TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2010, No. 4

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.omm.unam.mx

Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Impreso y hecho en México.
Octubre de 2010.

Contenido

Presentación

Tzaloa es una publicación periódica trimestral de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas y su objetivo es fomentar el estudio de las matemáticas como una disciplina dinámica y creativa. El diseño de las secciones y la cuidadosa selección de sus contenidos buscan apoyar de manera efectiva, con información y con materiales de calidad, a estudiantes y profesores de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los diferentes concursos de la Olimpiada de Matemáticas.

Esta revista, con orgullo, toma su nombre del náhuatl porque está hecha por y para los mexicanos. Tzaloa significa aprender y las páginas que la conforman buscan ayudar a satisfacer la necesidad de contar con espacios adecuados para profesores, estudiantes y, en general, para todas aquellas personas interesadas en desarrollar e incrementar sus capacidades para el razonamiento lógico matemático y la resolución de problemas.

Tzaloa, Año 2010, Número 4

Para despedir al año 2010, en este número de tu revista, hemos incluido dos interesantes artículos, los exámenes de los últimos concursos internacionales en los que participó México, la información Olímpica más actualizada y, desde luego, una rica variedad de problemas para que pongas a prueba toda tu capacidad.

Como es el último número del año, para la selección del material que conforma las secciones *Problemas de Práctica y Problemas Propuestos*, hemos contemplando problemas cuya solución no es trivial y muchos de los cuales se consideran de nivel avanzado. Sin embargo, lo anterior no debe desanimar a todos aquellos lectores que apenas se inician, hay que tener en cuenta que la valoración sobre la dificultad de un problema siempre es subjetiva y que muchas veces, una idea original y creativa, puede hacer que un problema considerado como difícil encuentre una solución sencilla.

El artículo de temas matemáticos que seleccionamos para este número trata sobre *Circuncírculos* y es una colaboración de Eduardo Velasco Barreras. Con su amplia experiencia olímpica, Eduardo nos presenta un excelente material que estamos seguros será de gran valor para todos aquellos que trabajan en su preparación para participar en algún concurso. Es un hecho que, a lo largo de todo el mundo, los problemas de geometría son los que aparecen con mayor frecuencia en los exámenes olímpicos de todos los niveles y que, de entre los problemas geométricos, los que involucran al circuncentro de un triángulo (ya sea en su planteamiento o en su solución) tiene un lugar destacado. Aunado a lo anterior, la selección de los ejemplos escogidos para este artículo es excepcional, a través de ellos es posible observar cómo los circuncírculos junto con resultados clásicos sobre ángulos inscritos, semi-inscritos, potencia de un punto con respecto a un círculo, etc. permiten resolver, de manera elegante, una gran variedad de problemas geométricos.

Desde el año pasado decidimos que en el cuarto número de cada año, se presentaría un artículo adicional con la visión de un matemático famoso. Esta sección sobre el quehacer de los matemáticos busca acercar a nuestros lectores con quienes han dedicado su vida profesional a explorar la belleza del mundo matemático. Es así, que en esta ocasión y como regalo de fin de año, presentamos la entrevista que Emilio Lluis Riera dio en exclusiva para los lectores de Tzaloa. La pasión de Lluis por las matemáticas ha dejado una imborrable huella en muchas generaciones de matemáticos mexicanos. Su nombre es conocido en todo el mundo y sus importantes contribuciones al desarrollo de esta ciencia han puesto en alto el nombre de México. Hoy, Emilio Lluis Riera, con la sencillez y carisma que le caracterizan, comparte con nuestros lectores una agradable charla que estamos seguros disfrutarán tanto como nosotros.

Como siempre, en la sección de Olimpiadas Internacionales presentamos los resultados y exámenes de los últimos concursos en los que México participó. Presentamos el examen de la 51^a Olimpiada Internacional de Matemáticas, en la que México tuvo una participación destacada. Además incluimos los exámenes con soluciones de la XXII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico (APMO, por sus siglas en inglés) y de la XII Olimpiada Centroamericana y del Caribe; eventos en los que México alcanzó el 15° y 1^{er} lugar respectivamente. Además, en esta ocasión, también incluimos las soluciones de los exámenes de la American Mathematics Competition (AMC), mismos que sirvieron como preparación para las delegaciones mexicanas que este año participaron en concursos internacionales.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Hace más de 23 años que la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Desde sus inicios, este programa se ha visto fortalecido gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

24ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 24^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1991. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2010-2011 y, para el 1° de julio de 2011, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.omm.unam.mx`

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 24^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 21 al 26 de noviembre de 2010 en Ensenada, Baja California. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2011: la XXIII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, que se llevará a cabo en el mes de marzo; la XIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, que se celebrará en el mes de junio; la 52^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se llevará a cabo en julio en Amsterdam, Países Bajos, y la XXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en el mes de septiembre en Costa Rica.

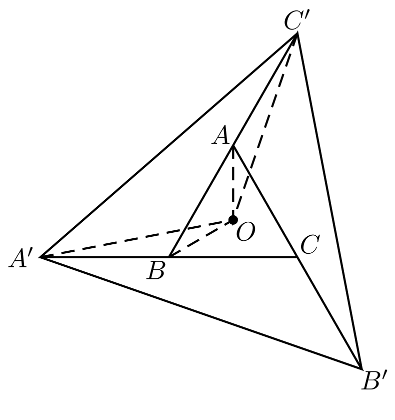
Circuncírculos

Por Eduardo Velasco Barreras

Nivel Avanzado

Entre los primeros puntos importantes de los triángulos que estudiamos en la olimpiada está el *circuncentro*. Éste es el punto de concurrencia de las *mediatrices* que tiene la propiedad de que es el único punto que se encuentra a la misma distancia de los vértices del triángulo, en otras palabras, podemos trazar un círculo con centro en el circuncentro que pasa por todos los vértices del triángulo. Recordemos que la mediatriz de un segmento AB es la recta perpendicular a AB que pasa por su punto medio. Empecemos con un ejemplo.

Ejemplo 1. Sea ABC un triángulo equilátero. Sean: A' el punto en la recta BC (distinto de C) tal que $BC = BA'$, B' el punto en la recta CA (distinto de A) tal que $CA = CB'$ y C' el punto en la recta AB (distinto de B) tal que $AB = AC'$. Pruebe que los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen el mismo circuncentro.



Solución. Sea O el circuncentro de ABC. Demostraremos que O es también el circuncentro de $A'B'C'$, probando que $OA' = OB' = OC'$, y de esta manera quedará demostrado que los triángulos tienen el mismo circuncentro.

Como O es circuncentro de ABC se tiene que $OA = OB$. Además, por ser ABC equilátero,

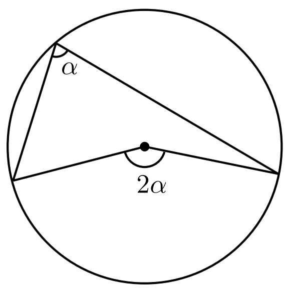
$$\angle OBA' = 180^\circ - \angle OBC = 180^\circ - 30^\circ = 180^\circ - \angle OAB = \angle OAC'.$$

Finalmente, por construcción, y por ser ABC un triángulo equilátero, se tiene que $BA' = BC = BA = AC'$.

De las tres igualdades anteriores, $OA = OB, \angle OBA' = \angle OAC', BA' = AC'$, se concluye que los tringulos OBA' y OAC' son congruentes y entonces $OA' = OC'$. De manera análoga podemos demostrar que los triángulos OAC' y OCB' son congruentes, de lo cual se concluye que $OC' = OB'$, de donde se sigue que $OA' = OB' = OC'$ y O es circuncentro de $A'B'C'$.

Una propiedad muy utilizada en la olimpiada es la relación entre ángulos inscritos en una circunferencia. Como utilizaremos más adelante este resultado, vamos a enunciarlo:

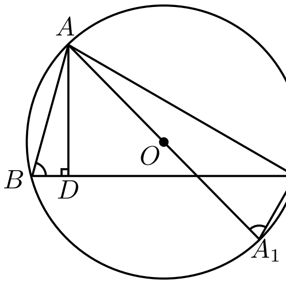
Teorema del Ángulo Inscrito *La medida del ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del ángulo central.*



En la figura se ilustra este teorema: El ángulo inscrito mide α y el ángulo central mide 2α.

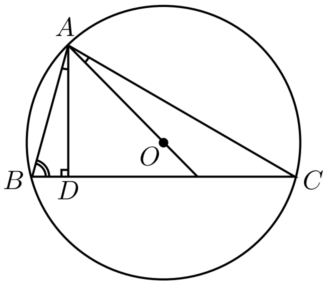
Una relación importante que existe entre el circuncentro y las alturas de un triángulo es la siguiente:

Propiedad 1. Sea ABC un triángulo cuyo circuncentro es O y sea AD la altura desde A. Entonces $\angle BAD = \angle CAO$.



Solución. Consideremos el circuncírculo del triángulo ABC y prolonguemos la recta AO hasta que corte al circuncírculo en un punto A_1. Como AA_1 pasa por el centro O entonces es un diámetro de la circunferencia de donde se sigue que el ángulo $\angle ACA_1 = 90°$ (por el Teorema del ángulo inscrito). Como los ángulos $\angle AA_1C$ y $\angle ABC$ abren el arco $\widehat{AC}$ del circuncírculo, entonces $\angle ABD = \angle AA_1C$. Por otro lado, $\angle BDA = 90° = \angle A_1CA$. Estas dos últimas igualdades implican que los triángulos BDA y A_1CA son semejantes, de donde se concluye que $\angle BAD = \angle CAO$.

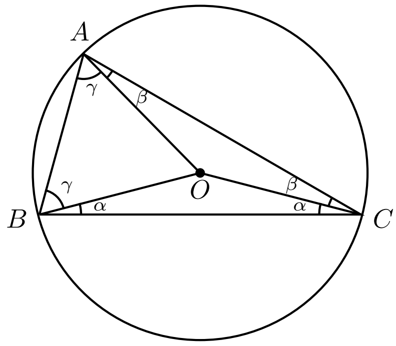
Propiedad 2. Sea ABC un triángulo con circuncentro O. Entonces $\angle CBA + \angle CAO = 90°$.



Solución. Como AD es altura, tenemos que $\angle DBA + \angle BAD = 90°$. Sin embargo, $\angle DBA = \angle CBA$ y por la Propiedad 1 $\angle BAD = \angle CAO$. Sustituyendo las igualdades en la suma, obtenemos el resultado.

Esta propiedad está enunciada aquí para los ángulos $\angle CBA$ y $\angle CAO$. Sin embargo, se puede demostrar de la misma manera que

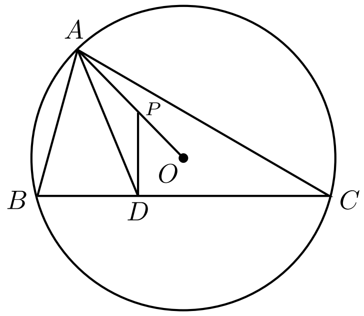
$$\begin{aligned}
\angle ABC + \angle ACO &= 90° \\
\angle ACB + \angle ABO &= 90° \\
\angle BCA + \angle BAO &= 90° \\
\angle CAB + \angle CBO &= 90° \\
\angle BAC + \angle BCO &= 90°.
\end{aligned}$$



$$\alpha + \beta + \gamma = 90°$$

Cuando tenemos problemas en los que se involucra al circuncentro, casi siempre resulta útil trazar el circuncírculo del triángulo y trazar alguno de los diámetros. Sin embargo, también se pueden utilizar propiedades como las que acabamos de demostrar para resolver problemas. Para ilustrar las propiedades, resolvamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2. Sea ABC un triángulo de circuncentro O y sea AD la bisectriz de $\angle BAC$ con D sobre BC. La perpendicular a BC por D corta a AO en P. Demuestre que $PA = PD$.



Solución. Demostraremos que $\angle PDA = \angle PAD$, lo que implica que el triángulo ADP es isósceles con $PA = PD$. Tenemos que $\angle PDA = 90° - \angle ADB$, por ser PD perpendicular a BC. También se tiene que $\angle ADB = \angle DAC + \angle ACD$, por ser $\angle ADB$ exterior en el triángulo DAC. Entonces

$$\angle PDA = 90° - \angle DAC - \angle ACD.$$

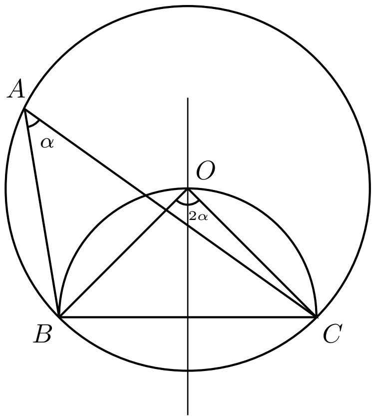
Por otro lado, tenemos que $\angle PAD = \angle PAB - \angle DAB = \angle PAB - \angle DAC$ ya que AD es bisectriz. Queremos demostrar que $\angle PDA = \angle PAD$, lo cual es cierto ya que utilizando la Propiedad 2 tenemos que

$$\begin{aligned} \angle PAB &= \angle OAB \\ &= 90° - \angle ACB \\ &= 90° - \angle ACD, \end{aligned}$$

lo que finaliza la demostración.

Ahora, vamos a combinar algunos de los resultados ya demostrados para dar una caracterización del circuncentro:

Propiedad 3. Sea ABC un triángulo *tal que $\angle BAC$ es un ángulo águdo*. Si O es un punto del mismo lado de la recta BC que A tal que $\angle BOC = 2\angle BAC$, y $OB = OC$, entonces O es el circuncentro del triángulo ABC.



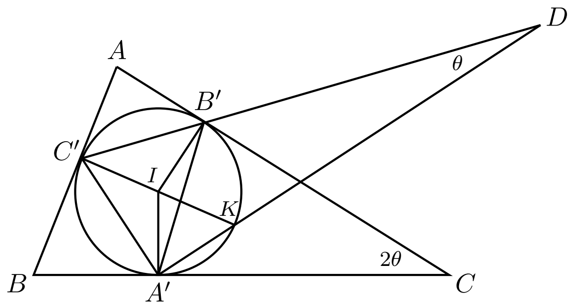
Solución. Notemos primero que el circuncentro cumple con ambas propiedades, es decir, si trazamos el circuncentro de ABC, por ser $\angle BAC$ un ángulo inscrito y $\angle BOC$ el ángulo central tendremos que $\angle BOC = 2\angle BAC$, además de que $OB = OC$ porque estas longitudes son radios.

Para ver que sólo el circuncentro cumple con esta propiedad, veamos lo siguiente: El hecho de que un punto O satisfaga que $OB = OC$ es equivalente a que O se encuentre en la mediatriz del segmento BC (y de hecho el circuncentro está en esa recta), y el hecho de que O satisfaga la relación de ángulos y que esté del mismo lado de BC que A significa que O pertenece al arco de circunferencia $\widehat{BC}$ que pasa también por el circuncentro.

El punto O, deberá estar por lo tanto en la intersección del arco con la mediatriz. Como la mediatriz y el arco se intersectan en un solo punto, dicho punto debe ser único, por lo que sólo el circuncentro cumple con esas condiciones.

Esta última propiedad es bastante útil para demostrar problemas que no son sencillos sin esta herramienta.

Ejemplo 3. Sea ABC un triángulo de incentro I. El incírculo del triángulo ABC toca a los lados BC, CA, AB en A', B', C', respectivamente. Sea K el punto diametralmente opuesto a C', y sea D la intersección de las lineas $B'C'$ y $A'K$. Pruebe que $CD = CB'$.



Solución. Como CB' y CA' son tangentes al incírculo desde C, entonces tienen la misma longitud[1]. Demostrar que $CD = CB'$ es equivalente entonces a demostrar que $CD = CB' = CA'$, lo cual nos dice que el problema es equivalente a demostrar que C es el circuncentro de $A'B'D$.

Observemos que C y D se encuentran del mismo lado de la recta $A'B'$. Para demostrar que C es el circuncentro de $A'B'D$ utilizaremos la Propiedad 3. Para poder aplicarla necesitamos verificar tres cosas:

$$\begin{aligned} \angle B'DA' &< 90^\circ \\ \angle B'CA' &= 2\angle B'DA' \\ CA' &= CB'. \end{aligned}$$

1. Como $C'K$ es diámetro del incírculo, entonces $\angle C'A'D = 90^\circ$, por lo que el triángulo $C'A'D$ es rectángulo en A' y el ángulo $\angle B'DA'$ es agudo.

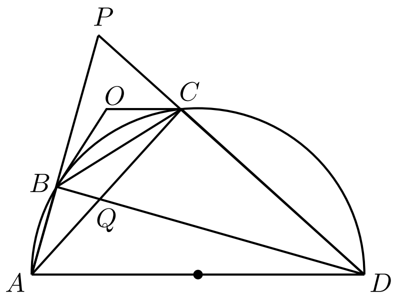
2. Como B' es punto de tangencia del incírculo con el lado AC entonces $\angle IB'C = 90^\circ$. De la misma manera, $\angle IA'C = 90^\circ$. Como $\angle IB'C + \angle IA'C = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, entonces el cuadrilátero $B'IA'C$ es cíclico[2] y $\angle A'IB' + \angle A'CB' = 180^\circ$. Esta última ecuación es equivalente a $\angle A'CB' = 180^\circ - 2\angle A'C'B'$, pues $A'CB'$ es inscrito y $A'IB'$ es el ángulo central correspondiente. Como $\angle A'C'B' + \angle A'DB' = 90^\circ$, se tiene que $\angle B'CA' = 2\angle B'DA'$.

3. $CA' = CB'$ ya lo habíamos demostrado.

Como se cumplen las tres condiciones, C es circuncentro del triángulo $B'A'D$, y entonces $CD = CB'$, como queríamos.

