos términos de una sucesión son $a_1 = 1$ y $a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Para $n \geq 1$ tenemos que

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{1 - a_n a_{n+1}}.$$

¿Cuánto vale $|a_{2009}|$?

(a) 0 (b) $2 - \sqrt{3}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) 1 (e) $2 + \sqrt{3}$

Solución. La respuesta es (a).
Observemos la similaridad entre la fórmula de recursión dada y la identidad trigonométrica:

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

Además, observemos que los primeros dos términos de la sucesión son tangentes de ángulos conocidos: $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{6}$. Sean $c_1 = 3$, $c_2 = 2$ y $c_{n+2} = (c_n + c_{n+1}) \pmod{12}$. Veamos que la sucesión $\{a_n\}$ satisface que $a_n = \tan\left(\frac{\pi c_n}{12}\right)$. Tenemos que,

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi c_1}{12}\right) \quad \text{y} \\ a_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi c_2}{12}\right). \end{aligned}$$

Por inducción sobre n, la fórmula de la tangente de la suma de dos ángulos y el hecho de que el periodo de $\tan x$ es π, tenemos que

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{a_n + a_{n+1}}{1 - a_n a_{n+1}} = \frac{\tan\left(\frac{\pi c_n}{12}\right) + \tan\left(\frac{\pi c_{n+1}}{12}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi c_n}{12}\right)\tan\left(\frac{\pi c_{n+1}}{12}\right)} \\ &= \tan\left(\frac{\pi(c_n + c_{n+1})}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi c_{n+2}}{12}\right). \end{aligned}$$

Los primeros términos de la sucesión $\{c_n\}$ son:

$$3, 2, 5, 7, 0, 7, 7, 2, 9, 11, 8, 7, 3, 10, 1, 11, 0, 11, 11, 10, 9, 7, 4, 11, 3, 2.$$

Entonces, la sucesión $\{c_n\}$ es periódica con periodo 24. Como $2009 = 24(83) + 17$, tenemos que $c_{2009} = c_{17} = 0$. Por lo tanto, $|a_{2009}| = |\tan\left(\frac{\pi c_{17}}{12}\right)| = 0$.

El Quehacer de un Matemático

Por Gilberto Calvillo Vives

El Comité Editorial de esta revista me ha pedido que escriba sobre lo que hace un matemático y en particular de mi experiencia. Esta es una tarea difícil porque depende de lo que se entienda por un matemático. Para alguien que se dedica a la investigación, la respuesta puede ser muy sencilla: un matemático es aquel que se dedica al desarrollo de las matemáticas encontrando nuevas teorías, planteando nuevos problemas y demostrando teoremas. Sin embargo, en este ensayo quiero considerar al matemático en una perspectiva más amplia y para tal propósito consideraremos como matemático a todo aquel que estudia una carrera de matemáticas, incluyendo desde luego aquellas que tienen el nombre de matemáticas aplicadas. El propósito de esta definición es tratar de proporcionar información a aquellos muchachos que les gustan las matemáticas, pero no saben a donde los conduciría la decisión de cursar una carrera de matemáticas. Antes de proseguir debo decir que hay otras carreras en las que las matemáticas juegan un papel importante, en particular actuaría y diferentes tipos de ingeniería. Sin embargo, para mantener la coherencia de este ensayo solo me referiré como matemáticos a los que hayan egresado de una carrera de matemáticas.

En mi opinión hay cinco áreas naturales en las que se desempeñan los matemáticos: (1) en la investigación, ya sea pura o aplicada; (2) en la enseñanza a diferentes niveles, generalmente desde bachillerato hasta doctorado, aunque en algunos países el nivel de secundaria también es cubierto por matemáticos; (3) en aplicaciones de las matemáticas, es decir en la modelación matemática de diferente índole y el uso de técnicas de matemáticas aplicadas; (4) en computación, sea esta en el ámbito científico o en el empresarial; (5) en la gestión de proyectos o aún de empresas ya sean estas científicas o no. Desde luego, un matemático puede dedicarse a varias de estas actividades a lo largo de su vida profesional o bien ejercerlas de manera simultánea.

En lo que sigue trataré de describir brevemente cada una de estas áreas y luego describiré, también brevemente, mi experiencia personal en cada una de ellas.

Investigación

En el mundo actual, la persona que desee dedicarse a la investigación debe estudiar un doctorado. Es decir, no basta con ser matemático en el sentido de este ensayo. Después de terminar su licenciatura tiene que seguir estudiando por varios años más. Esto no ha sido siempre así. Tenemos casos de investigadores que no obtuvieron su grado de doctor y que hicieron un espléndido trabajo de investigación. Sin embargo, cada vez es más difícil que alguien haga una carrera de investigador sin que tenga que hacer estudios de posgrado. La investigación es un trabajo muy gratificante, pero también puede ser muy frustrante. La actividad consiste esencialmente en establecer nuevas teorías matemáticas y desarrollarlas. La mayor parte de los investigadores se dedican a impulsar el desarrollo de una teoría ya establecida, algunos pocos son los afortunados en ser la punta de lanza en teorías nuevas y relevantes. Un investigador puede inventar una nueva teoría que luego muere de inanición porque no era realmente relevante o porque no fue del interés del gremio matemático. Hay en la historia de las matemáticas algunos nombres que son conocidos por todo el mundo por haber hecho un avance espectacular en el pensamiento matemático. Quizá los más conocidos sean los de Isaac Newton y Gottfried Leibniz por haber inventado el Cálculo Diferencial Integral. No menos famoso es el descubrimiento por Descartes de la Geometría Analítica. En épocas más modernas un ejemplo interesante es el descubrimiento de los fractales por Benoît Mandelbrot. Menos conocidos pero igualmente importantes pueden considerarse el desarrollo del Cálculo de Variaciones por los hermanos Bernoulli o en tiempos modernos la invención de la teoría de juegos por John Von Neumann y la Programación Lineal por George Dantzig. Desde luego no se puede dejar de mencionar el nombre de Henri Poincaré como inventor de la Topología.