Ejemplo 4. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia tal que AD es diámetro, y sean P el punto de intersección de AB y CD, y Q el punto de intersección de AC y BD. Sea O el punto de intersección de las tangentes por B y C a la circunferencia. Demuestre que O, P, Q son colineales.

[1]Ver en el apéndice el teorema POTENCIAS.
[2]Ver en el apéndice la definición ... y el teorema ... CUADRILATERO CICLICO.



Solución. Para demostrar que estos puntos son colineales, demostraremos que

$$\angle APO = \angle APQ.$$

Primero notemos que $\angle ACD = \angle ABD = 90^\circ$ ya que AD es diámetro. Sea $\alpha = \angle BAC$. Observemos que, como el triángulo APC es rectángulo en C, entonces

$$\angle BPC = 90^\circ - \alpha.$$

Ahora, como OB y OC son tangentes a la circunferencia, entonces, por el Teorema del Ángulo Seminscrito [3], se tiene que $\angle OBC = \angle OCB = \angle BAC = \alpha$, por lo que $OB = OC$ y además

$$\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha.$$

Observemos que el triángulo BPC es acutángulo, que el punto O está en el interior de éste y satisface $OB = OC$ ya que OB y OC son tangentes. Además tenemos que $\angle BOC = 2\angle BPC$, por lo que concluimos por la Propiedad 3 que O es el circuncentro del triángulo BPC. Como O es circuncentro, aplicando la Propiedad 2 tenemos que $\angle BPO = 90^\circ - \angle PCB$. Utilizando que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, $\angle PAD = 180^\circ - \angle BCD = \angle PCB$. Entonces

$$\angle APO = \angle BPO = 90^\circ - \angle PCB = 90^\circ - \angle PAD.$$

Ahora, como $\angle ACD = \angle ABD = 90^\circ$, tenemos que AC y DB son alturas del triángulo APD. Luego, Q es ortocentro de este triángulo y entonces PQ es altura también, de donde se sigue que

$$\angle APQ = 90^\circ - \angle PAD.$$

Por lo tanto, $\angle APQ = \angle APO$, y entonces P, O, Q son colineales, como queríamos.

Ejercicios

1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que sus diagonales AC y BD son perpendiculares. Sea M el punto medio de AB y sea P el punto de intersección de las diagonales. Demuestra que MP es perpendicular a CD.

[3] Ver en el apéndice el teorema ANGULO SEMINSCRITO

2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico y sea P el punto de intersección de las diagonales. Sea O el circuncentro de ABP y H el ortocentro de CDP. Demuestra que O, H, P son colineales.

3. Sea ABC un triángulo acutángulo. Sea AD la bisectriz del ángulo en A, con D sobre BC y sea O su circuncentro. La perpendicular a AO por D corta a AC en el punto B'. Demuestra que $AB' = AB$.

4. Sea ABC un triángulo y AD la altura sobre el lado BC. Tomando a D como centro y a AD como radio, se traza una circunferencia que corta a la recta AB en P y corta a la recta AC en Q. Demuestra que el triángulo AQP es semejante al triángulo ABC.

5. Sea ABC un triángulo de ortocentro H y sean O_A, O_B, O_C los circuncentros de los triángulos HBC, HCA, HAB, respectivamente. Demuestra que el triángulo $O_AO_BO_C$ es congruente al triángulo ABC y que su circuncentro es H.

6. Sea ABC un triángulo acutángulo de circuncentro O. Sea P un punto sobre el lado BC y sean Q el punto de intersección del circuncículo de OPB con AB ($Q \neq B$) y R el punto de intersección del circuncírculo de OPC con AC ($R \neq C$). Demuestra que el triángulo PQR es semejante al triángulo ABC y que el ortocentro de PQR es O.

7. Sea ABC un triángulo. Sean A' un punto en la recta BC tal que B esté entre A' y C y $A'B = AB$; B' un punto en CA tal que C esté entre B' y A y $B'C = BC$; C' un punto en AB tal que A esté entre C' y B y $AC' = AC$. Si los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen el mismo circuncentro, demuestra que ABC es equilátero.

Bibliografía

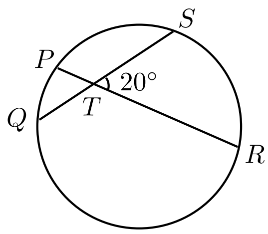
T. Andrescu, Z. Feng, *Mathematical Olympiads: Problems and Solutions from Around the World, 1999-2000*, The Mathematical Association of America.

Problemas de práctica

A continuación te presentamos los 20 problemas de nivel intermedio y avanzado que hemos seleccionado para este número y mismos con los que podrás poner a prueba tus conocimientos y habilidades. Aunque en la siguiente sección encontrarás las soluciones de todos ellos, no te recomendamos consultarla sino hasta después de que le hayas dedicado bastante tiempo a cada problema. Ten en cuenta que al consultar la solución de un problema sin haber hecho un verdadero esfuerzo para resolverlo, desperdicias la oportunidad de incrementar tu capacidad para enfrentar situaciones difíciles.

Por último, te invitamos a contribuir para que esta sección de la revista se siga enriqueciendo con la participación de todos. Estamos seguros que conoces y tienes problemas interesantes que proponer, por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus sugerencias.

Problema 1. Si el radio del círculo mide $5\,cm$, ¿cuánto vale la suma de las longitudes de los arcos $\widehat{PQ}$ y $\widehat{RS}$?



Problema 2. Si x es un número real que satisface la ecuación

$$2^{2^x} + 4^{2^x} = 42,$$

determina el valor de $\sqrt{2^{2^{2^x}}}$. (Nota: a^{b^c} denota el valor de $a^{(b^c)}$.)

Problema 3. En un triángulo rectángulo, las medidas de las longitudes de sus lados son 8, $x+5$ y $x+7$. Encuentra el valor del seno del mayor de los ángulos agudos del triángulo, si se sabe que $x > 3$.

Problema 4. Dos alumnos colocan alternativamente números enteros en los lugares vacíos de la “ecuación”

$$x^3 + (\,)x^2 + (\,)x + (\,) = 0.$$

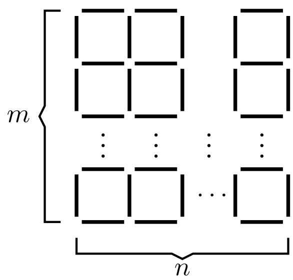
¿Dispone el alumno que escribe el primer número de alguna estrategia que le permita asegurar que al finalizar el juego siempre se obtendrá una ecuación con tres soluciones enteras?

Problema 5. Un tablero de 6×6 está cubierto por fichas de dominó de 2×1. Demuestra que existe una línea recta que separa las piezas del tablero sin cortar ningún dominó.

Problema 6. Demuestra que el número $9,999,999 + 1,999,000$ no es primo.

Problema 7. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que sus diagonales AC y BD son perpendiculares. Sean P la intersección de AC con BD, y M el punto medio de AD. Demuestra que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y sólo si las rectas MP y BC son perpendiculares.

Problema 8. Coloca varios palitos sobre una mesa de manera que se forme un rectángulo de $m \times n$ como se muestra en la figura. Pinta cada palito de azul, rojo o negro de manera que cada uno de los cuadritos de 1×1 de la figura quede delimitado por exactamente dos palitos de un color y dos de otro color. ¿De cuántas maneras puedes hacerlo?



Problema 9. Sean A, B, C y D vértices consecutivos de un heptágono regular; AL y AM las tangentes desde A a la circunferencia de centro C y radio CB; y N la intersección de AC y BD. Demuestra que los puntos L, M y N son colineales.

Problema 10. La desigualdad media aritmética - media geométrica establece que *si $a \geq 0$ y $b \geq 0$, entonces $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, y la igualdad se cumple si y sólo si $a = b$.* Suponiendo que $x > y > 0$ y $xy = 2$, determina el menor valor posible de $\frac{x^2+y^2}{x-y}$.

Problema 11. En un triángulo acutángulo ABC, se construye un semicírculo con centro sobre BC y tangente a los otros dos lados. Sea r_a el radio de dicho semicírculo y mediante construcciones análogas definimos a r_b y r_c. Demuestra que si r es el radio del incírculo de ABC, entonces $\frac{2}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$.

Problema 12. ¿De cuántas formas distintas se puede escribir el número $1,000,000$ como producto de tres enteros mayores que 1? (Se considera que abc es la misma factorización que bac, etc.)

Problema 13. Determina todas las ternas de números naturales (a, b, c) tales que a, b y c estén en progresión geométrica y que cumplan con la propiedad $a + b + c = 111$.

Problema 14. Demuestra que es posible elegir 17 segmentos de longitudes enteras menores o iguales que 2010, de manera que con ninguna terna de ellos sea posible construir un triángulo. ¿Podrá también elegirse una colección de 18 segmentos con las mismas características?

Problema 15. ¿Para qué valores de n la escritura en base 10 de 11^n tiene sus dos últimos dígitos iguales?, ¿y sus tres últimos dígitos iguales?

Problema 16. Determina todos los enteros positivos a y b, con $a < b$, tales que exactamente $\frac{1}{100}$ de los enteros consecutivos $a^2, a^2 + 1, a^2 + 2, \ldots, b^2$, sean cuadrados perfectos.

Problema 17. Sea ABC un triángulo con centroide G y sean A_1, B_1, C_1 los puntos medios de los lados BC, CA y AB, respectivamente. Una recta paralela a BB_1 por A_1 intersecta el segmento B_1C_1 en el punto F. Demuestra que los triángulos ABC y FA_1A son semejantes si y sólo si el cuadrilátero AB_1GC_1 es cíclico.

Problema 18. Demuestra que hay una infinidad de enteros positivos k tales que el número k^k se puede expresar como suma de dos cubos de enteros positivos.

Problema 19. Sea K un punto en el interior de un paralelogramo $ABCD$ tal que el punto medio de AD equidista de K y de C, y el punto medio de CD equidista de K y de A. Sea N el punto medio de BK. Demuestra que $\angle NAK = \angle NCK$.

Problema 20. Sean a y b enteros distintos tales que $2 \leq a \leq 100$ y $2 \leq b \leq 100$. Demuestra que el número

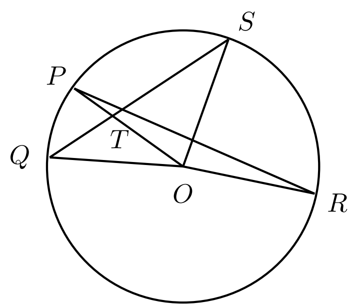
$$a^{2^n} + b^{2^n}$$

no es primo para algún entero positivo n.

Soluciones a los problemas de práctica

A continuación encontrarás las soluciones de los 20 problemas de práctica de la sección anterior. Como siempre, las soluciones que presentamos no son únicas y probablemente tampoco son las mejores, por lo que es muy posible que tú hayas encontrado una solución distinta pero igualmente válida. Si este es el caso y no estás muy seguro de su validez o simplemente la quieres compartir con nosotros te invitamos para que nos escribas a `revistaomm@gmail.com`

Solución del problema 1. Llamemos O al centro del círculo. Entonces, los ángulos inscritos (ver en el apéndice el teorema 18) $\angle POQ$ y $\angle SOR$ miden $40°$ cada uno.



Como $\frac{360°}{40°} = 9$, los arcos $\widehat{PQ}$ y $\widehat{RS}$ miden $\frac{1}{9}$ de la longitud de la circunferencia. Es decir, miden $\frac{2\pi \cdot 5}{9} = \frac{10\pi}{9}\, cm$ cada uno, por lo que la suma de sus longitudes es igual a $\frac{20\pi}{9}\, cm$.

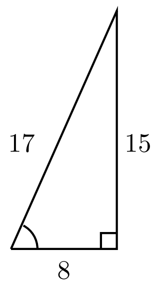
Solución del problema 2. Notemos que $4^{2^x} = (2^2)^{2^x} = 2^{2(2^x)} = (2^{2^x})^2$. Luego, si hacemos $y = 2^{2^x}$, la ecuación se convierte en

$$\begin{aligned} y^2 + y - 42 &= 0 \\ (y+7)(y-6) &= 0. \end{aligned}$$

de donde $y = 6$ ó $y = -7$. Como $y > 0$, tenemos que $y = 2^{2^x} = 6$ y por lo tanto $\sqrt{2^{2^{2x}}} = \sqrt{2^6} = 2^3 = 8$.

Solución del problema 3. Como $x > 3$, entonces $x+7 > 10$ y en particular $x+7 > 8$. Por otro lado, es claro que $x + 7 > x + 5$. Con lo anterior deducimos que $x + 7$ es la longitud del lado mayor del triángulo rectángulo, por lo tanto $x + 7$ es la longitud de la hipotenusa, y además, 8 y $x + 5$ son las longitudes de los catetos. Por el teorema de Pitágoras (ver en el apéndice el teorema 10) tenemos que

$$\begin{aligned} 8^2 + (x+5)^2 &= (x+7)^2 \\ 64 + x^2 + 10x + 25 &= x^2 + 14x + 49 \\ 4x &= 40 \\ x &= 10. \end{aligned}$$



Luego, los lados del triángulo miden 8, 15 y 17. Por lo tanto, el seno del mayor de sus ángulos agudos es $\frac{15}{17}$.

Solución del problema 4. El alumno que empieza tiene una estrategia ganadora. En el primer movimiento coloca un 0 en el lugar correspondiente al término de grado cero. Con esto, la ecuación se convierte en $x^3 + (\ )x^2 + (\ )x = x[x^2 + (\ )x + (\ )]$, así que $x = 0$ es una solución. El segundo alumno va a colocar un número en cualquiera de los dos lugares disponibles. Digamos que dicho número es a, en cualquiera de los dos lugares. Entonces, el primero puede colocar $-(a + 1)$ en el lugar que quede vacío. Obtienen la ecuación

$$x(x^2 + ax - a - 1) = 0 \qquad \text{o} \qquad x(x^2 - (a+1)x + a) = 0.$$

Como al final la suma de los coeficientes es igual a 1, tenemos que $x = 1$ es otra solución de la ecuación. En la primera ecuación, la tercera solución es $x = -(a+1)$ y en la segunda ecuación es $x = a$.

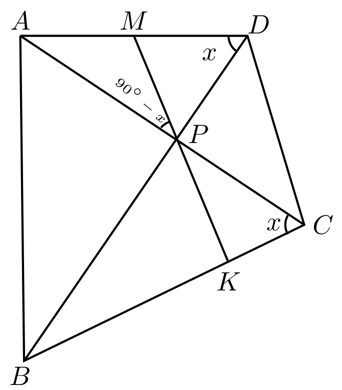
Solución del problema 5. Como cada ficha de dominó está formada por dos cuadrados, con 18 fichas de dominó el tablero queda totalmente cubierto. Imaginemos ahora una recta horizontal que separe el tablero en dos partes. Si tal recta no corta ninguna ficha de dominó, el problema está resuelto. Supongamos entonces que la recta corta por en medio sólo a una ficha de dominó. Entonces, arriba de esta recta tenemos n dominós enteros más medio dominó, es decir, $2n+1$ cuadrados, que es un número impar. Pero esto es imposible porque si el tablero tiene 6 unidades de longitud, cualquier recta lo dividirá en partes que contienen un número par de cuadrados arriba y abajo de ella. Así, si una recta corta a una ficha de dominó, deberá cortar a otra. Para la división del tablero existen 10 rectas posibles (5 rectas horizontales y 5 verticales) y si cada una de ellas corta dos dominós deberíamos tener 20 dominós en el tablero, ya que un dominó puede ser cortado sólo por una recta. Como el tablero se cubre con 18 fichas, entonces existe por lo menos una recta que no corta ninguna ficha de dominó.

Solución del problema 6. Tenemos que,

$$\begin{aligned}
9,999,999+1,999,000 &= (10^7-1)+(2\times 10^3-1)\times 10^3\\
&= (9\times 10^6+10^6-1)+(2\times 10^6-10^3)\\
&= 3\times 10^3(3\times 10^3-1)+3\times 10^6-10^3+3\times 10^3-1\\
&= 3\times 10^3(3\times 10^3-1)+3\times 10^3(10^3+1)-(10^3+1)\\
&= 3\times 10^3(3\times 10^3-1)+(10^3+1)(3\times 10^3-1)\\
&= (3\times 10^3-1)(3\times 10^3+10^3+1)\\
&= 2999\times 4001,
\end{aligned}$$

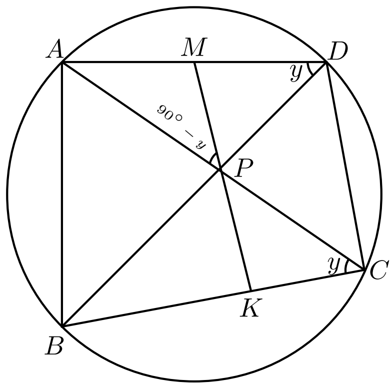
de donde se sigue que el número $9,999,999+1,999,000$ no es primo.

Solución del problema 7. Primero supongamos que las rectas MP y BC son perpendiculares. Llamemos K al punto de intersección de MP y BC, y $x=\angle ADB$. Como el triángulo APD es rectángulo y M es punto medio de AD, entonces $PM=AM=MD$. Luego, $\angle MPD=x$, de donde $\angle AMP=2x$.



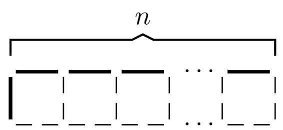
Entonces, $\angle MPA=90^\circ-x$, de donde $\angle CPK=\angle MPA=90^\circ-x$. Pero $\angle PKC=90^\circ$, entonces $\angle PCB=x$, luego, $\angle ADB=\angle ACB=x$. Por lo tanto, el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico (ver en el apéndice la definición 19 y el teorema 20).

Ahora supongamos que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico.



Como M es punto medio de la hipotenusa del triángulo rectángulo APD, entonces $PM = MA = MD$. Sea $x = \angle ADB$, entonces $\angle DAP = \angle MPA = 90° - x$, luego $\angle CPK = 90° - x$. Como el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, entonces $\angle ACB = \angle ADB = x$, de donde $\angle PKC = 180° - (90° - x + x) = 90°$. Por lo tanto, MP es perpendicular a BC.

Solución del problema 8. Observemos que hay 3^n maneras de pintar la hilera horizontal superior de palitos. El palito vertical a la izquierda de la primera línea, también se puede pintar de 3 maneras.



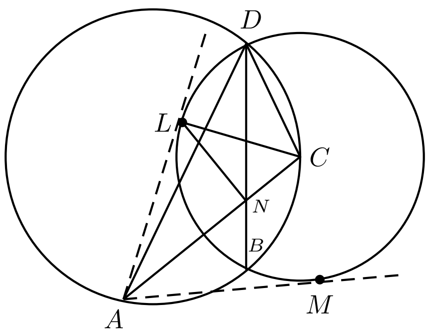
Una vez definidos los colores de los palitos superiores y del vertical que está en el extremo izquierdo, hay dos maneras de pintar los otros dos palitos que forman el primer cuadrito según las condiciones del problema.

1. Si los dos palitos que pintamos son del mismo color, entonces hay dos colores para pintar los dos palitos restantes.

2. Si los palitos que pintamos son de distinto color, entonces hay dos maneras de pintar los dos palitos restantes con estos colores.

Esta situación se repite con cada uno de los n cuadritos de la primera línea. Luego, para completar la primera línea de cuadrados hay $3^n \times 3 \times 2^n$ maneras.
Análogamente, hay 3 maneras de pintar el palito que está en el extremo izquierdo en la segunda línea, y 2^n maneras de pintar los demás palitos de esa línea. Así, para $m = 2$ hay $3^n \times 3 \times 2^n \times 3 \times 2^n = 3^n \times (3 \times 2^n)^2$ coloraciones posibles. Por lo tanto, en el caso de un arreglo de $m \times n$ cuadritos de 1×1 tenemos $3^n \times (3 \times 2^n)^m = 3^{m+n} \times 2^{mn}$ coloraciones distintas.

Solución del problema 9. Consideremos la circunferencia que circunscribe al heptágono. Como los arcos $\widehat{BC}$ y $\widehat{CD}$ son iguales, entonces $\angle DAC = \angle BDC$, luego, los triángulos ACD y DCN son semejantes. De aquí que $\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{NC}$, pero $CD = CL$ ya que son radios de la circunferencia con centro en C, de modo que $\frac{AC}{CL} = \frac{CL}{NC}$.



Luego, como el ángulo $\angle ACL$ es común para los triángulos ACL y LCN, tenemos que los triángulos ACL y LCN son semejantes por el criterio LAL (ver en el apéndice el criterio 16). Pero ACL es un triángulo rectángulo, entonces LCN también lo es, con ángulo recto en N. Por lo tanto, LN es perpendicular a AC. Por otra parte, como $CD = CM$, entonces $\frac{AC}{CM} = \frac{CM}{NC}$ y de manera análoga llegamos a que MN es perpendicular a AC. Por lo tanto, L, M y N son colineales.

Solución del problema 10. Sean

$$a = x - y \qquad \text{y} \qquad b = \frac{2xy}{x-y}.$$

Como $xy = 2$, tenemos que $b = \frac{4}{x-y}$. Además, $x > y > 0$ implica que $a > 0$ y $b > 0$. Luego, aplicando la desigualdad MA-MG (ver en el apéndice el teorema 4), tenemos que

$$\frac{x^2+y^2}{x-y} = x - y + \frac{2xy}{x-y} = a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{(x-y)\left(\frac{4}{x-y}\right)} = 2\sqrt{4} = 4,$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $a = b$. Observemos que el menor valor posible de $\frac{x^2+y^2}{x-y}$ se da cuando se cumple la igualdad, es decir, si existen números x, y, con $x > y > 0$, tales que,

$$xy = 2 \qquad \text{y} \qquad x - y = \frac{4}{x-y}.$$

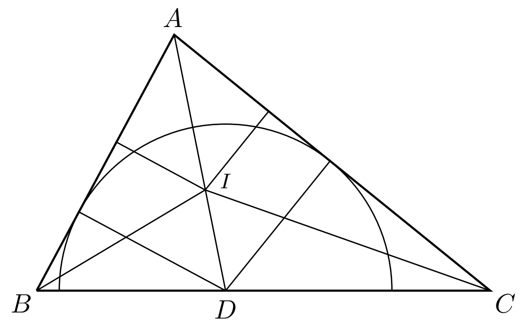
De la igualdad $xy = 2$, tenemos que $y = \frac{2}{x}$. Sustituyendo esta última igualdad en

$x - y = \frac{2xy}{x-y}$ y simplificando, tenemos que

$$\begin{aligned} x^2 - 8 + \frac{4}{x^2} &= 0 \\ (x^2)^2 - 8x^2 + 4 &= 0 \\ x^2 &= \frac{8 \pm \sqrt{64-16}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Tomando la solución $x = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3}+1$ y $y = \frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}-1$, tenemos que $x > y > 0$, $xy = 2$ y $\frac{x^2+y^2}{x-y} = 4$. Por lo tanto, el valor mínimo buscado es 4.

Solución del problema 11. Sea I el incentro de ABC y D el centro del semicírculo sobre BC. Si desde I y D trazamos las alturas sobre AB y AC, entonces sus longitudes son r y r_a, respectivamente. Sean a, b y c las longitudes de BC, AC y AB, respectivamente, y usemos la notación (ABC) para representar al área del triángulo ABC.



Es fácil ver que

$$2(ABD) = cr_a, \qquad 2(ACD) = br_a,$$

entonces $2(ABC) = (b+c)r_a$. Además,

$$2(IAB) = cr, \quad 2(IAC) = br.$$

Razonando de manera análoga a partir de los semicírculos sobre AB y AC obtenemos,

$$2(ABC) = (c+a)r_b = (a+b)r_c \qquad \text{y} \qquad 2(IBC) = ar.$$

Como $(IAB) + (IAC) + (IBC) = (ABC)$, tenemos que $2(ABC) = (a+b+c)r$, de donde se sigue

$$(b+c)r_a = (c+a)r_b = (a+b)r_c = (a+b+c)r.$$

Usando lo anterior, tenemos que

$$(a+b+c)\left(\frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c}\right) = (b+c) + (c+a) + (a+b) = 2(a+b+c).$$

Por último, dividiendo la ecuación anterior entre $r(a+b+c)$ obtenemos el resultado deseado.

Solución del problema 12. En un primer acercamiento contaremos todas las formas de factorizar $1,000,000 = abc$, considerando que (a, b, c) es distinto de (a, c, b) etc., asimismo consideraremos los casos donde uno o más factores son iguales a 1. A este primer acercamiento le llamaremos la *cuenta burda*.
Usando la factorización en primos del número $1,000,000 = 2^6 \cdot 5^6$ y sabiendo que $\binom{n+k-1}{k-1}$ nos permite calcular el número de formas de acomodar n objetos idénticos en k casilleros[4], tenemos que hay $\binom{8}{2} = 28$ formas de distibuir los seis factores 2 en tres casilleros o grupos (a, b y c). Lo mismo ocurre para los factores 5. Entonces la cuenta burda es igual a $28^2 = 784$. Ahora, procederemos a refinar nuestro cálculo con la ayuda de un análisis por casos:

- **Caso 1** ($a = b = c$). Este caso es único.

- **Caso 2** ($a = b \neq c$). Como $a = b$, tenemos que a debe ser de la forma $2^m \cdot 5^n$, donde $0 \leq m, n \leq 3$. Hay $(4)(4) = 16$ casos disintos de este tipo, siendo uno de ellos el caso $a = b = c$. Observemos que cada uno de los otros 15 casos fue contado 3 veces en la cuenta burda.

- **Caso 3** ($a \neq b \neq c \neq a$). Si quitamos de la cuenta burda las ternas de los casos 1 y 2, nos quedan $784 - 1 - (15)(3) = 738$ ternas de este tipo, mismas que corresponden a un número menor de factorizaciones escencialmente distintas, pero que fueron contadas 6 veces cada una. Por lo tanto, hay $\frac{738}{6} = 123$ casos distintos de este tipo.

Considerando el análisis anterior, sólo hay $1 + 15 + 123 = 139$ factorizaciones distintas, pero aún debemos eliminar los casos donde uno o dos de los factores son 1. Para facilitar la cuenta, supondremos, si pérdida de generalidad, que $a = 1$; es decir que $bc = 2^6 \cdot 5^6$. Por la observación hecha en el primer párrafo, es fácil ver que hay $\binom{7}{1} = 7$ formas de distribuir los factores 2 y lo mismo sucede para los factores 5, lo que nos da un total de 49 casos. De ellos, uno es el caso $b = c$ y los otros 48 están formados por 24 factorizaciones escencialmente distintas, pero que han sido contadas doble. Por lo tanto el número de casos distintos que tienen factores 1 es $24 + 1 = 25$. Finalmente concluimos que la solución es $139 - 25 = 114$.

Solución del problema 13. Sean a, ar y ar^2 los números de la terna. Como son números enteros tenemos que a y r son números racionales. Sea $r = \frac{x}{y}$ la razón geométrica, donde x, y son primos relativos. Dado que $a\left(\frac{x}{y}\right)^2$ es un entero y $\text{mcd}(x, y) = 1$, entonces existe un entero n tal que $a = ny^2$. Como $a + ar + ar^2 = 111$ tenemos que $n\left(y^2 + xy + x^2\right) = 111 = 3 \times 37$. De lo anterior se concluye que $\left(y^2 + xy + x^2\right)$ es 3, 37 ó 111.

[4]Para ver esto, considere que los n objetos son puestos en una hilera junto con $(k-1)$ objetos distintos intercalados entre ellos y que sirven como separadores. El resultado anterior se obtiene fácilmente al contar el número de formas de colocar los separadores.

Consideremos la siguiente tabla donde se muestran todos los valores para $(y^2 + xy + x^2)$, donde x toma el valor de la columna y y el del renglón, con $y \leq x$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**3**	7	13	21	31	43	57	73	91	**111**
2		12	19	28	39	52	67	84	103	
3			27	**37**	49	63	79	97		
4				48	61	76	93			
5					75	91				
6						108				

De aquí obtenemos las soluciones: $x = y = 1, n = 37$; $x = 10, y = 1, n = 1$; $x = 4$, $y = 3$, $n = 3$. Para obtener todas las posibilidades basta completar con las soluciones para el caso $y > x$. De lo anterior concluimos que las ternas buscadas son: $(37, 37, 37)$, $(1, 10, 100)$, $(100, 10, 1)$, $(27, 36, 48)$ y $(48, 36, 27)$.

Solución del problema 14. Comencemos por la segunda parte y veamos que cualquier colección de 18 segmentos con longitudes menores o iguales que 2010 siempre contendrá una terna con la que es posible construir un triángulo.
Procedamos por contradicción y supongamos que existe una colección de 18 segmentos $m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_{18} \leq 2010$ tal que con ninguna terna es posible construir un triángulo. Entonces, por la desigualdad del triángulo (ver en el apéndice el teorema 9), tenemos que

$$m_1 \geq 1,\ m_2 \geq 1,\ m_3 \geq m_1+m_2 \geq 2,\ m_4 \geq m_2+m_3 \geq 3,\ m_5 \geq m_3+m_4 \geq 5, \ldots$$

Si observamos la sucesión formada por los términos derechos de estas desigualdades, descubriremos que se trata de la sucesión de Fibonacci (ver en el apéndice la definición 5). Deducimos entonces que, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, 18\}$, $m_i \geq F_i$. En particular tenemos que $m_{18} \geq F_{18} = 2584$, lo que es una contradicción.
Lo anterior, también nos ayuda a resolver la primera parte del problema, pues si tomamos la colección de segmentos con longitudes $F_1, F_2, \ldots, F_{17}$, dada cualquier terna (F_i, F_j, F_k) (sin pérdida de generalidad supondremos que $i < j < k$), tenemos que $F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \geq F_j + F_i$, y por lo tanto no es posible construir un triángulo con ellos. Nótese que esta colección de segmentos cumple con todos los requerimientos del problema ya que para toda $s \in \{1, 2, \ldots, 17\}$, se cumple que $F_s \leq F_{17} = 1597 < 2010$.

Solución del problema 15. Como $11^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod{10}$, cualquier potencia de 11 termina en 1. Es así, que nos interesan aquellas potencias que terminan en 11, o sea, debemos caracterizar los números naturales n que satisfacen $11^n \equiv 11 \pmod{100}$. Aplicando el teorema del binomio (ver en el apéndice el teorema 6), tenemos que

$$11^n = (10+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 10^k \equiv 1 + 10n \pmod{100},$$

pues a partir de $k = 2$ todos los términos de la suma son múltiplos de 100. Luego,

$$11^n \equiv 11 \pmod{100} \;\Leftrightarrow\; 10n \equiv 10 \pmod{100} \;\Leftrightarrow\; n \equiv 1 \pmod{10}.$$

Con lo que hemos probado que 11^n tiene sus últimos dígitos iguales si y sólo si n termina en 1.
Supongamos ahora que los tres últimos dígitos de 11^n son iguales. Por lo anterior, n es de la forma $10k+1$ y $11^n \equiv 111 \pmod{1000}$. Empleando nuevamente el teorema del binomio tenemos

$$111 \equiv \tbinom{n}{2}\, 10^2 + \tbinom{n}{1}\, 10 + 1 = \tfrac{n(n-1)}{2} 10^2 + 10n + 1 \pmod{1000},$$

por lo que

$$111 \equiv 5k(10k+1)10^2 + 10(10k+1) + 1 \equiv 600k + 11 \pmod{1000},$$

de donde se sigue que

$$100 \equiv 600k \pmod{1000} \quad \text{y} \quad 1 \equiv 6k \pmod{10},$$

lo que, por paridad, es imposible. En consecuencia ninguna potencia de 11 puede tener sus tres últimos dígitos iguales.

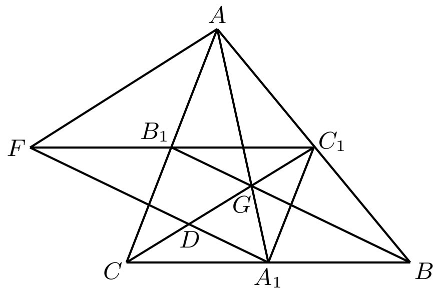
Solución del problema 16. Sea $d = b - a$. Entonces hay $(a+d)^2 - a^2 + 1 = 2ad + d^2 + 1$ enteros en consideración, de los cuales $d+1$ son cuadrados perfectos. Luego, necesitamos que $100(d+1) = 2ad + d^2 + 1$, de donde

$$a = \frac{100(d+1) - d^2 - 1}{2d} = \frac{100-d}{2} + \frac{99}{2d}.$$

Si d es par, el primer término es un entero y el segundo término no lo es. Luego, d debe ser impar. Entonces, el primer término es una fracción con denominador igual a 2, de modo que el segundo término debe ser también una fracción con denominador igual a 2. Esto significa que d debe ser un divisor de 99, es decir, $d = 1, 3, 9, 11, 33$ ó 99.

- Si $d = 1$, entonces $a = \frac{99}{2} + \frac{99}{2} = 99$ y $b = 99 + 1 = 100$.
- Si $d = 3$, entonces $a = \frac{97}{2} + \frac{99}{6} = 65$ y $b = 65 + 3 = 68$.
- Si $d = 9$, entonces $a = \frac{91}{2} + \frac{99}{18} = 51$ y $b = 51 + 9 = 60$.
- Si $d = 11$, entonces $a = \frac{89}{2} + \frac{99}{22} = 49$ y $b = 49 + 11 = 60$.
- Si $d = 33$, entonces $a = \frac{67}{2} + \frac{99}{66} = 35$ y $b = 35 + 33 = 68$.
- Si $d = 99$, entonces $a = \frac{1}{2} + \frac{99}{198} = 1$ y $b = 1 + 99 = 100$.

Solución del problema 17. Dado que $BB_1 \parallel A_1F$ y $FC_1 \parallel BC$, tenemos que $\angle AC_1B_1 = \angle ABC$ y $\angle AGB_1 = \angle AA_1F$. Luego, los ángulos ABC y AA_1F son iguales si y sólo si el cuadrilátero AB_1GC_1 es cíclico.



Además, como $B_1CA_1C_1$ es un paralelogramo, los ángulos ACB y FC_1A_1 son iguales. Entonces $\angle ACB = \angle FAA_1$ si y sólo si el cuadrilátero AFA_1C_1 cíclico, si y sólo si AB_1GC_1 es cíclico.
Otra manera de terminar. Ya que FA_1BB_1 es un paralelogramo, tenemos que $B_1F = BA_1 = B_1C_1$. De lo anterior se tiene que $AFCC_1$ es un paralelogramo ya que sus diagonales se bisecan mutuamente. Sea D el punto de intersección de A_1F y CC_1. Luego, $\angle AFA_1 = \angle FDC = \angle B_1GC$, y de aquí $\angle AFA_1 = \angle BAC$ si y sólo si AB_1GC_1 es cíclico.

Solución del problema 18. Tenemos que

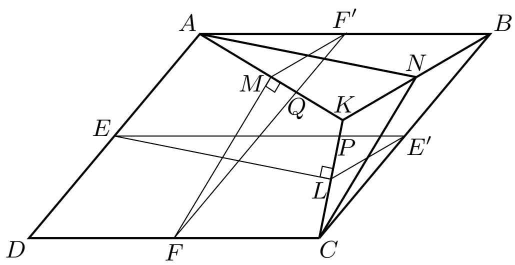
$$(a+1)^{a+1} = (a+1)^a(a+1) = a(a+1)^a + (a+1)^a$$

para todo número a. Hagamos $a = 3^{3t}$ para un entero positivo arbitrario t. Entonces,

$$a = (3^t)^3 \quad \text{y} \quad (a+1)^a = ((3^{3t}+1)^{3^{3t-1}})^3$$

son ambos cubos de enteros.
Si hacemos $k = 3^{3t}+1$, $m = 3^t(3^{3t}+1)^{3^{3t-1}}$ y $n = (3^{3t}+1)^{3^{3t-1}}$, entonces $k^k = m^3 + n^3$. Como t es un entero positivo arbitrario, las posibilidades para k son infinitas.