Uno de los rasgos no muy agradables de la investigación es que la competencia es peor que en los deportes. En el deporte se premia a los tres primeros lugares. En matemáticas solo al primer lugar. Quien haya hecho primero la demostración de un teorema ese se lleva el mérito, aún cuando haya usado las ideas que por muchos años hayan desarrollado otros.

En la actualidad es cada vez más raro que surja una nueva teoría. Lo más común es que los matemáticos se dediquen a demostrar problemas que van surgiendo de las teorías ya establecidas. Sin embargo, siempre hay algo nuevo. Eso es quizá lo más gratificante de esta actividad: es como estar siempre a las puertas de una nueva aventura. En tiempos relativamente recientes se han resuelto algunos problemas que fueron planteados hace mucho tiempo. Tres ejemplos bien conocidos son el Teorema de los Cuatro Colores, el último teorema de Fermat y la Conjetura de Poincaré. Este último problema es parte de un grupo de 7 problemas por cuya solución el Instituto Clay de Matemáticas ofrece un millón de dólares por cada uno. Esos son los llamados problemas del milenio.

En México hay un grupo fuerte de investigación en varias áreas de matemáticas, desafortunadamente el crecimiento de la investigación se ha visto constreñido por la falta de plazas en el centro del país. Sin embargo, hay cada vez más demanda de investigadores en el interior de la República. La investigación va de la mano de la enseñanza. En mi opinión el modo de producción de las matemáticas y de la ciencia es parecido a lo que pasaba en la edad media con los artistas y artesanos. Los aprendices trabajaban para los maestros y estos a su vez les enseñaban el oficio. Este esquema es muy claro en los niveles de maestría y doctorado. Los investigadores tratan de formar a sus estudiantes porque estos preservarán y harán relevante su propia investigación.

Enseñanza

No es un secreto que cada vez mayor número de estudiantes incluyen entre sus criterios para seleccionar la carrera que estudiaran el que la carrera no contenga matemáticas. De alguna manera los lectores de esta revista son la excepción. Tampoco es un secreto que México tiene los peores resultados en la prueba Pissa de matemáticas que aplica la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Estos dos aspectos nos muestran que la matemática en México no se enseña adecuadamente en los niveles elementales. Aquellos que sobreviven a la pésima enseñanza de las matemáticas y llegan con cierto gusto por ellas al bachillerato es porque tienen una facilidad innata para ellas o porque tuvieron la suerte de toparse con un buen maestro o maestra. Al país le hace falta mejorar su nivel de matemáticas y eso solo es posible con el involucramiento de los matemáticos en ella. Afortunadamente cada vez es mayor la proporción de matemáticos en la enseñanza a nivel bachillerato. Aquí debo aclarar que no hay garantía de que un buen matemático sea buen profesor de matemáticas, pero conozco algunos que son extraordinarios. Para que un matemático sea buen maestro debe serlo por vocación. Si lo hace porque no le quedó otra opción puede ser que los resultados no sean buenos. Aquellos que tienen gusto por las matemáticas y la enseñanza tienen a su alcance una gran cantidad de recursos didácticos para hacer sus clases amenas. Sin embargo, hay que tener precaución cuando se habla de la enseñanza de las matemáticas. Un gran problema con la enseñanza de las matemáticas son los matemáticos cuya personalidad no les ayuda o que no tienen habilidad para guiar a sus alumnos y los espantan. Quienquiera que desee dedicarse a la enseñanza debe hacer un esfuerzo por entender a los muchachos y guiarlos, debe de tener en cuenta que ellos están empezando.

La enseñanza tiene muchos aspectos aparte de estar frente a un grupo en un salón. Lo más bello de la enseñanza es encontrar formas interesantes de mostrar el material. Enseñar cómo se saca la raíz cuadrada puede ser totalmente aburrido e irrelevante o puede ser muy interesante. Desde luego esto aplica para todos los niveles de enseñanza. Lograrlo no es una empresa fácil, pero cuando se logra puede ser muy satisfactorio. Ahora con la computación y las telecomunicaciones se puede incursionar en otros aspectos de la enseñanza que antes no eran posibles: uno de ellos es la enseñanza a distancia, que puede ser una solución para lugares remotos que no pueden contar con un buen maestro de matemáticas.

México necesita muchos buenos maestros de matemáticas!