Solución del problema 19. Sean E, F, E', F', L y M los puntos medios de los segmentos AD, DC, CB, BA, CK y AK respectivamente. Sean también, P el punto de intersección de las rectas CK y EE', y Q el punto de intersección de las rectas AK y FF'. Tenemos que los segmentos MF' y NB, así como FF' y BC son iguales y paralelos. Entonces, los triángulos BCN y $F'FM$ son congruentes y los ángulos BCN y $F'FM$ son iguales. Además $\angle AF'F = \angle ABC$.



Puesto que $\angle AQF$ es un ángulo exterior del triángulo $AF'Q$, se tiene que

$$\angle AQF = \angle AF'Q + \angle QAF' = \angle ABC + \angle BAN + \angle NAK$$

Por otro lado como F está a la misma distancia de A y de K, FM es la mediatriz de AK. Luego,

$$\angle QFM + \angle MQF = \angle BCN + \angle ABC + \angle BAN + \angle NAK = 90^\circ \qquad (1)$$

Análogamente, para el triángulo $EE'L$

$$\angle PEL + \angle EPL = \angle BAN + \angle ABC + \angle BCN + \angle NCK = 90^\circ \qquad (2)$$

Finalmente, de (1) y (2), se sigue que $\angle NAK = \angle NCK$.

Solución del problema 20. Sean $2 \leq a \leq 100$ y $2 \leq b \leq 100$ enteros distintos y supongamos que el número $a^{2^n} + b^{2^n}$ es primo para todo entero positivo n. Consideremos el número primo $257 = 2^8 + 1$. Como 257 es primo relativo con a y con b, tenemos por el pequeño teorema de Fermat (ver en el apéndice el teorema 3),

$$a^{2^8} = a^{257-1} \equiv 1 \pmod{257} \quad \text{y} \quad b^{2^8} = b^{257-1} \equiv 1 \pmod{257}.$$

Luego, $a^{2^8} \equiv b^{2^8} \pmod{257}$ y por lo tanto

$$a^{2^8} - b^{2^8} = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)\cdots(a^{2^7}+b^{2^7})$$

es múltiplo de 257. Como $2 \leq a \leq 100$ y $2 \leq b \leq 100$, es claro que $a-b$ y $a+b$ no son múltiplos de 257. Luego, 257 divide a $a^{2^k} + b^{2^k}$ para algún entero $1 \leq k \leq 7$. Ya que $a^{2^k} + b^{2^k}$ es primo por hipótesis, se sigue que $a^{2^k} + b^{2^k} = 257$. En particular, 257 es suma de dos cuadrados. Es fácil ver que las únicas formas de escribir a 257 como suma de dos cuadrados de enteros positivos son $1^2 + 16^2 = 257$ y $16^2 + 1^2 = 257$, de modo que alguno de los números a^{2^k} o b^{2^k} es igual a 1. Esto es una contradicción ya que a y b son enteros mayores que 1. Por lo tanto, hay un entero positivo n tal que $a^{2^n} + b^{2^n}$ no es primo.

Problemas propuestos

Problemas propuestos.
Año 2010 No. 4.

Tzaloa se construye con la contribución de todos y esta sección está especialmente diseñada para que sus lectores tengan un espacio de participación. A continuación, presentamos 5 problemas nuevos que necesitan de ti para encontrar su respuesta.

A partir de este número y con el fin de dar más tiempo a que nuestros lectores puedan enviar sus soluciones, las respuestas de los problemas propuestos en cualquier número de la revista, se publicarán con tres números de diferencia. Es así, que los problemas propuestos en esta ocasión, se publicarán en Tzaloa No. 3, año 2011, por lo que aprovecha ahora que tienes más tiempo y envíanos tus contribuciones cuanto antes.

Ponemos a tu disposición nuestra dirección electrónica `revistaomm@gmail.com` ya que a través de ella estaremos recibiendo con gusto todas las soluciones que nos lleguen desde cualquier rincón del país.

Problema 1. (Introductorio) Un entero positivo n se llama *completo* si satisface la siguiente propiedad: Si a es un dígito de n, entonces el número $9 - a$ también es un dígito de n. Por ejemplo, el número $465,930$ es completo, mientras que el número $3,671$ no lo es. ¿Cuántos números completos hay entre 1 y 10^6?
(Nota: El número 9 se considera completo ya que se puede escribir como 09).

Problema 2. (Intermedio) Sean $a_1, a_2, \ldots, a_8$ ocho enteros distintos cualesquiera escogidos del conjunto $A = \{1, 2, \ldots, 16, 17\}$. Demuestra que existe un entero $k > 0$ tal que la ecuación $a_i - a_j = k$ tiene al menos 3 soluciones diferentes. Además encuentra un subconjunto de A con 7 elementos tal que la ecuación $a_i - a_j = k$ no tenga tres soluciones distintas para ningún valor de $k > 0$.

Problema 3. (Intermedio) En un triángulo ABC la mediana y la altura desde el vértice A dividen al ángulo $\angle BAC$ en tres ángulos de áreas iguales. Determina las medidas de los ángulos del triángulo ABC.

Problema 4. (Avanzado) Sean a, b, c y d números reales tales que $a^2+b^2+c^2+d^2 \leq 1$. Determina el valor máximo de la suma

$$(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4.$$

Problema 5. (Avanzado) Sea n un entero positivo. Demuestra que

$$\frac{S(2n)}{2} \leq S(n) \leq 5 \cdot S(2n)$$

donde $S(n)$ denota la suma de los dígitos de n.
Demuestra también que existe un entero positivo n tal que

$$S(n) = 2010 \cdot S(3n).$$

Soluciones a los problemas propuestos. Año 2010 No. 2.

A continuación publicamos las soluciones de los problemas propuestos que aparecieron en Tzaloa 2, año 2010. Recuerda que esta revista necesita de ti y ten la seguridad que en el próximo número nos encantaría poder publicar tus soluciones. En esta ocasión nos da mucho gusto felicitar a Daniel Antonio Martínez Muñoz, del estado de Chihuahua, quien nos envió la solución del problema 1; y a Francisco Gómez Hernández, del estado de Hidalgo, quien nos envió la solución del problema 3.

Problema 1. (Introductorio) Si se sabe que $\dfrac{xy}{x^2+y^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$, calcula el valor de

$$\left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{x}{y}\right)^{-4}.$$

Solución de Daniel Antonio Martínez Muñoz. Buscamos el valor de $(\frac{x}{y})^4 + (\frac{y}{x})^4$.
Sabemos que $6xy = \sqrt{3}(x^2+y^2)$, luego si dividimos la expresión anterior por xy, obtenemos, $6 = \sqrt{3}(\frac{x}{y}) + \sqrt{3}(\frac{y}{x}) = \sqrt{3}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$, entonces tenemos que, $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} = 2\sqrt{3}$. Llamemos $a = \frac{x}{y}$ y $b = \frac{y}{x}$, entonces buscamos a^4+b^4.
Tenemos que, $(a+b)^4 = (2^4)\cdot(\sqrt{3})^4 = 16\cdot 9 = 144$.
Además, $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$. Pero $ab=1$, entonces $6a^2b^2 = 6$, luego $(a+b)^4 = a^4+b^4+4ab(a^2+b^2)+6 = 144$, de donde $a^4+b^4 = 138-4(a^2+b^2)$.
Pero $(a+b)^2 = (2\sqrt{3})^2 = a^2+b^2+2ab$, entonces $a^2+b^2 = 10$.

Luego, $a^4 + b^4 = 138 - 4(a^2 + b^2) = 138 - 4(10) = 138 - 40 = 98$. Por lo tanto, $a^4 + b^4 = 98$, que es el valor que buscábamos.

Problema 2. (Introductorio) Los números $1, 2, 3, \ldots, 24, 25$ se han escrito en las casillas de un tablero cuadrado de 5×5, de tal forma que los números en cada renglón están ordenados en forma creciente de izquierda a derecha. Halla el máximo valor posible de la suma de los números que están en la tercera columna.

Solución. Observemos que dado que los números en cada fila deben estar ordenados en forma creciente de izquierda a derecha, tenemos que hacer que la suma de los números de la tercera y cuarta columna difieran lo menos posible, así como los de la cuarta y quinta columna. Un ejemplo es:

1	2	23	24	25
3	4	20	21	22
5	6	17	18	19
7	8	14	15	16
9	10	11	12	13

donde los números de la tercera columna suman 85.
Demostraremos que la suma máxima para los números de la tercera columna es 85. Sea A_i la suma de los números de la i-ésima columna, con $1 \leq i \leq 5$. Debemos demostrar que $A_3 \leq 85$. Si a y b son dos números en el mismo renglón, con a en la tercera columna y b en la cuarta, entonces $a < b$, o de manera equivalente, $a + 1 \leq b$. Aplicando esta desigualdad a todos los números de esas columnas y sumando los resultados obtenidos tenemos que $A_3 + 5 \leq A_4$ y $A_4 + 5 \leq A_5$. Luego, $A_3 + 10 \leq A_5$, y por lo tanto,

$$(A_3 + 10) + (A_3 + 5) + A_3 = 3A_3 + 15 \leq A_3 + A_4 + A_5.$$

Por otro lado, $A_3 + A_4 + A_5$ representa la suma de los 15 números de las tres últimas columnas, pero dicha suma es menor o igual que la suma de los 15 números mayores que están escritos en el tablero, es decir,

$$A_3 + A_4 + A_5 \leq 25 + 24 + 23 + \cdots + 12 + 11 = 270.$$

Luego,

$$3A_3 + 15 \leq A_3 + A_4 + A_5 \leq 270,$$

de donde $A_3 \leq 85$, que es lo que queríamos demostrar.

Problema 3. (Intermedio) Si x es un número real tal que $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$, determina los valores posibles de la expresión $x^5 + \frac{1}{x^5}$.

Solución de Francisco Gómez Hernández. Recordemos la siguiente factorización:

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4).$$

Ahora, ocupando esta factorización con $a = x$ y $b = \frac{1}{x}$, tenemos que,

$$\begin{aligned} x^5 + \frac{1}{x^5} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^4 - x^3\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 - x\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^4\right) \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 1\right). \end{aligned}$$

Pero $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$, y podemos calcular el valor de $x^4 + \frac{1}{x^4}$, entonces

$$x^4 + \tfrac{1}{x^4} = \left(x^4 + 2 + \tfrac{1}{x^4}\right) - 2 = \left(x^2 + \tfrac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 7^2 - 2 = 49 - 2 = 47.$$

Por lo tanto,

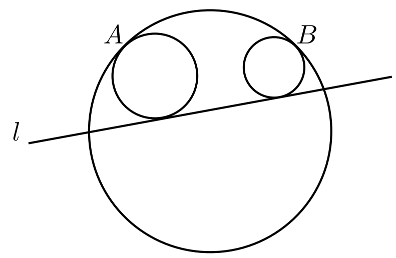
$$\begin{aligned} x^5 + \frac{1}{x^5} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 1\right) \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)((47) - (7) + 1) \\ &= 41\left(x + \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

De aquí, si conocemos todos los valores posibles de $x + \frac{1}{x}$ obtendremos todos los valores posibles de $x^5 + \frac{1}{x^5}$. Ahora recordemos que,

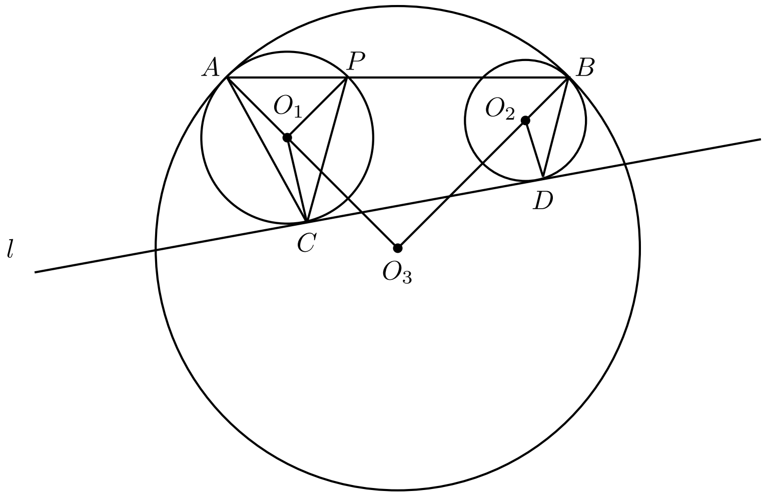
$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 \Rightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right) = \pm 3.$$

Entonces todos los valores posibles de la expresión son $\pm 3(41) = \pm 123$.

Problema 4. (Intermedio) Sean ω_1 y ω_2 dos circunferencias que no se intersectan, tienen radios distintos y son tangentes interiormente a una circunferencia ω_3 en los puntos A y B, respectivamente. Se traza la recta l tangente común a ω_1 y ω_2, tal como se muestra en la figura. Demuestra que las rectas AB, l y la que pasa por los centros de ω_1 y ω_2, son concurrentes. (Problema sugerido por Irving Daniel Calderón Camacho).



Solución. Sea O_i el centro de ω_i para $i = 1, 2, 3$. Sean $P \neq A$ el punto de intersección de AB con ω_1, y C, D los puntos de tangencia de l con ω_1 y ω_2, respectivamente.



Veamos que los triángulos O_1CP y O_2DB son isósceles y semejantes. Son isósceles ya que dos de sus lados son radios de ω_1 y ω_2, respectivamente. Para ver que son semejantes basta probar que $\angle PO_1C = \angle BO_2D$.
El triángulo AO_3B es isósceles, por lo que $\angle BAO_3 = \angle O_3BA$, y como el triángulo AO_1P también es isósceles, concluimos que $\angle O_1PA = \angle BAO_3 = \angle O_3BA$, por lo que O_1P y O_2B son paralelas. Por otra parte, O_1C es paralela a O_2D ya que son perpendiculares a l. Luego, tenemos que $\angle PO_1C = \angle BO_2D$ y los triángulos O_1CP y O_2DB son semejantes. Además, PC es paralela a BD.
Finalmente, como los triángulos O_1CP y O_2DB tienen sus respectivos lados paralelos y son de tamaño distinto, por el teorema de Desargues (ver en el apéndice la definición 21 y el teorema 22) sabemos que los triángulos están en perspectiva desde un punto. Entonces, CD, O_1O_2 y AB concurren en dicho punto.

Problema 5. (Avanzado) Un entero $n > 1$ tiene la siguiente propiedad: para cada divisor positivo d de n, $d+1$ es un divisor de $n+1$. Demuestra que n es un número primo.

Solución. Sea p el menor divisor primo de n, y sea $d = \frac{n}{p}$. Entonces, por hipótesis, tenemos que $\frac{np+p}{n+p} = \frac{p(n+1)}{p(d+1)} = \frac{n+1}{d+1}$ es un entero. Como $n+p$ también divide a $np+p^2 = p(n+p)$, entonces $n+p$ debe dividir a la diferencia $(np+p^2)-(np+p) = p^2-p$. Luego, $n+p \leq p^2-p$, ya que p^2-p es positivo. Por lo tanto, $n < p^2$ y de aquí $d = \frac{n}{p} < \frac{p^2}{p} = p$. Ahora, si d tuviera un divisor primo q, entonces $q \leq d < p$. Como q también divide a n, entonces por la minimalidad de p tenemos que $q \geq p$, lo que es una contradicción. Luego, d no tiene divisores primos y por lo tanto $d = 1$. Así, $n = p$ es primo.

Olimpiadas Internacionales

A continuación presentamos los resultados y los exámenes de las distintas olimpiadas internacionales en las que México participó en este año 2010.

51^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas

Del 2 al 14 de julio de 2010, se llevó a cabo la 51^a Olimpiada Internacional de Matemáticas en Astana, Kazajstán, con la participación de 517 competidores provenientes de 96 países.

El desempeño de México en esta olimpiada internacional fue muy bueno ya que logró colocarse en el primer tercio de la lista de países participantes, segundo lugar de los países iberoamericanos, por encima de Argentina, España y Brasil. Además, por primera ocasión, cinco de los seis integrantes de la delegación mexicana obtuvieron medalla.

La delegación mexicana estuvo integrada por Daniel Perales Anaya (Morelos), Flavio Hernández González (Aguascalientes), José Luis Miranda Olvera (Jalisco), Irving Daniel Calderón Camacho (Estado de México), Diego Alonso Roque Montoya (Nuevo León), y Manuel Enrique Dosal Bustillos (Chihuahua). Todos ellos alumnos menores de 18 años y Diego, el más jóven de los participantes de México, con tan solo 14 años de edad. Daniel se vió galardonado con una medalla de plata; Flavio, José Luis, Irving Daniel y Diego obtuvieron, cada uno, una medalla de bronce; y Manuel recibió una mención honorífica.

A continuación presentamos el examen de la 51^a Olimpiada Internacional de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlo.

Problema 1. Determine todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que

$$f(\lfloor x\rfloor y)=f(x)\lfloor f(y)\rfloor$$

para todos los números $x,y\in\mathbb{R}$. ($\lfloor z\rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que z.)

Problema 2. Sea ABC un triángulo, I su incentro y Γ su circunferencia circunscrita. La recta AI corta de nuevo a Γ en D. Sean E un punto en el arco $\widehat{BDC}$ y F un punto en el lado BC tales que

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Sea G el punto medio del segmento IF. Demuestre que las rectas DG y EI se cortan sobre Γ.