Aplicación de las Matemáticas

Las matemáticas sin aplicación no hubieran nacido y no se hubieran desarrollado hasta ser lo que son. Antes de la formalización fue la utilización de las matemáticas. Los egipcios construyeron sus pirámides 2000 años antes de que los griegos empezaran la formalización de las matemáticas. Desde luego, los egipcios no hubieran podido construir las pirámides y desarrollar su cultura sin un conocimiento moderado de ciertas propiedades matemáticas. Metafóricamente, podríamos decir que los matemáticos aplicados son los egipcios de nuestro tiempo; los puros, son los griegos. Aunque quizá Arquímedes no estaría tan de acuerdo. Las matemáticas actualmente se desarrollan de maneras caprichosas. Hay problemas prácticos que dan origen a teorías matemáticas y hay teorías matemáticas que fueron desarrolladas porque parecieron interesantes en sí mismas y que muchos años después se aplican finalmente a la resolución de un problema práctico.

Si yo tuviera que decir una sola característica del matemático aplicado que lo distingue del puro esta sería la modelación matemática. El matemático aplicado debe ser un matemático, mientras mejor matemático mejor, que además sepa como modelar el fenómeno que se le presenta y cuente con las herramientas para explotar su modelo. Hay modelos que se convierten en monstruos que no pueden domarse. Parte de una buena modelación es que se pueda aprovechar usando las herramientas que se tienen. Desde luego ciertos modelos provocan que se investiguen mejores técnicas para resolverlos, o aun para entenderlos. Este es el caso de la física teórica.

El uso exitoso de los modelos matemáticos lo encontramos en todas partes. En realidad hay modelos de los que la mayor parte de los matemáticos no son conscientes de que están enfrente de nuestros ojos. Quizá el ejemplo más cercano sea la contabilidad. La contabilidad moderna se basa en un modelo matemático del renacimiento. Hacia finales del siglo XV un fraile italiano de nombre Luca Paccioli, que era matemático entre otras cosas, inventó lo que se conoce entre los contadores como el algoritmo de la partida doble. Este algoritmo se ha usado por más de 500 años y seguramente se seguirá usando por mucho tiempo. Otros ejemplos son los conocimientos, modelos y algoritmos que funcionan al usar nuestra computadora. Estamos usando, sin saberlo, una gran cantidad de algoritmos matemáticos que hacen que aparezcan ante nosotros muchos objetos interesantes: mapas, animaciones, música etc. Todo ello tiene imbuido un modelo matemático de alguna índole. Las telecomunicaciones modernas no serían posibles sin la modelación matemática del electromagnetismo y la óptica; del análisis de redes y de los algoritmos para manejar de forma segura grandes volúmenes de información.

El matemático tiene ante sí un universo de posibilidades para aplicar su conocimiento, desde la aritmética y la geometría hasta los más avanzados temas de la matemática moderna. Desde luego los retos son cada vez mayores y frecuentemente es necesario hacer un posgrado para poder enfrentarse a ellos. Sin embargo, aún con un buen conocimiento de la carrera de matemáticas se pueden atacar muchos problemas. Desde luego para ello se requiere que la matemática estudiada sea la adecuada. Frecuentemente es útil saber algo de optimización, ecuaciones diferenciales parciales, probabilidad, estadística y computación.

Una posible motivación para inclinarse por esta opción es que puede ser más fácil encontrar trabajo. Como mencioné previamente las plazas de investigador son ahora escazas en México, al menos en los lugares donde hay mayor actividad. En la enseñanza puede haber más posibilidades pero no siempre al nivel deseado. En las aplicaciones la situación es diferente, pues las posibilidades de trabajo se dan en muchos campos de la economía. El sector público, la industria y el sector financiero son desde luego los

que hasta ahora han absorbido mayor cantidad de matemáticos en México, aunque hay otros campos en los que se requieren matemáticos. Todavía es incipiente el campo de la asesoría matemática privada.
Desafortunadamente tengo que mencionar que el campo de aplicación se extiende más allá de nuestras fronteras. Muchos matemáticos mexicanos se han quedado a trabajar en el extranjero, principalmente en Estados Unidos. Esto ha sucedido por la sencilla razón de que encuentran un trabajo muy interesante y muy bien remunerado contra el cual no podemos competir frecuentemente.

Computación

Así como la investigación y la enseñanza no pueden existir separadas, la aplicación y la computación tampoco pueden subsistir una sin la otra. El matemático que desee incursionar en la aplicación de las matemáticas tiene que tener una buena idea de lo que es la computación científica y los fundamentos de las ciencias de la computación. El matemático que desee dedicarse a la computación ganará mucho enterrándose de ciertos tópicos matemáticos que son indispensables para comprender el funcionamiento de las computadoras: los algoritmos que usa y sus limitaciones.
El matemático que se dedica a la computación en cualquiera de sus ramas tiene la ventaja de que posee la formación lógico-matemática para abordar los múltiples problemas que se le pueden presentar. Un área de aplicación de las matemáticas en el mundo de la computación y las telecomunicaciones es la criptología (criptografía y criptoanálisis). Basada en conceptos de algebra moderna, esta herramienta se ha convertido en un elemento indispensable en el espacio cibernético, sobre todo cuando se trata de hacer transacciones financieras, aunque su aplicación es mucho más amplia.
Los desarrolladores de sistemas con formación matemática tienen la gran ventaja de que pueden concebir estructuras más generales que les permiten abordar los problemas con mayor generalidad. Esta salida laboral absorbe gran cantidad de gente, pues la industria del software ha sido hasta ahora una de las de mayor crecimiento.