Problema 3. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros positivos. Determine todas las funciones $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

es un cuadrado perfecto para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Problema 4. Sea Γ la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y P un punto en el interior del triángulo. Las rectas AP, BP y CP cortan de nuevo a Γ en los puntos K, L y M, respectivamente. La recta tangente a Γ en C corta a la recta AB en S. Si se tiene que $SC = SP$, demuestre que $MK = ML$.

Problema 5. En cada una de las seis cajas $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ hay inicialmente sólo una moneda. Se permiten dos tipos de operaciones:

Tipo 1: Elegir una caja no vacía B_j, con $1 \leq j \leq 5$. Retirar una moneda de B_j y añadir dos monedas a B_{j+1}.

Tipo 2: Elegir una caja no vacía B_k, con $1 \leq k \leq 4$. Retirar una moneda de B_k e intercambiar los contenidos de las cajas (posiblemente vacías) B_{k+1} y B_{k+2}.

Determine si existe una sucesión finita de estas operaciones que deja a las cajas B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 vacías y a la caja B_6 con exactamente $2010^{2010^{2010}}$ monedas. (Observe que $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Problema 6. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión de números reales positivos. Se tiene que para algún entero positivo s,

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \text{ tal que } 1 \leq k \leq n-1\}$$

para todo $n > s$. Demuestre que existen enteros positivos l y N, con $l \leq s$, tales que $a_n = a_l + a_{n-l}$ para todo $n \geq N$.

Problemas y Soluciones de Olimpiadas Internacionales

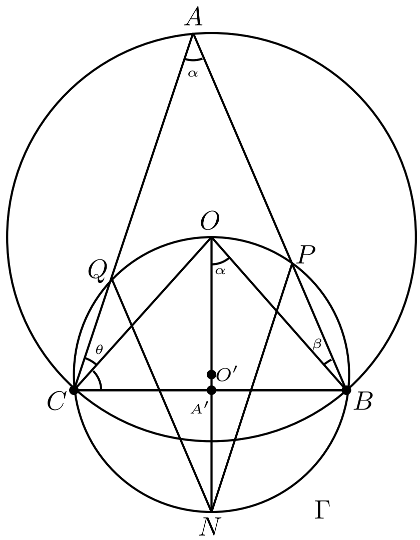
XXII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico

Desde 1991, los ganadores del Concurso Nacional participan anualmente en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, APMO, por sus siglas en inglés. En México, el 8 de marzo de este año, se aplicó el examen de la XXII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico a los alumnos que en ese momento formaban parte de la preselección nacional. Dicho examen se calificó en México y los 10 mejores exámenes se enviaron, para ser evaluados, al país organizador que en esta ocasión fue Japón. Los alumnos que obtuvieron medalla fueron: Daniel Perales Anaya (Morelos) y Flavio Hernández González (Aguascalientes) obtuvieron medalla de plata; Fernando Josafath Añorve López (Nuevo León), José Luis Miranda Olvera (Jalisco), Irving Daniel Calderón Camacho (Estado de México), José Ramón Guardiola Espinosa (San Luis Potosí) y Julio César Díaz Calderón (Oaxaca), obtuvieron medalla de bronce; Fernando Ignacio Arreola Gutiérrez (Aguascalientes), obtuvo una mención honorífica. México ocupó el lugar número 15 de los 33 países participantes.

A continuación presentamos el examen con sus soluciones de la XXII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico. Los alumnos tuvieron 4 horas para resolverlo.

Problema 1. Sea ABC un triángulo con $\angle BAC \neq 90°$. Sea O el circuncentro del triángulo ABC y sea Γ el circuncírculo del triángulo BOC. Suponga que Γ intersecta a los segmentos AB y AC en los puntos P (diferente de B) y Q (diferente de C), respectivamente. Sea ON el diámetro del círculo Γ. Muestra que el cuadrilátero $APNQ$ es un paralelogramo.

Solución de Julio César Díaz Calderón. Como $\angle CAB \neq 90°$, entonces C, O y B no son colineales, luego el triángulo OBC no es degenerado.



Llamemos A' al punto medio del lado BC, O' al centro de Γ, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABO = \beta$ y $\angle ACO = \theta$. Como $\angle BOC$ es un ángulo central y α es un ángulo inscrito, tenemos que $\angle BOC = 2\alpha$. Como el triángulo OBC es isósceles (pues $OB = OC$ al ser radios del circuncírculo) tenemos que la mediatriz OA' es también altura del triángulo BOC y bisectriz del ángulo BOC, entonces $\angle BOO' = \angle O'OC = \frac{\angle BOC}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$.
Llamemos Criterio 1, al hecho de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$. Entonces, por el Criterio 1 aplicado a los triángulos OBA' y $OA'C$, y porque $\angle OA'B = \angle OA'C = 90°$ y $\angle BOA' = \angle A'OC = \alpha$, tenemos que $\angle OBA' = \angle OCA' = 90° - \alpha$.
Ahora, $\angle PBO = \angle PNO = \beta$ y $\angle ONQ = \angle OCQ = \theta$ por abrir el mismo arco en Γ, entonces $\angle PNQ = \angle PNO + \angle ONQ = \beta + \theta$.
Tenemos que,

$$\begin{aligned} \angle BAC + \angle ACB + \angle CBA &= 180° \\ \alpha + (\theta + 90° - \alpha) + (90° - \alpha + \beta) &= 180° \\ \theta + 180° - \alpha + \beta &= 180° \\ \theta + \beta &= \alpha, \end{aligned}$$

entonces, $\angle PNQ = \alpha$.
Finalmente, $\angle NOB = \angle NPB$, por abrir el mismo arco, y $\angle NOB = \alpha$, entonces $\angle NPB = \alpha$. Luego, $\alpha = \angle QNP = \angle NPB$, entonces AP es paralela a QN. También, como $\alpha = \angle NPB = \angle QAP$, tenemos que QA es paralela a PN. Por lo tanto, $APNQ$ es un paralelogramo.

Problema 2. Dado un entero positivo k, decimos que un entero es una *potencia k-ésima pura* si puede ser representado como m^k para algún entero m. Muestra que para cada entero positivo n existen n enteros positivos distintos tales que su suma es una potencia 2009-ésima pura, y su producto es una potencia 2010-ésima pura.

Solución. Por simplicidad, tomemos $k = 2009$. En primer lugar escojamos, convenientemente, n enteros positivos distintos $b_1, b_2, \ldots, b_n$ de manera que su producto sea una $(k+1)$-ésima potencia pura. Por ejemplo, si hacemos $b_i = i^{k+1}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, tenemos que $b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_n = t^{k+1}$, para algún entero positivo t. Sea $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = s$. Ahora, tomemos $a_i = b_i s^{k^2-1}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Probaremos que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfacen las condiciones del problema.
Como $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son enteros positivos distintos, entonces es claro que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ también lo son. Además:

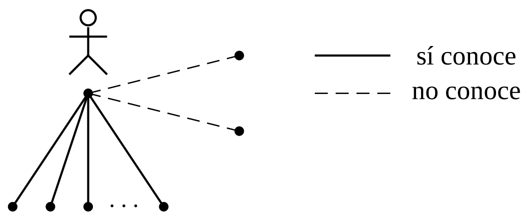
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s^{k^2-1}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = s^{k^2} = (s^k)^{2009},$$

y

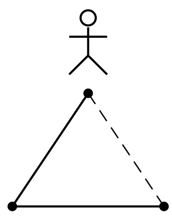
$$\begin{aligned} a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n &= \left(s^{k^2-1}\right)^n b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_n \\ &= \left(s^{k^2-1}\right)^n t^{k+1} \\ &= \left(s^{(k+1)(k-1)}\right)^n t^{k+1} \\ &= \left(s^{2008n} t\right)^{2010}. \end{aligned}$$

Problema 3. Sea n un entero positivo. En cierta fiesta asisten n personas. Para cualquier par de participantes, o los dos se conocen entre ellos o los dos no se conocen entre ellos. Encuentra el máximo número posible de parejas tal que en cada pareja, las dos personas no se conocen entre sí pero existe un amigo en común entre los participantes de la fiesta.

Solución de Fernando Josafath Añorve López. Diremos que las parejas que no se conocen pero que tienen un amigo en común son *buenas*. Tomemos a una persona de la fiesta y supongamos que conoce a todos, pero que los demás no se conocen entre sí, entonces con estas $n-1$ personas, podemos formar $\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ parejas buenas. Con n personas se pueden formar en total $\frac{n(n-1)}{2}$ parejas, por lo tanto si demostramos que hay al menos $\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n - 1$ parejas no buenas, habremos demostrado que el máximo número de parejas buenas es $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.
Ahora, supongamos que hay una persona que conoce a x personas y desconoce a las demás, entonces hay x parejas no buenas.



Por cada persona que no conoce, existe la posibilidad de que esa pareja sea buena, o que no lo sea.
Si la pareja es buena, entonces deben tener un amigo en común, luego ya tenemos otra pareja no buena.

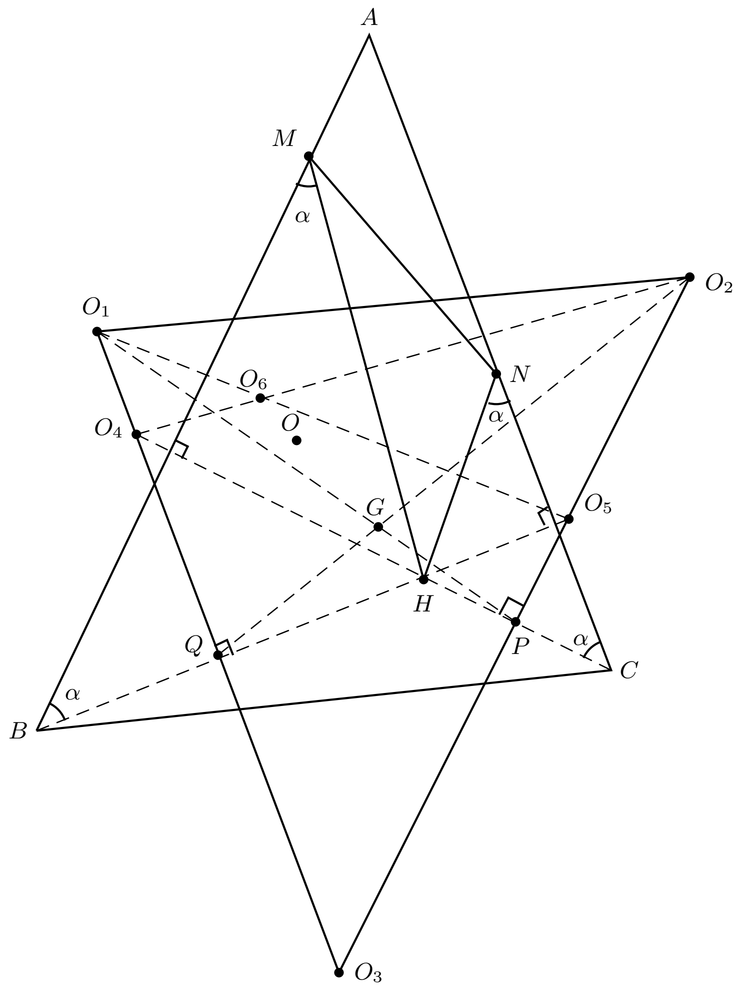


Si la pareja no es buena, no hay nada que hacer. Luego, por cada persona a la cual no conoce, hay una pareja no buena, y además con las personas que sí conoce forma parejas no buenas. Por lo tanto, hay mínimo $n-1$ parejas no buenas.

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo que satisface que $AB > BC$ y que $AC > BC$. Sean O y H el circuncentro y el ortocentro del triángulo ABC, respectivamente. Suponga que el circuncírculo del triángulo AHC intersecta a la recta AB en M (diferente de A), y suponga que el circuncírculo del triángulo AHB intersecta a la recta AC en N (diferente de A). Muestra que el circuncírculo del triángulo MNH está sobre la recta OH.

Solución de Daniel Perales Anaya. Sean O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 y O_6 los circuncentros de los triángulos AHB, AHC, BHC, BMH, CHN y MHN, repectivamente.
Notemos que $\angle ABH = 90° - \angle BAC = \angle ACH = \alpha$. Como el cuadrilátero $ABHN$ es cíclico, tenemos que $\angle HNC = \alpha$, y como el cuadrilátero $AMHC$ es cíclico tenemos que $\angle BMH = \alpha$. Por lo tanto, los triángulos BHM y HNC son isósceles, y como CH es perpendicular a MB y BH es perpendicular a NC, entonces O_4 está en la línea CH y O_5 está en la línea BH.
Notemos que como $\angle ABH = \angle ACH$ y abren el arco $\widehat{AH}$, entonces el circunradio del triángulo AHC es igual al circunradio del triángulo AHB. Análogamente, podemos probar que el circunradio del triángulo BHC es igual a los dos anteriores.
Notemos que O_1, O_4 y O_3 son colineales por estar en la mediatriz de BH. Además, como el circunradio del triángulo AHB es igual al del triángulo BHC, entonces $O_1B = BO_3 = O_3H = HO_1$, es decir, O_1BO_3H es un rombo. Entonces, BH es la mediatriz de O_1O_3. Análogamente, O_2, O_3 y O_5 son colineales (mediatriz de CH) y como O_2HO_3C es un rombo, entonces CH es la mediatriz de O_2O_3. Luego, en el triángulo $O_1O_2O_3$, H es el circuncentro, ya que está en la mediatriz de O_1O_3 y de O_2O_3.
Además, O_2, O_4 y O_6 son colineales por estar en la mediatriz de MH, y O_1, O_5 y O_6 son colineales por estar en la mediatriz de NH.
Como AB es perpendicular a CH y O_2O_3 es perpendicular a CH, tenemos que AB

es paralela a O_2O_3. Análogamente, como AC es perpendicular a BH y O_1O_3 es perpendicular a BH, tenemos que AC es paralela a O_1O_3.



Como O_1O es perpendicular a AB, entonces O_1O es perpendicular a O_2O_3, de donde O_1O es la altura del triángulo $O_1O_2O_3$. Análogamente, O_2O es perpendicular a O_1O_3, y O_2O es altura del triángulo $O_1O_2O_3$. Por lo tanto, O es el ortocentro de dicho triángulo.

Denotemos por P a la intersección de O_2O_3 y CH y por Q a la intersección de O_1O_3 y BH. Sabemos que, $O_3P = PO_2$ y $O_3Q = QO_1$. Consideremos las rectas O_1O_4Q y O_5O_2P, luego por Papus (tomando en orden los puntos O_1, O_5, Q, O_2, O_4, P) tenemos que $O_6 = O_1O_5 \cap O_2O_4$, $H = O_5Q \cap O_4P$ y $G = QO_2 \cap PO_1$ son colineales. Ahora bien, en el triángulo $O_1O_2O_3$ tenemos que G es el gravicentro (pues es la intersección de dos medianas), H es el circuncentro y O es el ortocentro, luego O_6 está en la recta de Euler del triángulo $O_1O_2O_3$. Por lo tanto, O_6, que es el circuncentro del triángulo MHN, está en la recta OH.