Gestión

Los matemáticos generalmente no se dedican a la gestión empresarial, pero si un poco más a la gestión científica ya sea en su propio lugar de investigación o en algún otro lugar como el CONACYT (Consejo Nacional de Ciencia de Tecnología) o en la dirección de los centros de investigación. Hay que decir que cuando un matemático asume una de estas tareas lo puede hacer de dos formas, igual que en la enseñanza: forzado por las circunstancias o porque esa convencido de que puede hacer un buen papel. Frecuentemente en el primer caso su desempeño es mediocre, pues no tiene la motivación para atender problemas a menudo incómodos y sin relevancia para su principal actividad que es la investigación. Por el contrario cuando tienen la motivación correcta su desempeño es frecuentemente bueno o muy bueno. La razón es que son gente inteligente, estructurada, que sabe concretar (no le gusta el rollo) y que conoce el tema o bien lo aprende rápidamente.

Desde luego nadie debe empezar una carrera de matemáticas con la idea de que va a llegar a dirigir una institución, sin embargo no está de sobra leer un poco sobre los temas de gestión que por otra parte también tienen su parte matemática. Los matemáticos que llegan a dirigir una institución lo hacen frecuentemente después de una carrera en alguno de los temas mencionados anteriormente. Sin embargo, también se da el caso de matemáticos jóvenes y a veces no tan jóvenes que crean su propia compañía y tienen que administrarla. En México esto ha sucedido en los campos de la estadística, la criptografía y la investigación de operaciones.

Mi experiencia

Mi querido profesor Carlos Muñoz fue un entusiasta guía para muchos de nosotros. Un día entablamos una conversación en un pasillo y lo que recuerdo que me dijo fue que había dos tipos de personas: las que se especializaban en un tema y lo sabían todo de ese tema y muy poco de lo demás y otras que tenían la curiosidad de conocer de todo y que lograban tener un conocimiento amplio pero poco profundo, pero que ambas eran valiosas para la humanidad. Creo que finalmente tengo que admitir que yo pertenezco a la segunda categoría. Aunque en algún momento fui un especialista en el área de optimización y en particular en optimización combinatoria, la vida me ha llevado por muchos rumbos distintos y he tenido que desempeñar tareas muy disímbolas. Quizá la única constante ha sido que siempre me he sentido un matemático y he tratado de descubrir la presencia de las matemáticas en los más insólitos lugares. La mayoría de las veces tal presencia es solo una sombra o a veces un destello, pero eso ha sido suficiente para ayudarme en la tarea que estoy desempeñando.

Quizá mencioné solo cinco grandes áreas en las que un matemático se puede desempeñar porque esas son las cinco en las que me ha tocado trabajar a mí. La primera fue la enseñanza. Siempre ha sido para mí un gusto compartir con mis estudiantes mis conocimientos, que frecuentemente no fueron mucho mayores que los de ellos. Mi primera experiencia fueron clases particulares para regularizar a muchachos de secundaria, después di un curso propedéutico en la Vocacional 2 para los muchachos de secundaria que querían entrar. Luego, fueron clases de problemas de cálculo en la Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM) del Instituto Politécnico Nacional (IPN) y, posteriormente me hice cargo de las clases de teoría en la misma escuela. Di clases ahí desde 1967 hasta 1988, con una interrupción por mis estudios en Canadá. Antes de irme a estudiar daba clases también en la prepa popular de Liverpool y en algún tiempo en la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME). A mi regreso, era tal mi entusiasmo que además de trabajar en el Banco de México, daba yo clases en la mañana en la Facultad de Ciencias de la UNAM y en la noche en mi escuela, la ESFM. Poco a poco se fue haciendo más difícil dar clases hasta que lo dejé en 1988. Después de esa época he dado unos pocos cursos aislados.

La segunda área de trabajo a la que accedí fue a la aplicación. Antes de proseguir, déjenme decir que yo trabajé más o menos desde temprana edad ayudando a mi padre y a mi hermano en su trabajo, que se desarrollaba usualmente en algún taller donde había que cortar alambre y lámina para luego ensamblarla de algún modo y hacer cierto tipo de productos. Así que quizá debería de mencionar esta como mi primera área, pues había que usar aunque fuera matemática elemental. Pero digamos que mi primer trabajo como matemático, después de la enseñanza, fue la aplicación. Esto ocurrió en 1969 cuando fui contratado para trabajar en PEMEX. Ahí trabajé durante 10 meses aproximadamente y mi trabajo junto con otros colegas era conformar una biblioteca de software para el área de Investigación de Operaciones. Realmente el trabajo era divertido y el horario era muy cómodo, lo que me permitía seguir dando clases. En ese trabajo me fue muy útil todo lo que me enseño otro entrañable profesor: el Dr. Harold V. MacIntosh. Entre otras cosas el lenguaje FORTRAN de programación, las estructuras de datos y el análisis numérico.

Después de un breve periodo en el que solo enseñaba, entré al Banco de México en 1970. Ahí estaría durante 30 años. El Banco me becó para hacer mi maestría y el CONACYT para el doctorado. Eso ocurrió entre 1973 y 1978. El trabajo en el Banco fue altamente gratificante y siempre interesante aunque no falto de tensiones y algunas veces de política. Al final de mi carrera en el Banco, solía yo decir que lo bueno de mi estancia ahí había sido que nunca tuve un jefe tonto sino que por el contrario un par de veces mis jefes fueron extraordinarios. Mi primer proyecto en el Banco tenía que ver con el diseño de un centro turístico (Cancún) que se estaba construyendo. Fue un proyecto interesante aunque sus resultados no fueron tomados muy en cuenta. Ahí, tuve que aprender estadística, estudiar lo que se conoce como análisis multivariado y echar a andar un programa (aún no existían muchos paquetes comerciales). Las aplicaciones fueron varias. Mi siguiente proyecto tuvo que ver con la contratación de la deuda pública externa. Todavía en aquellas épocas tratábamos de ser racionales con la deuda y el proyecto se trataba de elegir que proyectos financiar dado un cierto nivel de endeudamiento. Ahí tuve que aprender programación lineal y entera, también tuve que implementar el software correspondiente. Este proyecto tuvo un poco de mejor suerte. Sin embargo, lo más importante es que me introdujo de lleno a lo que después sería mi especialidad.

Después de estos proyectos me fui a estudiar a la Universidad de Waterloo, mi maestría y mi doctorado en Investigación de Operaciones. El doctorado resultó transformarse en una investigación puramente matemática pero que me permitió conocer a fondo el tema de la Optimización Combinatoria y en particular saber más acerca de la complejidad computacional de la programación entera. Estos años de estudio me llevaron al ámbito de la investigación que comentaré más adelante.

A mi regreso de Canadá cambié de área y entré a la oficina de matemática aplicada que después se llamaría de investigación y desarrollo. En esta área habíamos varios doctores y varios maestros en ciencias. En otra área del Banco había un buen número de doctores en Economía. Así que en esa época hubo también algo de investigación aplicada en el Banco. Entre 1978 y 1983 llevamos a cabo un buen número de proyectos con la característica principal de que muchos de ellos fueron utilizados. Mi intervención fue sobre todo en temas relacionados con la optimización en todos sus aspectos, pero también usé algo de estadística y mucha aritmética, tanto que les decía a mis compañeros que nuestra unidad debería de llamarse Aritmética Aplicada. Las aplicaciones fueron en investigación económica, finanzas, logística, planeación y asesoría a varios organismos externos al Banco.

En 1983 cambio mi vida otra vez. Esta vez me fui a un fideicomiso del Banco de México encargado de dar cobertura cambiaria a las empresas que se habían endeudado en dólares y que por causa de la crisis financiera de 1982 estaban en imposibilidad de pagar sus deudas en dólares. En este fideicomiso (FICORCA) empecé donde debía: en la oficina técnica. Ahí desarrollamos un modelo para tratar de que la cobertura fuera buena para las empresas no cara- pero que no fuera a resultar en un descalabro financiero para el Gobierno. Después, tuve la responsabilidad de dirigir el área de operación del fideicomiso y con ello mi primera responsabilidad administrativa importante. Finalmente, en 1987, me hice cargo de la dirección del FICORCA el cual liquidamos en 1992 con una ganancia de varios miles de millones de dólares.

Con la extinción del FICORCA empecé otra etapa. Fui trasladado al área de operaciones internacionales. Ahí dirigí, reportando directamente a la Junta de Gobierno del Banco, la reforma al Sistema de Pagos de alto Valor del país. Ese fue el comienzo de una transformación profunda en los pagos y otras transacciones electrónicas en el País. En ese periodo tuve la fortuna de dirigir un grupo de matemáticos talentosos que desarrollaron varios sistemas muy importantes. En primer lugar, se sentaron las bases de la infraestructura para un sistema criptográfico de llave púbica que usa la banca en el sistema de pagos. En segundo, un sistema para hacer subastas electrónicas de los instrumentos gubernamentales de deuda.

Para finalizar mi estancia en el Banco se me pidió que me hiciera cargo de la Dirección de Sistemas pues se avecinaba el año 2000 y había que reformar todos los sistemas que no hubieran tomado en cuenta esta contingencia y al mismo tiempo coordinar al sistema financiero para que hiciera lo propio. Para estas alturas mi principal trabajo era de gestión. Gestión de situaciones extraordinarias.

En el año 2000 me retiré del Banco de México con la firme convicción de dedicarme a las matemáticas. Rechacé algunas ofertas para trabajar en tecnologías de la información y estaba a punto de entrar al Instituto de Investigación en Matemáticas de la UNAM cuando me hicieron una oferta que no pude rechazar. Se trataba de dirigir el Instituto de Estadística Geografía e Informática (INEGI). Ahí estuve del 2001 al 2008.

Ésta, hasta ahora última etapa de mi carrera, resultó ser muy interesante, pues me permitió utilizar todo lo que había aprendido anteriormente y me llevó a un nivel superior de la gestión y del desarrollo institucional. En el INEGI tuve oportunidad de desempolvar mis conocimientos estadísticos, recordé las matemáticas continuas en los estudios geográficos, aprendí que hay muchas posibles aplicaciones matemáticas en el ámbito de la geografía y en el estudio del medio ambiente, e interactué con el área de tecnología para transformar al Instituto, lo cual logramos espléndidamente. Desde luego, también aprendí mucho de mis compañeros, pero quizá mi mayor logró haya sido haber conducido la transformación del INEGI a ser un instituto autónomo y haber podido plasmar en la constitución el concepto del Sistema Nacional de Información Estadística y Geográfica, el cual aunque no lo crean tiene una inspiración en la matemática. En particular en la teoría cibernética de las organizaciones.

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, de octubre a diciembre de 2009.

Del 2 al 10 de octubre en Giraldo, Colombia

11^a Olimpiada Centroamericana y del Caribe.