Problema 5. Encuentra todas las funciones f del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales a $\mathbb{R}$ que satisfacen para $x, y, z \in \mathbb{R}$ la identidad

$$f(f(x) + f(y) + f(z)) = f(f(x) - f(y)) + f(2xy + f(z)) + 2f(xz - yz).$$

Solución. Es claro que si f es una función constante que satisface la ecuación dada, entonces la constante debe ser 0. Recíprocamente, $f(x) = 0$ claramente satisface la ecuación dada, de modo que, la función idénticamente 0 es una solución. En el resto de la solución, consideraremos el caso donde f no es una función constante.
Sea $t \in \mathbb{R}$ y sustituyamos $(x, y, z) = (t, 0, 0)$ y $(x, y, z) = (0, t, 0)$ en la ecuación funcional dada. Entonces, obtenemos respectivamente,

$$f(f(t) + 2f(0)) = f(f(t) - f(0)) + f(f(0)) + 2f(0),$$

$$f(f(t) + 2f(0)) = f(f(0) - f(t)) + f(f(0)) + 2f(0),$$

de donde se sigue que $f(f(t) - f(0)) = f(f(0) - f(t))$ se satisface para todo $t \in \mathbb{R}$.
Supongamos ahora que para algún par u_1, u_2, se cumple $f(u_1) = f(u_2)$. Entonces, sustituyendo $(x, y, z) = (s, 0, u_1)$ y $(x, y, z) = (s, 0, u_2)$ en la ecuación funcional dada y comparando las identidades resultantes, podemos concluir fácilmente que

$$f(su_1) = f(su_2) \tag{3}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Ya que f no es constante, existe s_0 tal que $f(s_0) - f(0) \neq 0$. Si hacemos $u_1 = f(s_0) - f(0)$ y $u_2 = -u_1$, entonces $f(u_1) = f(u_2)$. Luego, según (3) tenemos que

$$f(su_1) = f(su_2) = f(-su_1)$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Como $u_1 \neq 0$, concluimos que $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Ahora, si $f(u) = f(0)$ para algún $u \neq 0$, entonces de (3) tenemos que

$$f(su) = f(s0) = f(0)$$

para todo s, lo cual implica que f es una función constante, que es contrario a nuestra suposición. Por lo tanto, $f(s) \neq f(0)$ si $s \neq 0$.
Demostraremos que si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$ o $x = -y$. Supongamos por el contrario que $f(x_0) = f(y_0)$ para algún par de números distintos de cero x_0, y_0 con $x_0 \neq y_0$ y $x_0 \neq -y_0$. Puesto que $f(-y_0) = f(y_0)$, podemos suponer, reemplazando y_0 por $-y_0$ si es necesario, que x_0 y y_0 tienen el mismo signo. En vista de (3), tenemos que $f(sx_0) = f(sy_0)$ para todo s, y por lo tanto, existe $r > 0$, $r \neq 1$, tal que

$$f(x) = f(rx)$$

para todo x (ya que existen números reales a y b tales que $ax_0 = x = by_0$ y $r = ab$). Reemplazando x por rx y y por ry en la ecuación funcional dada, obtenemos,

$$f(f(rx) + f(ry) + f(z)) = f(f(rx) - f(ry)) + f(2r^2xy + f(z)) + 2f(r(x - y)z), \quad (4)$$

y reemplazando x por r^2x en la ecuación funcional, obtenemos,

$$f(f(r^2x) + f(y) + f(z)) = f(f(r^2x) - f(y)) + f(2r^2xy + f(z)) + 2f((r^2x - y)z). \quad (5)$$

Ya que $f(rx) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos que todos los términos correspondientes excepto el último, en el lado derecho de las identidades (4) y (5) son iguales, y por lo tanto la igualdad

$$f(r(x - y)z) = f((r^2x - y)z) \quad (6)$$

se debe satisfacer para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$. Para un par arbitrario y fijo $u, v \in \mathbb{R}$, sustituyamos $(x, y, z) = (\frac{v-u}{r^2-1}, \frac{v-r^2u}{r^2-1}, 1)$ en la identidad (6). Entonces, obtenemos $f(v) = f(ru) = f(u)$, ya que $x - y = u$ y $r^2x - y = v$. Pero esto implica que la función f es constante, lo que contradice nuestra suposición. Concluimos entonces que si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$ o $x = -y$.
Sustituyendo $z = 0$ en la ecuación funcional dada, obtenemos

$$f(f(x) + f(y) + f(0)) \quad = \quad f(f(x) - f(y)) + f(2xy + f(0)) + 2f(0).$$

Intercambiando y por $-y$ en esta última identidad, y usando el hecho de que $f(y) = f(-y)$, tenemos que todos los términos excepto el segundo en el lado derecho de la identidad anterior son los mismos. Luego, concluimos que $f(2xy+f(0)) = f(-2xy+f(0))$, de donde se sigue que,

$$2xy + f(0) = -2xy + f(0) \quad \text{o bien} \quad 2xy + f(0) = 2xy - f(0)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. En el primer caso, se sigue que $4xy = 0$, lo cual es imposible si $xy \neq 0$. Por lo tanto, el segundo caso debe satisfacerse y obtenemos que $f(0) = 0$.
Por último, demostraremos que si f satisface la ecuación funcional dada y f no es constante, entonces $f(x) = x^2$. Hagamos $x = y$ en la ecuación funcional. Entonces, ya que $f(0) = 0$, tenemos que

$$f(2f(x) + f(z)) = f(2x^2 + f(z)),$$

de donde se sigue que alguna de las igualdades

$$2f(x) + f(z) = 2x^2 + f(z) \quad \text{o} \quad 2f(x) + f(z) = -2x^2 - f(z)$$

se debe satisfacer para todos los valores de x y z. Supongamos que existe x_0 tal que $f(x_0) \neq x_0^2$. Entonces, de la segunda alternativa se sigue que $f(z) = -f(x_0) - x_0^2$ para todo z, lo que significa que f debe ser constante, que es contrario a nuestra suposición. Por lo tanto, la primera alternativa anterior se debe satisfacer, y así tenemos que $f(x) = x^2$ para todo x, como queríamos demostrar.
Es fácil verificar que $f(x) = x^2$ satisface la ecuación funcional dada. Por lo tanto, concluimos que $f(x) = 0$ y $f(x) = x^2$ son las únicas funciones que satisfacen el problema.

American Mathematics Competition (AMC)

En el mes de marzo se pidió al comité de la olimpiada de Estados Unidos, el examen de la primera fase que aplican a nivel nacional. Dicho examen consta de dos niveles, el AMC 10 y el AMC 12, y en cada nivel los concursantes tienen 75 minutos para resolverlo. Los estudiantes mexicanos que en ese momento eran parte de la preselección nacional para la Olimpiada Centroamericana y del Caribe, presentaron el examen AMC 10, y los estudiantes que en ese momento eran parte de la preselección nacional para las Olimpiadas Iberoamericana e Internacional, presentaron el AMC 12. Los ganadores del equipo mexicano fueron: Diego Alonso Roque Montoya (Nuevo León) quien obtuvo el primer lugar con 109.5 puntos en el AMC 10; Flavio Hernández González (Aguascalientes), quien obtuvo segundo lugar con 105 puntos en el AMC 12; Juan Carlos Ortiz Rhoton (Jalisco), quien obtuvo el tercer lugar con 103.5 puntos en el AMC 12. Diego y Juan Carlos obtuvieron un reconocimiento especial por ser menores de 15 años y obtener más de 90 puntos en el examen.

A continuación presentamos los exámenes con sus soluciones del concurso AMC de este año.

AMC $10A$

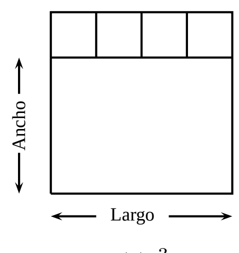
Problema 1. La parte superior de la biblioteca de María tiene cinco libros con los siguientes anchos, en centímetros: $6, \frac{1}{2}, 1, 2.5$ y 10. ¿Cuál es el ancho promedio de los libros, en centímetros?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Solución. La respuesta es (d).
El promedio de los cinco valores es,

$$\frac{6 + 0.5 + 1 + 2.5 + 10}{5} = \frac{20}{5} = 4.$$

Problema 2. Cuatro cuadrados idénticos y un rectángulo son organizados para formar un cuadrado más grande como se muestra. ¿Cuál es la proporción entre el largo y el ancho del rectángulo?



(a) $\frac{5}{4}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) 2 (e) 3

Solución. La respuesta es (b).
Denotemos por s la medida del lado del cuadrado pequeño. Entonces el largo del rectángulo mide $4s$ y el ancho mide $4s - s = 3s$. Luego, la proporción entre el largo y el ancho del rectángulo es $\frac{4s}{3s} = \frac{4}{3}$.

Problema 3. Tyrone tenía 97 canicas y Eric tenía 11 canicas. Tyrone le dio algunas de sus canicas a Eric de tal manera que Tyrone terminó con el doble de canicas que Eric. ¿Cuántas canicas le dio Tyrone a Eric?

(a) 3 (b) 13 (c) 18 (d) 25 (e) 29

Solución. La respuesta es (d).
Denotemos por x al número de canicas que Tyrone le dio a Eric. Entonces $97 - x = 2(11 + x)$, de donde $x = 25$. Por lo tanto, Tyrone le dio a Eric 25 canicas.

Problema 4. La lectura de un libro que se va a grabar en discos compactos dura 412 minutos. Cada disco puede tener hasta 56 minutos de lectura. Asuma que se usan el menor número posible de discos y que cada disco contiene la misma cantidad de lectura. ¿Cuántos minutos de lectura contendrá cada disco?

(a) 50.2 (b) 51.5 (c) 52.4 (d) 53.8 (e) 55.2

Solución. La respuesta es (b).
Como $7 < \frac{412}{56} < 8$, la lectura necesitará 8 discos. Por lo tanto, cada disco contendrá $\frac{412}{8} = 51.5$ minutos de lectura.

Problema 5. La longitud de una circunferencia es 24π y su área es $k\pi$. ¿Cúal es el valor de k?

(a) 6 (b) 12 (c) 24 (d) 36 (e) 144

Solución. La respuesta es (e).
Como la longitud de la circunferencia de radio r es $2\pi r = 24\pi$, entonces $r = 12$. Luego, el área es $\pi r^2 = 144\pi$, y por lo tanto $k = 144$.

Problema 6. Se define la operación $\spadesuit(x, y)$ para números positivos x y y como

$$\spadesuit(x, y) = x - \frac{1}{y}.$$

¿Cuál es el resultado de $\spadesuit(2, \spadesuit(2, 2))$?

(a) $\frac{2}{3}$ (b) 1 (c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{5}{3}$ (e) 2

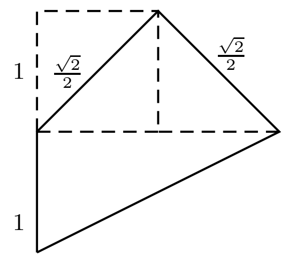
Solución. La respuesta es (c).
Observemos que $\spadesuit(2, 2) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Luego,

$$\spadesuit(2, \spadesuit(2, 2)) = \spadesuit\left(2, \frac{3}{2}\right) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Problema 7. Crystal trota diariamente el mismo recorrido. Ella comienza su trote dirigiéndose hacia el norte una milla. Luego trota al noreste por una milla, luego al sureste por una milla. El último tramo de su trote la lleva en línea recta de regreso a donde ella comenzo. ¿Cuán larga, en millas, es esta última porción de su trote?

(a) 1 (b) $\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) 2 (e) $2\sqrt{2}$

Solución. La respuesta es (c).
Cuando Crystal trota una milla al noreste y una milla al sureste, la distancia que recorrió al norte y al sur es la misma, por lo que, utilizando el teorema de Pitágoras, sabemos que en total recorrió $\sqrt{2}$ millas al este.



Luego, justo antes de iniciar el último tramo de su recorrido, está a una milla al norte del punto inicial y a $\sqrt{2}$ millas al este. Por lo tanto, la última porción de su recorrido es de $\sqrt{1+2} = \sqrt{3}$ millas.

Problema 8. Tony trabaja 2 horas al día y se le paga $\$0.50$ por hora por cada año completo de su edad. Durante un periodo de seis meses Tony trabajó 50 días y ganó $\$630$. ¿Qué edad tenía Tony al final del periodo de seis meses?

(a) 9 (b) 11 (c) 12 (d) 13 (e) 14

Solución. La respuesta es (d).
Tony trabajó por $2 \times 50 = 100$ horas. Su ganancia promedio por hora durante este periodo es de $\frac{\$630}{100} = \$6.30$. Por lo tanto, su promedio de edad durante este periodo fue de $\frac{\$6.30}{\$0.50} = 12.6$ años. Luego, al final del periodo de seis meses tenía 13 años.

Problema 9. Un *palíndrome*, tal como 83438, es un número que permanece igual cuando sus dígitos son puestos en orden inverso. Los números x y $x+32$ son palíndromes de tres y cuatro dígitos, respectivamente. ¿Cuál es la suma de los dígitos de x?

(a) 20 (b) 21 (c) 22 (d) 23 (e) 24

Solución. La respuesta es (e).
Escribamos a $x+32$ de la forma $CDDC$. Como x tiene tres dígitos, entonces $1000 <$

$x + 32 < 1032$, de donde $C = 1$ y $D = 0$. Por lo tanto, $x = 1001 - 32 = 969$ y la suma de los dígitos de x es $9 + 6 + 9 = 24$.

Problema 10. Marvin cumplió años el martes 27 de mayo en el año bisiesto 2008. ¿En qué año será la próxima vez que caiga su cumpleaños en un día sábado?

(a) 2011 (b) 2010 (c) 2013 (d) 2015 (e) 2017

Solución. La respuesta es (e).
Un año no bisiesto tiene 365 días. Como $365 = 52 \cdot 7 + 1$, tenemos que en un año no bisiesto hay 52 semanas y 1 día. Como el 2008 fue un año bisiesto y el 27 de mayo fue martes, que es después del 29 de febrero, tenemos que en el 2009 Marvin cumplió años un miércoles, y cumplirá años un jueves en el 2010 y un viernes en el 2011. Ahora bien, como el 2012 es bisiesto, ese año su cumpleaños será en domingo, en el 2013 será en lunes, en el 2014 será en martes, en el 2015 será en miércoles, en el 2016 será en viernes (pues es otro año bisiesto) y en el 2017 será en sábado.

Problema 11. La longitud del intervalo de soluciones de la desigualdad $a \leq 2x+3 \leq b$ es 10. ¿Cuál es el valor de $b - a$?

(a) 6 (b) 10 (c) 15 (d) 20 (e) 30

Solución. La respuesta es (d).
Resolviendo la desigualdad tenemos que,

$$\frac{a-3}{2} \leq x \leq \frac{b-3}{2}.$$

Luego, si $\frac{b-3}{2} - \frac{a-3}{2} = 10$, entonces $b - a = 20$.

Problema 12. Logan está construyendo un modelo a escala de su pueblo. La torre del tanque de agua tiene 40 metros de alto, y la parte superior es una esfera que contiene $100,000$ litros de agua. La torre miniatura de Logan contiene 0.1 litros. ¿Cuán alta, en metros, debería hacer Logan su torre?

(a) 0.04 (b) $\frac{0.4}{\pi}$ (c) 0.4 (d) $\frac{4}{\pi}$ (e) 4

Solución. La respuesta es (c).
La escala del volumen del modelo de Logan es $0.1 : 100,000 = 1 : 1,000,000$. Entonces, la escala lineal es $1 : \sqrt[3]{1,000,000} = 1 : 100$. Luego, la torre miniatura debe medir $\frac{40}{100} = 0.4$ metros de alto.

Problema 13. Angelina manejó con una velocidad promedio de $80\,km/h$ y luego hizo una parada de 20 minutos para cargar gasolina. Después de la parada, manejó con una velocidad promedio de $100\,km/h$. En total recorrió $250\,km$ con un tiempo total de viaje de 3 horas incluyendo la parada. ¿Cuál ecuación podría ser usada para hallar el tiempo t en horas en el que Angelina manejó antes de su parada?

(a) $80t + 100\left(\frac{8}{3} - t\right) = 250$ (b) $80t = 250$ (c) $100t = 250$ (d) $90t = 250$
(e) $80\left(\frac{8}{3} - t\right) + 100t = 250$

Solución. La respuesta es (a).
Angelina manejó $80t$ kilómetros antes de detenerse. Después de detenerse, manejó durante $(3 - \frac{1}{3} - t)$ horas a una velocidad promedio de $100\,km/h$, de modo que en ese tiempo recorrió $100(\frac{8}{3} - t)$ kilómetros. Por lo tanto, $80t + 100(\frac{8}{3} - t) = 250$ y $t = \frac{5}{6}$.

Problema 14. En el triángulo ABC se tiene que $AB = 2 \cdot AC$. Sean D y E puntos sobre AB y BC, respectivamente tales que $\angle BAE = \angle ACD$. Sea F la interseccion de los segmentos AE y CD, y suponga que el triángulo CFE es equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle ACB$?

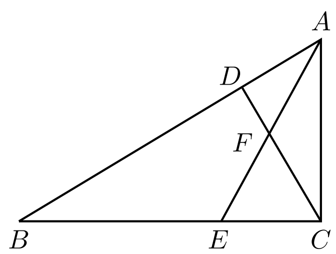
(a) $60°$ (b)$75°$ (c) $90°$ (d) $105°$ (e) $120°$

Solución. La respuesta es (c).
Sea $x = \angle BAE = \angle ACD = \angle ACF$. Como el triángulo CFE es equilátero, tenemos que $\angle CFA = 120°$, de donde,

$$\angle FAC = 180° - 120° - \angle ACF = 60° - x.$$

Entonces,

$$\angle BAC = \angle BAE + \angle FAC = x + (60° - x) = 60°.$$



Como $AB = 2 \cdot AC$, entonces el triángulo BAC tiene ángulos de $30°$, $60°$ y $90°$. Por lo tanto, $\angle ACB = 90°$.

Problema 15. En un pantano mágico hay dos especies de anfibios parlantes: sapos, que siempre dicen la verdad, y ranas, quienes siempre mienten. Cuatro anfibios, Brian, Chris, LeRoy y Mike viven juntos en este pantano y cada uno dice lo siguiente:

Brian:	"Mike y yo somos de especies diferentes."
Chris:	"LeRoy es una rana."
LeRoy:	"Chris es una rana."
Mike:	"De los cuatro de nosotros, al menos dos son sapos."

¿Cuántos de los anfibios son ranas?

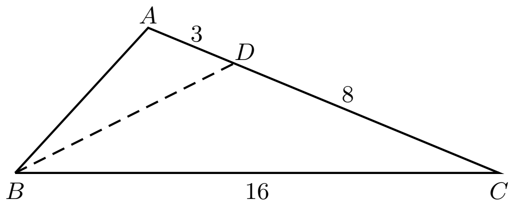
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Solución. La respuesta es (d).
LeRoy y Chris no pueden ser ambos ranas, pues los dos dirían la verdad y las ranas mienten. Tampoco pueden ser ambos sapos, pues estarían diciendo mentiras y los sapos dicen la verdad. Entonces, uno de ellos es sapo y el otro rana.
Si Brian fuera sapo, entonces Mike sería rana, luego habría al menos 2 sapos y la afirmación de Mike sería verdadera, pero como él es rana, miente. Luego, Brian es rana y lo que dice es mentira, entonces Mike también es rana. Por lo tanto, hay 3 ranas: Brian, Mike, y LeRoy o Chris.

Problema 16. Las longitudes de los lados del triángulo ABC son números enteros y ninguno de sus ángulos mide 0°. Sea D un punto sobre el lado AC tal que BD es bisectriz del ángulo $\angle ABC$, $AD = 3$, y $DC = 8$. ¿Cuál es el menor valor que el perímetro de dicho triángulo puede tener?

(a) 30 (b) 33 (c) 35 (d) 36 (e) 37

Solución. La respuesta es (b).
Por el teorema de la bisectriz, tenemos que $8 \cdot BA = 3 \cdot BC$. Entonces, la longitud de BA debe ser múltiplo de 3.



Si $BA = 3$, el triángulo es degenerado, ya que sus lados medirían 3, 8 y 11. Si $BA = 6$, entonces $BC = 16$ y el perímetro del triángulo ABC es $6 + 16 + 11 = 33$.