Del 8 al 13 de noviembre en Campeche, Campeche

Concurso Nacional de la 23^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Del 3 al 13 de diciembre en Cuernavaca, Morelos

Entrenamiento para los seleccionados nacionales.

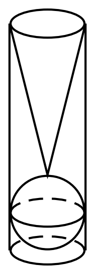
Fe de erratas

A continuación presentamos varias correcciones a los números anteriores 2 y 3 de Tzaloa. Invitamos a nuestros lectores a que nos manden sus comentarios y posibles correcciones a problemas de números anteriores, a la dirección electrónica

`revistaomm@gmail.com`.

Corrección del problema de práctica número 4 de Tzaloa No. 2 de 2009. El enunciado correcto de este problema es el siguiente.

En un cilindro lleno de agua se colocan dos sólidos: una esfera que es tangente al cilindro y un cono cuya base es igual a la base del cilindro, de forma que la altura de la esfera y el cono juntos es igual a la altura del cilindro. Si sabemos que la cantidad de agua que quedó dentro del cilindro es 1 litro y el diámetro mide $10\,cm$, ¿cuánto mide la altura del cilindro?



El problema como estaba enunciado originalmente decía que el radio del cilindro es de $10\,cm$, pero entonces la altura del cilindro resultaba ser menor que el diámetro de la esfera, y por lo tanto no se podía tener la esfera dentro del cilindro.
Agradecemos a Alain Acevedo Mejía, del Estado de Aguascalientes, por esta observación, y presentamos a continuación la solución del problema corregido.

Solución. Llamemos h a la altura del cilindro. Entonces, los radios de la esfera y de la base del cono miden $5\,cm$ y la altura del cono es igual a $(h-10)\,cm$. El volumen del cilindro es igual a $25\pi h\,cm^3$, el de la esfera es igual a $\frac{500}{3}\pi\,cm^3$, y el del cono es igual a $\frac{25}{3}\pi(h-10)\,cm^3$ (ver el Teorema 33 del apéndice). Como un litro de agua ocupa $1000\,cm^3$, tenemos que

$$\begin{aligned} 1000 &= 25\pi h - \frac{500}{3}\pi - \frac{25}{3}\pi(h-10) \\ &= \frac{50\pi(h-5\pi)}{3}, \end{aligned}$$

de donde $h = (\frac{60}{\pi} + 5\pi)\,cm$.
Por lo tanto, la altura del cilindro mide $(\frac{60}{\pi} + 5\pi)\,cm$.

Corrección del método de inducción matemática del apéndice de Tzaloa No. 2 de 2009. El método enunciado correctamente es el siguiente.

El método de inducción matemática se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo.
El método funciona de la siguiente manera.

1. Caso base: se demuestra la proposición para $n = k_0$.
2. Hipótesis de inducción: se supone cierta la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.
3. Se demuestra la proposición $P(k+1)$.

Concluimos entonces que la proposición es cierta para todo entero $n \geq k_0$.

Corrección del problema 2 del AMC 10 y del problema 4 del AMC 12 de Tzaloa No. 3 de 2009. El enunciado correcto de ambos problemas es el siguiente.

Cuatro monedas se sacaron de una alcancía que contiene monedas de 1, 5, 10 y 25 centavos. ¿Cuál de los siguientes resultados no puede ser el valor total de las cuatro monedas?

(a) 15 (b) 25 (c) 35 (d) 45 (e) 55

La solución se encuentra en la sección de “Problemas y Soluciones de Olimpiadas Internacionales” de este número.

Apéndice

Definición 1 (Primos relativos) *Decimos que dos números a y b son primos relativos si su máximo común divisor es 1.*
Ver [8, 13].

Definición 2 (Máximo común divisor) *Dados dos enteros positivos m y n, su máximo común divisor d es el mayor entero positivo que divide a ambos números m y n. Escribimos $(n, m) = d$.*
Ver [8, 13].

Definición 3 (Congruencias) *Dados dos enteros a y b, y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m, y escribimos $a \equiv b$ (mod m).*
Ver [13, 14].

Teorema 4 (Inducción Fuerte) *El método de Inducción Fuerte se utiliza para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo.*
El método funciona de la siguiente manera:

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*

2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$ y se supone verdadera la proposición $P(m)$ para todo entero $k_0 \leq m \leq k$.*

3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.
Ver [8, 15].

Definición 5 (Combinaciones) *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. Al número de combinaciones de m elementos, de un conjunto de n elementos, se denota por*

$\binom{n}{m}$ *y es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.
Ver [8, 12].

Criterio 6 (Principio de las casillas) *Si* $n+1$ *objetos son colocados en* n *casillas, entonces al menos una casilla contiene dos o más objetos.*
Ver [8, 12].

Teorema 7 (Desigualdad media aritmética - media geométrica) *Para cualesquiera números reales no negativos* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *se tiene que*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

La igualdad ocurre si y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.
Ver [5].

Teorema 8 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Para cualesquiera números reales* $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, *se tiene que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

La igualdad ocurre si y sólo si existe un número real λ *tal que* $x_i = \lambda y_i$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$.
Ver [5].

Definición 9 (Sucesión y serie geométrica) *La sucesión geométrica se define como la sucesión de números donde cada uno de ellos después del primero es el mismo múltiplo del término anterior. Al múltiplo común le llamamos la razón común* r, *ésta puede obtenerse dividiendo cualquier término, excepto el primero, entre el término anterior. Una sucesión geométrica se puede representar así*

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots.$$

La serie o progresión geométrica se define como la suma de los términos de una sucesión geométrica. Esto es

$$S = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n.$$

La suma de una progresión geométrica de razón $r \neq 1$, *es igual a*

$$S = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

Ver [1].

Teorema 10 (Fórmula de Gauss) *La suma de los primeros n números naturales es $\frac{n(n+1)}{2}$, es decir*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ver [8, 13].

Teorema 11 (Suma de cuadrados) *La suma de los primeros n^2 números naturales es $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, es decir*

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ver [8, 13].

Definición 12 (Sucesión y serie aritmética) *Una serie o progresión aritmética es la suma de los términos de una sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ donde la diferencia entre dos términos consecutivos es constante, es decir, $a_{n+1} - a_n = d$. Si $a_0 = a$, el término general es de la forma $a_n = a + nd$. A la sucesión de números se le conoce como sucesión aritmética.*
La suma de los primeros n términos es

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (n+1)a + \frac{n(n+1)}{2}d.$$

También se puede expresar dicha suma como $\frac{(a_1+a_n)n}{2}$.
Ver [1].

Teorema 13 (Ecuación de segundo grado) *La ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ tiene dos soluciones que están dadas por $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.*
La expresión dentro de la raíz cuadrada, $b^2 - 4ac$, se conoce como el discriminante de la ecuación.
Ver [1].

Teorema 14 (Fórmulas de área) *El área de un triángulo es igual a $\frac{1}{2}hl$, donde l es la medida de un lado y h es la medida de la altura sobre dicho lado.*
El área de un círculo de radio r es igual a πr^2.
Ver [2].

Definición 15 (Bisectriz) *Dado un ángulo $\angle ABC$ su bisectriz es la recta que lo divide en dos ángulos iguales. Equivalentemente, la bisectriz del ángulo $\angle ABC$ es la recta que equidista de AB y BC.*
Ver [3].

Teorema 16 (Teorema de la bisectriz) *Dado un triángulo ABC, sea AL la bisectriz del ángulo BAC, entonces se cumple que*

$$\frac{BA}{AC} = \frac{BL}{LC}.$$

Ver [3].

Definición 17 (Mediatriz) *La mediatriz de un segmento de recta AB, es la recta perpendicular a AB que pasa por su punto medio. Equivalentemente, la mediatriz de AB es la recta que equidista de A y de B.*
Ver [3].

Definición 18 (Congruencia de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*
Ver [3].

Criterio 19 (Congruencia de triángulos ALA) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como* **ángulo-lado-ángulo** *y lo denotamos como* **ALA***.*
Ver [3].

Definición 20 (Semejanza de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir,*

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$
$$\angle ACB = \angle A'C'B'$$
$$\angle BAC = \angle B'A'C'$$

y sus lados homólogos son proporcionales, esto es

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Ver [3].

Criterio 21 (Semejanza de triángulos AA) *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*
Ver [3].

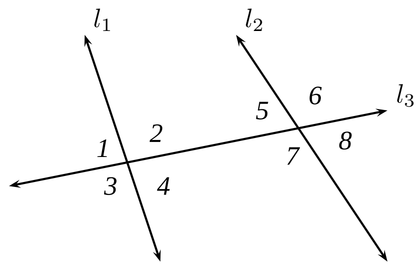
Criterio 22 (Semejanza de triángulos LAL) *Un criterio de semejanza de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con dos de sus lados proporcionales y el ángulo entre estos dos igual, son semejantes. A este criterio se le conoce como* **lado-ángulo-lado** *y lo denotamos como* **LAL***.*
Ver [3].

Definición 23 (Ángulos externos de un triángulo) *Dado un triángulo ABC sus ángulos externos son los formados por un lado del triángulo y la prolongación del lado adyacente. Dicho de otra forma, son los ángulos suplementarios de los ángulos internos.*
Ver [3].

Definición 24 (Excírculo) *Decimos que una circunferencia $\mathcal{C}$ está exinscrita en el triángulo ABC respecto al ángulo BCA, si $\mathcal{C}$ es tangente a los lados del ángulo en BCA y al lado AB por fuera del triángulo dado. También se dice que $\mathcal{C}$ es el excírculo del triángulo ABC respecto al ángulo BCA.*
Ver [3].

Teorema 25 (Teorema de Pitágoras) *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*
Ver [3].

Definición 26 (Ángulos entre paralelas) *Cuando una recta intersecta a otras dos rectas se forman ocho ángulos que numeramos del* 1 *al* 8*, como se muestra en la figura*



Si la recta l_3 *intersecta a las rectas* l_1 *y* l_2*, decimos que es* **transversal** *a ellas. Los ángulos* 2*,* 4*,* 5 *y* 7 *están entre las rectas* l_1 *y* l_2*, los llamamos* **ángulos internos***, los ángulos restantes los llamamos* **ángulos externos***. Los ángulos en lados opuestos por la transversal* l_3 *se llaman* **ángulos alternos***, como por ejemplo* 3 *y* 5*. A los ángulos* 4 *y* 5 *les llamamos* **alternos internos** *y los ángulos* 3 *y* 6 *son* **alternos externos***.*
A los ángulos que están en la posición correspondiente respecto a la transversal, como por ejemplo 3 *y* 7 *los llamamos* **ángulos correspondientes***. Entonces, los pares de ángulos correspondientes en la figura anterior son* 3 *y* 7*,* 1 *y* 5*,* 4 *y* 8*,* 2 *y* 6*.*
Si l_1 *y* l_2 *son paralelas los ángulos alternos internos son iguales.*
Ver [3].