Problema 17. Las aristas de un cubo sólido tienen 3 pulgadas de longitud. Se hace un agujero cuadrado de 2 pulgadas por 2 pulgadas en el centro de cada cara del cubo. Las aristas de cada corte son paralelas a las aristas del cubo, y cada agujero atraviesa totalmente el cubo. ¿Cuál es el volumen, en pulgadas cúbicas, del sólido resultante?

(a) 7 (b) 8 (c) 10 (d) 12 (e) 15

Solución. La respuesta es (a).
El volumen del cubo sólido es de 27 pulgadas cúbicas. El primer agujero le quita al volumen total $2 \times 2 \times 3 = 12$ pulgadas cúbicas. Cada uno de los 4 agujeros restantes, le quita al volumen total $2 \times 2 \times 0.5 = 2$ pulgadas cúbicas. Por lo tanto, el volumen del sólido resultante es $27 - 12 - 4(2) = 7$ pulgadas cúbicas.

Problema 18. Bernardo elige aleatoriamente 3 números distintos del conjunto

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

y los ordena en orden descendente para formar un número de 3 dígitos. Silvia elige aleatoriamente 3 números distintos del conjunto

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

y también los ordena en orden descendente para formar un número de 3 dígitos. ¿Cuál es la probabilidad que el número de Bernardo sea mayor que el número de Silvia?

(a) $\frac{47}{12}$ (b) $\frac{37}{56}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{49}{72}$ (e) $\frac{39}{56}$

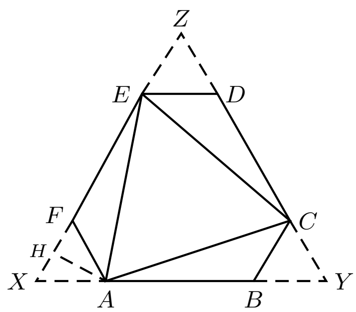
Solución. La respuesta es (b).
La probabilidad de que Bernardo elija un 9 es $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. En ese caso, su número de tres dígitos iniciará con 9 y será mayor que el número de tres dígitos de Silvia.
Si Bernardo no elige un 9, entonces Bernardo y Silvia formarán el mismo número con probabilidad $\frac{1}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{56}$.
Si ellos no forman el mismo número, entonces el número de Bernardo será mayor la mitad de las veces. Luego, la probabilidad es

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{56}\right) = \frac{111}{168} = \frac{37}{56}.$$

Problema 19. Los lados del hexágono equiangular $ABCDEF$ tienen longitudes $AB = CD = EF = 1$ y $BC = DE = FA = r$. El área del triángulo ACE es el $70\,\%$ del área del hexágono. ¿Cuál es la suma de todos los valores que puede tener r?

(a) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (b) $\frac{10}{3}$ (c) 4 (d) $\frac{17}{4}$ (e) 6

Solución. La respuesta es (e).
Observemos que los triángulos ABC, CDE y EFA son congruentes. Entonces, el triángulo ACE es equilátero. Sea X la intersección de las rectas AB y EF, y definamos Y y Z de manera similar, como se muestra en la figura.



Como $ABCDEF$ es equiangular, tenemos que $\angle XAF = \angle AFX = 60°$, luego el triángulo XAF es equilátero. Sea H el punto medio de XF. Por el teorema de

Pitágoras, tenemos que

$$AE^2 = AH^2 + HE^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 + \left(\frac{r}{2}+1\right)^2 = r^2 + r + 1.$$

Entonces, el área del triángulo ACE es

$$\frac{\sqrt{3}}{4}AE^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(r^2 + r + 1).$$

Ahora bien, el área del hexágono $ABCDEF$ es igual a,

$$(XYZ) - (XAF) - (YCB) - (ZED) = \frac{\sqrt{3}}{4}((2r+1)^2 - 3r^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}(r^2 + 4r + 1),$$

donde (XYZ) denota el área del triángulo XYZ. Como $(ACE) = \frac{7}{10}(ABCDEF)$, se sigue que

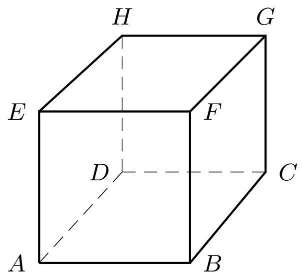
$$\begin{aligned} r^2 + r + 1 &= \frac{7}{10}(r^2 + 4r + 1) \\ \frac{3}{10}r^2 - \frac{18}{10}r + \frac{3}{10} &= 0 \\ r^2 - 6r + 1 &= 0 \\ r &= 3 \pm 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la suma de todos los valores posibles de r es 6.

Problema 20. Una mosca atrapada dentro de una caja cúbica con arista de longitud 1 metro decide aliviar su aburrimiento visitando cada esquina de la caja. Comenzará y terminará en la misma esquina y visitará cada una de las otras esquinas exactamente una vez. Para ir de una esquina a cualquier otra esquina, lo hará volando o caminando en el interior del cubo siempre en línea recta. ¿Cuál es la longitud máxima posible, en metros, de su recorrido?

(a) $4 + 4\sqrt{2}$ (b) $2 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ (c) $2 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$ (d) $4\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$(e) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$

Solución. La respuesta es (d).
Cada uno de los 8 segmentos de recta de la ruta de la mosca es una arista, la diagonal de una cara o una diagonal interior del cubo. Estos tres segmentos miden 1, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, respectivamente. Como cada vértice del cubo es visitado una sola vez, la longitud de los dos segmentos que se unen en un vértice es a lo más $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Entonces la suma de las longitudes de los 8 segmentos es a lo más $4\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$. El máximo se obtiene si la mosca hace el recorrido: $A \to G \to B \to H \to C \to E \to D \to F \to A$.



Problema 21. El polinomio $x^3 - ax^2 + bx - 2010$ tiene tres raíces enteras positivas. ¿Cuál es el menor valor que puede tener a?

(a) 78 (b) 88 (c) 98 (d) 108 (e) 118

Solución. La respuesta es (a).
Sean r, s y t las raíces del polinomio con $0 < r \leq s \leq t$. Entonces, $x^3 - ax^2 + bx - 2010 = (x-r)(x-s)(x-t)$. Luego, $rst = 2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ y $r + s + t = a$. Si $t = 67$, entonces $rs = 30$ y $r + s$ es mínimo con $r = 5$ y $s = 6$. En este caso, $a = 67 + 5 + 6 = 78$. Si $t \neq 67$, entonces $a > t \geq 2 \cdot 67 = 134$. Por lo tanto, el menor valor para a es 78.

Problema 22. Se eligen ocho puntos en una circunferencia y se trazan cuerdas conectando cada par de puntos. No hay tres cuerdas que se intersecten en un mismo punto en el interior de la circunferencia. ¿Cuántos triángulos con todos sus vértices en el interior de la circunferencia son formados?

(a) 28 (b) 56 (c) 70 (d) 84 (e) 140

Solución. La respuesta es (a).
Tres cuerdas forman un triángulo si y sólo si se intersectan dos a dos en el interior de la circunferencia. Dos cuerdas se intersectan en el interior de la circunferencia si y sólo si los puntos finales de las cuerdas tienen un orden alternado en la circunferencia. Por lo tanto, si los puntos A, B, C, D, E y F están ordenados en la circunferencia, entonces sólo las cuerdas AD, BE y CF se intersectan dos a dos en el interior de la circunferencia. Luego, cualquier conjunto de 6 puntos determinan un único triángulo, y hay $\binom{8}{6} = 28$ de tales triángulos.

Problema 23. Cada una de 2010 cajas alineadas contiene una sola canica roja, y para $1 \leq k \leq 2010$, la caja en la posición k-ésima contiene también k canicas blancas. Isabella comienza en la primera caja y extrae sucesivamente en orden una sola canica aleatoriamente de cada caja. Se detiene cuando extrae por primera vez una canica roja. Sea $P(n)$ la probabilidad de que Isabella se detenga después de extraer exactamente n

canicas. ¿Cuál es el menor valor de n para el cual $P(n) < \frac{1}{2010}$?

(a) 45 (b) 63 (c) 64 (d) 201 (e) 1005

Solución. La respuesta es (a).
Si Isabella alcanza la k-ésima caja, la probabilidad de sacar una canica blanca de ahí será $\frac{k}{k+1}$. Para $n \geq 2$ la probabilidad de extraer una canica blanca de cada una de las primeras $n-1$ cajas es,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Entonces, la probabilidad de que saque la primera canica roja de la n-ésima caja es $P(n) = \frac{1}{n(n+1)}$. La condición $P(n) < \frac{1}{2010}$ es equivalente a la desigualdad

$$n^2 + n - 2010 > 0,$$

de donde se sigue que $n > \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{8041})$ y $(2n+1)^2 > 8041$. El menor entero positivo impar cuyo cuadrado es mayor que 8041 es 91, y el correspondiente valor de n es 45.

Problema 24. Sea n el número formado por los dos últimos dígitos diferentes de cero de $90!$. ¿A qué es igual n?

(a) 12 (b) 32 (c) 48 (d) 52 (e) 68

Solución. La respuesta es (a).
En $90!$ hay 18 múltiplos de 5, 3 múltiplos de $25 = 5^2$ y ningún múltiplo de $125 = 5^3$. También hay 45 múltiplos de 2 en $90!$. Entonces, $90! = 10^{21}N$ donde N es un entero que no es divisible entre 10. Tenemos que $N \equiv n \pmod{100}$ con $0 < n \leq 99$, y n es un múltiplo de 4.
Sea $90! = AB$ donde A tiene a los factores que son primos relativos con 5 y B tiene a los factores divisibles entre 5. Observando que

$$\prod_{j=1}^{4}(5k+j) \equiv 5k(1+2+3+4) + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \equiv 24 \pmod{25},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} A &= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdots (86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89) \\ &\equiv 24^{18} \equiv (-1)^{18} \equiv 1 \pmod{25}. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$B = (5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20) \cdot (30 \cdot 35 \cdot 40 \cdot 45) \cdot (55 \cdot 60 \cdot 65 \cdot 70) \cdot (80 \cdot 85 \cdot 90) \cdot (25 \cdot 50 \cdot 75)$$

y de aquí,

$$\begin{aligned} \frac{B}{5^{21}} &= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot (11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14) \cdot (16 \cdot 17 \cdot 18) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3) \\ &\equiv 24^3 \cdot (-9) \cdot (-8) \cdot (-7) \cdot 6 \equiv (-1)^3 \cdot 1 \equiv -1 \pmod{25}. \end{aligned}$$

Finalmente, $2^{21} = 2 \cdot (2^{10})^2 = 2 \cdot (1024)^2 \equiv 2 \cdot (-1)^2 \equiv 2 \pmod{25}$, de modo que $13 \cdot 2^{21} \equiv 13 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{25}$. Entonces,

$$\begin{aligned} N &\equiv (13 \cdot 2^{21})N = 13 \cdot \frac{90!}{5^{21}} = 13 \cdot A \cdot \frac{B}{5^{21}} \equiv 13 \cdot 1 \cdot (-1) \pmod{25} \\ &\equiv -13 \equiv 12 \pmod{25}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $n = 12, 37, 62$ ó 87, y como n es múltiplo de 4, se sigue que $n = 12$.

Problema 25. Jim comienza con un entero positivo n y crea una sucesión de números. Cada término sucesivo es obtenido sustrayendo el mayor número entero cuadrado perfecto que es menor o igual que el término anterior, hasta que obtenga cero. Por ejemplo, si Jim comienza con $n = 55$, entonces su sucesión contiene 5 números:

$$55, \quad 55 - 7^2 = 6, \quad 6 - 2^2 = 2, \quad 2 - 1^2 = 1, \quad 1 - 1^2 = 0.$$

Sea N el menor número entero para el cual la sucesión de Jim tiene 8 números. ¿Cuál es el dígito en las unidades de N?

(a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 9

Solución. La respuesta es (b).
Sea $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ la sucesión. Para $j > 1$, $a_{j-1} = a_j + m^2$ para algún m tal que $a_j < (m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$. Para minimizar el valor de a_1, construyamos la sucesión al revés y escojamos el menor valor posible de m para cada j tal que $2 \leq j \leq 8$. Los términos en sentido contrario son: $a_8 = 0$, $a_7 = 1$, $a_6 = 1 + 1^2 = 2$, $a_5 = 2 + 1^2 = 3$, $a_4 = 3 + 2^2 = 7$, $a_3 = 7 + 4^2 = 23$, $a_2 = 23 + 12^2 = 167$, y $N = a_1 = 167 + 84^2 = 7223$ cuyo dígito de las unidades es 3.

AMC $12A$

Problema 1. ¿Cuál es el valor de $(20 - (2010 - 201)) + (2010 - (201 - 20))$?

(a) -4020 (b) 0 (c) 40 (d) 401 (e) 4020

Solución. La respuesta es (c).
Distribuyendo los signos negativos tenemos que

$$\begin{aligned} & (20 - (2010 - 201)) + (2010 - (201 - 20)) \\ = \; & 20 - 2010 + 201 + 2010 - 201 + 20 \\ = \; & 40. \end{aligned}$$

Problema 2. Un transbordador lleva turistas a una isla cada hora comenzando a las 10 AM hasta su último viaje, que comienza a las 3 PM. Un día el capitán de la embarcación nota que en el viaje de las 10 AM había 100 turistas en el transbordador, y que en cada viaje sucesivo, el número de turistas fue uno menor que en el viaje anterior.

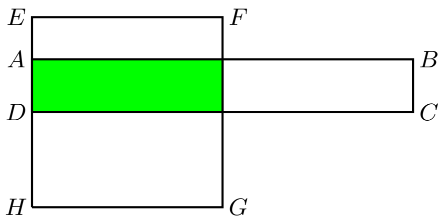
¿Cuántos turistas llevó el transbordador a la isla ese día?

(a) 585 (b) 594 (c) 672 (d) 679 (e) 694

Solución. La respuesta es (a).
El transbordador hace 6 viajes a la isla. El número de turistas que llevó fue

$$\begin{aligned} & 100 + (100 - 1) + (100 - 2) + (100 - 3) + (100 - 4) + (100 - 5) \\ = \;& 6(100) - (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \\ = \;& 600 - 15 \\ = \;& 585. \end{aligned}$$

Problema 3. El rectángulo $ABCD$, mostrado a continuación, comparte el $50\,\%$ de su área con el cuadrado $EFGH$. El cuadrado $EFGH$ comparte el $20\,\%$ de su área con el rectángulo $ABCD$. ¿Cuál es el valor de $\frac{AB}{AD}$?



(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 8 (e) 10

Solución. La respuesta es (e).
Sea s la longitud del lado del cuadrado. Ya que la mitad del área del rectángulo es del cuadrado, tenemos que $\frac{1}{2}AB = s$. También, $\frac{1}{5}$ del área del cuadrado es de la región sombreada, de modo que $s = 5 \cdot AD$. Por lo tanto, $\frac{1}{2}AB = 5 \cdot AD$, de donde $\frac{AB}{AD} = 10$.

Problema 4. Si $x < 0$, ¿cuál de las siguientes opciones debe ser positiva?

(a) $\frac{x}{|x|}$ (b) $-x^2$ (c) -2^x (d) $-x^{-1}$ (e) $\sqrt[3]{x}$

Solución. La respuesta es (d).
Observemos que $-x^{-1} = -\frac{1}{x}$. Si x es negativo, el valor en (d) es positivo. Para ver que las otras opciones no necesariamente son positivas, consideremos el número $x = -1$. Luego,

(a) $\frac{-1}{|-1|} = -1$, (b) $-(-1)^2 = -1$, (c) $-2^{-1} = -\frac{1}{2}$, (e) $\sqrt[3]{-1} = -1$.

Problema 5. Después de cumplirse la mitad de un torneo de arquería de 100 tiros, Chelsea lo va liderando por 50 puntos. Para cada tiro en el centro del blanco se obtienen 10 puntos, con otros puntajes posibles de 8, 4, 2 y 0. Chelsea obtiene al menos 4 puntos en cada tiro. Si en los siguientes n tiros Chelsea da en el centro del blanco, ella garantizará su victoria. ¿Cuál es el menor valor que puede tener n?

(a) 38 (b) 40 (c) 42 (d) 44 (e) 46

Solución. La respuesta es (c).
El arquero en segundo lugar podría obtener un máximo de $50 \cdot 10 = 500$ puntos con los últimos tiros. Por lo tanto, Chelsea necesita más de $500 - 50 = 450$ puntos para garantizar su victoria. Si en los siguientes n tiros Chelsea obtiene $10n$ puntos, en sus últimos $50 - n$ tiros obtendrá al menos $4(50 - n)$ puntos. Para garantizar la victoria se debe tener que

$$\begin{aligned} 10n + 4(50 - n) &> 450, \\ 6n + 200 &> 450, \\ n &> 41\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, Chelsea necesita la menos 42 tiros al centro del blanco para garantizar su victoria.
Solución alternativa. Si Chelsea no le da al centro del blanco, la máxima diferencia de puntos que sus oponentes podrían obtener por tiro sería $10 - 4 = 6$. Chelsea debe hacer suficientes tiros al centro del blanco para evitar que sus oponentes obtengan una diferencia de 50 puntos. Como $8 \cdot 6 < 50 < 9 \cdot 6$, lo más que Chelsea puede lograr en tiros que no dan al centro del blanco es 8 puntos, dejando $50 - 8 = 42$ tiros al centro del blanco necesarios para garantizar su victoria.

Problema 6. Un *palíndrome*, tal como 83438, es un número que permanece igual cuando sus dígitos son puestos en orden inverso. Los números x y $x + 32$ son palíndromes de tres y cuatro dígitos, respectivamente. ¿Cuál es la suma de los dígitos de x?

(a) 20 (b) 21 (c) 22 (d) 23 (e) 24

Solución. La respuesta es (e).
Véase la solución del problema 9 del AMC 10.