Teorema 27 (Medida del ángulo inscrito) *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco.*
Ver [3].

Definición 28 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero es cíclico si existe una circunferencia que pasa por sus cuatro vértices.*
Ver [3].

Teorema 29 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero* $ABCD$ *es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a* $180°$*, es decir, si y sólo si*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Ver [3].

Teorema 30 (Radio perpendicular a una cuerda) *En un círculo, el radio que pasa por el punto medio de una cuerda, es perpendicular a la cuerda.*
Ver [3].

Teorema 31 (Desigualdad del triángulo) *Los números a, b y c son las medidas de los lados de un triángulo si y sólo si*

$$\begin{aligned} a+b &> c, \\ a+c &> b, \\ b+c &> a. \end{aligned}$$

Ver [3].

Teorema 32 (Ley de los cosenos) *En un triángulo tenemos que*

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

donde a, b y c son las longitudes de los lados y β es el ángulo opuesto al lado b.
Ver [3].

Teorema 33 (Volúmenes)

1. *El volumen de una esfera de radio r es igual a $\frac{4\pi r^3}{3}$.*
2. *El volumen de un cilindro de radio r y altura h es igual a $\pi r^2 h$.*
3. *El volumen de un cono de radio r y altura h es igual a $\frac{\pi r^2 h}{3}$.*
   Ver [2].

Bibliografía

[1] A. Baldor. *Álgebra*. Publicaciones Cultural, México, 1997.

[2] A. Baldor. *Geometría plana y del espacio*. Publicaciones Cultural, México, 1999.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría, ejercicios y problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM. Tercera edición, 2007.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Las Olimpiadas Matemáticas en San Luis Potosí 1987-2005*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2008.

[7] E. Gentile. *Aritmética Elemental*. Monografía No. 25 de la Serie de Matemáticas del Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico de la OEA. Ediciones de la OEA, 1988.

[8] R. Grimaldi, *Matemáticas Discreta y Combinatoria*. Addison Wesley Longman, Pearson. Tercera edición, 1998.

[9] V. Gusiev, V. Litvinenko, A. Mordkovich. *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Geometría)*. Editorial Mir, Moscú 1969.

[10] V. Litvinenko, A. Mordkovich. *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Álgebra y Trigonometría)*. Editorial Mir, Moscú 1989.

[11] I. Niven, H. Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2000.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de Números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2003.

[14] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[15] F. Ruiz Benjumeda. *Demostrando por Inducción*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 3, 2009.

[16] H. Shariguin, *Problemas de Geometría*. Colección Ciencia Popular. Editorial Mir, Moscú 1989.

[17] N. Vilenkin. *¿De cúantas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Directorio del Comité Organizador de la OMM

Anne Alberro Semerena
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (777) 3 81 03 80
Fax (777) 3 29 70 40
aalberro@buzon.uaem.mx

Alejandro Bravo Mojica
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 48 68
Fax (55) 56 22 48 64
abm@hp.fciencias.unam.mx

Radmila Bulajich Manfrino
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
bulajich@servm.fc.uaem.mx

Gabriela Campero Arena
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 48 67
Fax (55) 56 22 48 66
gabriela@matematicas.unam.mx

José Antonio Climent Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 24 59 22
Fax (55) 56 22 48 59
jach@fciencias.unam.mx

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 49 25
Fax (55) 56 22 48 59
cobian@matematicas.unam.mx

Luis Cruz Romo
UPIITA, IPN
Av. Instituto Politécnico Nacional 2580
Col. Barrio la Laguna Ticomán
07340, México, D.F.
lucruz@ipn.mx

Carlos Jacob Rubio Barrios
Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de Matemáticas
Periférico norte tablaje 13615
97119, Mérida, Yucatán
Tel. (999) 942-3140 al 49
Fax (999) 942-31-40
carlos.rubio@uady.mx
jacob.rubio@gmail.com

Pablo Soberón Bravo
Circuito Interior no. 830
Fracc. La Herradura
Col. La Herradura
62303, Cuernavaca, Morelos
Cel. (777) 134 55 49
bandrak@hotmail.com

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
rogelio@matcuer.unam.mx

Jesús Jerónimo Castro
CIMAT
Apartado Postal 402,
36000, Guanajuato, Guanajuato.
Tel. (473) 7 32 71 55
Fax (473) 7 32 57 49
jeronimo@cimat.mx

Elena Ruiz Velázquez
Altair no. 12
Col. Lomas de Palmira
62550, Cuernavaca, Mor.
Tel. (777) 320 54 39
Cel. (777) 133 39 83
eleniux@gmail.com
A00375640@itesm.mx

Carmen Sosa Garza
Facultad de Ingeniería, UAQ
Cerro de las Campanas s/n
Querétaro, Querétaro
Tel. (442) 1 92 12 64 ext. 121 ó 136
Fax (442) 1 92 12 646
carsg@uaq.mx

Hugo Villanueva Méndez
Instituto de Matemáticas, UNAM
Cub. 4 de Becarios,
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria
Coyoacán 04510,
México, D.F.
Tel (55) 56 22 45 32
vill_hugo@hotmail.com
hvillan@matem.unam.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@fciencias.unam.mx`

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

`http://www.omm.unam.mx/`