Problema 7. Logan está construyendo un modelo a escala de su pueblo. La torre del tanque de agua tiene 40 metros de alto, y la parte superior es una esfera que contiene $100,000$ litros de agua. La torre miniatura de Logan contiene 0.1 litros. ¿Cuán alta, en metros, debería hacer Logan su torre?

(a) 0.04 (b) $\frac{0.4}{\pi}$ (c) 0.4 (d) $\frac{4}{\pi}$ (e) 4

Solución. La respuesta es (c).
Véase la solución del problema 12 del AMC 10.

Problema 8. En el triángulo ABC se tiene que $AB = 2 \cdot AC$. Sean D y E puntos sobre AB y BC, respectivamente, tales que $\angle BAE = \angle ACD$. Sea F la intersección de los segmentos AE y CD, y suponga que el triángulo CFE es equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle ACB$?

(a) $60°$ (b) $75°$ (c) $90°$ (d) $105°$ (e) $120°$

Solución. La respuesta es (c).
Véase la solución del problema 14 del AMC 10.

Problema 9. Las aristas de un cubo sólido tienen 3 pulgadas de longitud. Se hace un agujero cuadrado de 2 pulgadas por 2 pulgadas en el centro de cada cara del cubo. Las aristas de cada corte son paralelas a las aristas del cubo, y cada agujero atraviesa totalmente el cubo. ¿Cuál es el volumen del sólido resultante?

(a) 7 (b) 8 (c) 10 (d) 12 (e) 15

Solución. La respuesta es (a).
Véase la solución del problema 17 del AMC 10.

Problema 10. Los primeros cuatro términos de una sucesión aritmética son p, 9, $3p-q$ y $3p+q$. ¿Cuál es el término 2010-ésimo de esta sucesión?

(a) 8041 (b) 8043 (c) 8045 (d) 8047 (e) 8049

Solución. La respuesta es (a).
Los términos consecutivos en una sucesión aritmética tienen diferencia común d. Luego, $(3p+q)-(3p-q) = 2q = d$. Como el segundo término es igual a $p+d$, tenemos que $p+d = 9$, y el tercer término es igual a $p+2d$, de modo que $p+2d = 3p-q$. Resolviendo el sistema formado por estas tres ecuaciones, obtenemos que $p = 5$, $q = 2$ y $d = 4$. Por lo tanto, el término 2010-ésimo de la sucesión es $p+2009d = 5+2009(4) = 8041$.

Problema 11. La solución de la ecuación $7^{x+7} = 8^x$ puede ser expresada en la forma $x = \log_b 7^7$. ¿A qué es igual b?

(a) $\frac{7}{15}$ (b) $\frac{7}{8}$ (c) $\frac{8}{7}$ (d) $\frac{15}{8}$ (e) $\frac{15}{7}$

Solución. La respuesta es (c).
Si $x = \log_b 7^7$, entonces $b^x = 7^7$. Luego,

$$(7b)^x = 7^x \cdot b^x = 7^{x+7} = 8^x.$$

Como $x > 0$, se sigue que $7b = 8$, de donde $b = \frac{8}{7}$.
Solución alternativa. Tomando logaritmos de ambos lados de la ecuación $7^{x+7} = 8^x$, tenemos que $(x+7)\log 7 = x\log 8$. Resolviendo esta ecuación, tenemos $x\log 7 + 7\log 7 = x\log 8$, de donde $x(\log 8 - \log 7) = 7\log 7$ y de aquí $x = \frac{\log 7^7}{\log \frac{8}{7}}$. Como $x = \log_b 7^7$, se sigue de la fórmula del cambio de base para logaritmos que $b = \frac{8}{7}$.

Problema 12. En un pantano mágico hay dos especies de anfibios parlantes: sapos, que siempre dicen la verdad, y ranas, quienes siempre mienten. Cuatro anfibios, Brian, Chris, LeRoy y Mike viven juntos en este pantano y cada uno dice lo siguiente:

Brian:	"Mike y yo somos de especies diferentes."
Chris:	"LeRoy es una rana."
LeRoy:	"Chris es una rana."
Mike:	"De los cuatro de nosotros, al menos dos son sapos."

¿Cuántos de estos anfibios son ranas?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Solución. La respuesta es (d).
Véase la solución del problema 15 del AMC 10.

Problema 13. ¿Para cuántos valores enteros de k resulta que los gráficos de $x^2 + y^2 = k^2$ y $xy = k$ no se intersectan?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4 (e) 8

Solución. La respuesta es (c).
Cuando $k = 0$, los gráficos de $x^2 + y^2 = 0$ y $xy = 0$ consisten del único punto $(0, 0)$ y la unión de las rectas $x = 0$ y $y = 0$, respectivamente, de modo que los dos gráficos se intersectan. Cuando $k \neq 0$, el gráfico de $x^2 + y^2 = k^2$ es un círculo de radio k con centro en el origen, y el gráfico de $xy = k$ es una hipérbola equilátera con centro en el origen. Los vértices de la hipérbola, localizados en los puntos $(\pm\sqrt{k}, \pm\sqrt{k})$ si $k > 0$ o en los puntos $(\pm\sqrt{-k}, \mp\sqrt{-k})$ si $k < 0$, son los puntos más cercanos sobre el gráfico al origen. Si $|k| \geq 2$, entonces

$$\left(\sqrt{|k|}\right)^2 + \left(\sqrt{|k|}\right)^2 = 2|k| \leq k^2,$$

de modo que los gráficos se intersectan. Si $|k| = 1$, entonces

$$\left(\sqrt{|k|}\right)^2 + \left(\sqrt{|k|}\right)^2 = 2 > 1 = k^2,$$

y los gráficos no se intersectan. Por lo tanto, los gráficos no se intersectan para $k = 1$ o $k = -1$.

Problema 14. Las longitudes de los lados del triángulo ABC son números enteros y ninguno de sus ángulos mide $0°$. Sea D un punto sobre el lado AC tal que BD es bisectriz del ángulo $\angle ABC$, $AD = 3$, y $DC = 8$. ¿Cuál es el menor valor que el perímetro de dicho triángulo puede tener?

(a) 30 (b) 33 (c) 35 (d) 36 (e) 37

Solución. La respuesta es (b).
Véase la solución del problema 16 del AMC 10.

Problema 15. Se altera una moneda de tal manera que la probabilidad de que caiga en cara es menor que $\frac{1}{2}$ y cuando se arroja la moneda cuatro veces, la probabilidad de que se obtenga un número igual de caras y sellos es $\frac{1}{6}$. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda caiga en cara?

(a) $\frac{\sqrt{15}-3}{6}$ (b) $\frac{6-\sqrt{6\sqrt{6}+2}}{12}$ (c) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ (d) $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ (e) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Solución. La respuesta es (d).
Sea p la probabilidad buscada. Si la moneda se arroja cuatro veces, la probabilidad de que caiga dos veces cara y dos veces sello es $\binom{4}{2}p^2(1-p)^2 = \frac{1}{6}$, y como $0 \leq p \leq 1$, se sigue que $p(1-p) = \frac{1}{6}$. Resolviendo para p obtenemos $p = \frac{1}{6}(3 \pm \sqrt{3})$. Como $p < \frac{1}{2}$, concluimos que $p = \frac{1}{6}(3-\sqrt{3})$.

Problema 16. Bernardo elige aleatoriamente 3 números distintos del conjunto

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

y los ordena en orden descendente para formar un número de 3 dígitos. Silvia elige aleatoriamente 3 números distintos del conjunto

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

y también los ordena en orden descendente para formar un número de 3 dígitos. ¿Cuál es la probabilidad que el número de Bernardo sea mayor que el número de Silvia?

(a) $\frac{47}{72}$ (b) $\frac{37}{56}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{49}{72}$ (e) $\frac{39}{56}$

Solución. La respuesta es (b).
Véase la solución del problema 18 del AMC 10.

Problema 17. Los lados del hexágono equiangular $ABCDEF$ tienen longitudes $AB = CD = EF = 1$ y $BC = DE = FA = r$. El área del triángulo ACE es el $70\,\%$ del área del hexágono. ¿Cuál es la suma de todos los valores que r puede tener?

(a) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (b) $\frac{10}{3}$ (c) 4 (d) $\frac{17}{4}$ (e) 6

Solución. La respuesta es (e).
Véase la solución del problema 19 del AMC 10.

Problema 18. Un camino que consta de 16 pasos va de $(-4, -4)$ a $(4, 4)$ de tal forma que con cada paso se incrementa en 1 o bien la coordenada en x o bien la coordenada en y. ¿Cuántos de estos caminos son tales que permanecen en el exterior o en el borde del cuadrado $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$ en todos los pasos?

(a) 92 (b) 144 (c) $1,568$ (d) $1,698$ (e) $12,800$

Solución. La respuesta es (d).
Cada uno de tales caminos intersecta a la recta $y = -x$ en exactamente uno de los puntos $(\pm 4, \mp 4)$, $(\pm 3, \mp 3)$ ó $(\pm 2, \mp 2)$. Para $j = 0$, 1 y 2, el número de caminos desde el punto $(-4, 4)$ hacia alguno de los puntos $(\pm(4-j), \mp(4-j))$ es $\binom{8}{j}$, y el número de caminos hacia el punto $(4, 4)$ desde alguno de los puntos $(\pm(4-j), \mp(4-j))$ es el mismo. Por lo tanto, el número de caminos que cumplen lo requerido es igual a

$$2\left(\binom{8}{0}^2 + \binom{8}{1}^2 + \binom{8}{2}^2\right) = 2(1^2 + 8^2 + 28^2) = 1,698.$$

Problema 19. Cada una de 2010 cajas alineadas contiene una sola canica roja, y para $1 \leq k \leq 2010$, la caja en la posición k-ésima contiene también k canicas blancas. Isabella comienza en la primera caja y extrae sucesivamente en orden una sola canica aleatoriamente de cada caja. Ella se detiene cuando ella extrae por primera vez una canica roja. Sea $P(n)$ la probabilidad de que Isabella se detenga después de extraer exactamente n canicas. ¿Cuál es el menor valor de n para el cual $P(n) < \frac{1}{2010}$?

(a) 45 (b) 63 (c) 64 (d) 201 (e) 1005

Solución. La respuesta es (a).
Véase la solución del problema 23 del AMC 10.

Problema 20. Las progresiones aritméticas (a_n) y (b_n) tienen términos enteros con $a_1 = b_1 = 1 < a_2 \leq b_2$ y $a_n b_n = 2010$ para algún n. ¿Cuál es el mayor valor que n puede tener?

(a) 2 (b) 3 (c) 8 (d) 288 (e) 2009

Solución. La respuesta es (c).
Ya que $a_n = 1 + (n-1)d_1$ y $b_n = 1 + (n-1)d_2$ para algunos enteros d_1 y d_2, se sigue que $n - 1$ es un factor del máximo común divisor de $a_n - 1$ y $b_n - 1$. Luego, la pareja ordenada (a_n, b_n) debe ser alguna de las parejas $(2, 1005)$, $(3, 670)$, $(5, 402)$, $(6, 335)$, $(10, 201)$, $(15, 134)$ ó $(30, 67)$. Para cada una de estas parejas, excepto la sexta pareja, los números $a_n - 1$ y $b_n - 1$ son primos relativos, de modo que $n = 2$. Para la sexta pareja, el máximo común divisor de $15-1$ y $134-1$ es 7. Como 7 es un número primo, tenemos que $n = 8$, y las progresiones definidas por $a_n = 2n - 1$ y $b_n = 19n - 18$ satisfacen las condiciones del problema.

Problema 21. El gráfico de $y = x^6 - 10x^5 + 29x^4 - 4x^3 + ax^2$ yace en la parte del plano por encima de la línea recta $y = bx + c$ excepto en tres valores de x, donde el gráfico y la línea recta se intersectan. ¿Cuál es el mayor de estos tres valores?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Solución. La respuesta es (a).
Supongamos que los tres puntos de intersección tienen coordenada en x a los números p, q y r, y sea $f(x) = x^6 - 10x^5 + 29x^4 - 4x^3 + ax^2 - bx - c$. Entonces, $f(p) = f(q) = f(r) = 0$, y $f(x) \geq 0$ para todo x, de modo que

$$f(x) = ((x-p)(x-q)(x-r))^2 = (x^3 - Ax^2 + Bx - C)^2,$$

donde $A = p+q+r$, $B = pq+qr+rp$ y $C = pqr$.
El coeficiente de x^5 es $-10 = -2A$, de donde $A = 5$. El coeficiente de x^4 es $29 = A^2 + 2B = 25 + 2B$, de donde $B = 2$. El coeficiente de x^3 es $-4 = -2C - 2AB = -2C - 20$, de donde $C = -8$. Luego, $f(x) = (x^3 - 5x^2 + 2x + 8)^2$. Como las sumas de los coeficientes de las potencias pares e impares de x son iguales, tenemos que -1 es una raíz de $f(x)$. Factorizando obtenemos que

$$f(x) = ((x+1)(x^2 - 6x + 8))^2 = ((x+1)(x-2)(x-4))^2,$$

y el mayor valor de las tres raíces es 4.

Problema 22. ¿Cuál es el valor mínimo de $f(x) = |x-1| + |2x-1| + |3x-1| + \cdots + |119x-1|$?

(a) 49 (b) 50 (c) 51 (d) 52 (e) 53

Solución. La respuesta es (a).
Observemos que

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1) - (2x-1) - \cdots - (119x-1) & \text{si } x \leq \frac{1}{119}, \\ -(x-1) - (2x-1) - \cdots - ((m-1)x-1) + & \text{si } \frac{1}{m} \leq x \leq \frac{1}{m-1} \\ +(mx-1) + \cdots + (119x-1) & 2 \leq m \leq 119, \\ (x-1) + (2x-1) + \cdots + (119x-1) & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

El gráfico de $f(x)$ consiste de un rayo con pendiente negativa para $x \leq \frac{1}{119}$, un rayo con pendiente positiva para $x \geq 1$, y para $\frac{1}{119} \leq x \leq 1$ una sucesión de segmentos de recta cuyas pendientes aumentan conforme x aumenta. El valor mínimo de $f(x)$ ocurre en el punto final (punto de la derecha) del intervalo que está más a la derecha en el cual el gráfico tiene una pendiente menor o igual que cero. La pendiente en el intervalo $[\frac{1}{m}, \frac{1}{m-1}]$ es

$$\sum_{k=m}^{119} k - \sum_{k=1}^{m-1} k = \sum_{k=1}^{119} k - 2\sum_{k=1}^{m-1} k = 7140 - (m-1)(m).$$

La desigualdad $7140 + m - m^2 \leq 0$ se satisface en el intervalo $[-84, 85]$ y la igualdad se cumple en los puntos finales -84 y 85. Por lo tanto, en el intervalo $[\frac{1}{85}, \frac{1}{84}]$ el gráfico de $f(x)$ tiene pendiente 0 y un valor constante de $(84)(1) + (119-84)(-1) = 49$.

Problema 23. Sea n el número formado por los dos últimos dígitos diferentes de cero de $90!$. ¿A qué es igual n?

(a) 12 (b) 32 (c) 48 (d) 52 (e) 68

Solución. La respuesta es (a).
Véase la solución del problema 24 del AMC 10.

Problema 24. Sea $f(x) = \log_{10}(\operatorname{sen}(\pi x) \cdot \operatorname{sen}(2\pi x) \cdot \operatorname{sen}(3\pi x) \cdots \operatorname{sen}(8\pi x))$. La intersección del dominio de $f(x)$ con el intervalo $[0, 1]$ es la unión de n intervalos abiertos disjuntos. ¿Cuál es el valor de n?

(a) 2 (b) 12 (c) 18 (d) 22 (e) 36

Solución. La respuesta es (b).
Sea $g(x) = \operatorname{sen}(\pi x) \cdot \operatorname{sen}(2\pi x) \cdot \operatorname{sen}(3\pi x) \cdots \operatorname{sen}(8\pi x)$. El dominio de $f(x)$ es la unión de todos los intervalos en los cuales $g(x) > 0$. Note que $\operatorname{sen}(n\pi(kx)) = (-1)^{k+1} \operatorname{sen}(n\pi x)$, de modo que $g(kx) = g(x)$. Como $g(\frac{1}{2}) = 0$, es suficiente considerar los subintervalos de $(0, \frac{1}{2})$ en los cuales $g(x) > 0$. En este intervalo las soluciones distintas de la ecuación $g(x) = 0$ son los números $\frac{k}{n}$, donde $2 \leq n \leq 8$, $1 \leq k < \frac{n}{2}$, y k y n son primos relativos. Para $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y 8 hay, respectivamente, $0, 1, 1, 2, 1, 3$ y 2 valores de k. Luego, hay $1 + 1 + 2 + 1 + 3 + 2 = 10$ soluciones de $g(x) = 0$ en el intervalo $(0, \frac{1}{2})$. El signo de $g(x)$ cambia en $\frac{k}{n}$ a menos de que un número par de factores de $g(x)$ sean cero en $\frac{k}{n}$, es decir, a menos de que haya un número par de formas de representar a $\frac{k}{n}$ como un número racional con denominador positivo menor o igual que 8. Por lo tanto, el signo de $g(x)$ cambia excepto en $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ y $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.
Supongamos que las soluciones de $g(x) = 0$ en el intervalo $(0, \frac{1}{2})$ son $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ en orden creciente, y sean $x_0 = 0$ y $x_{11} = \frac{1}{2}$. Es fácil verificar que $x_5 = \frac{1}{4}$ y $x_7 = \frac{1}{3}$, de modo que para $0 \leq j \leq 10$, el signo de $g(x)$ cambia en x_j excepto para $j = 5$ y 7. Como 5 y 7 tienen la misma paridad y $g(x) > 0$ en (x_0, x_1), la solución de $g(x) > 0$ en $(0, \frac{1}{2})$ consiste de 6 intervalos abiertos disjuntos: (x_0, x_1), (x_2, x_3), (x_4, x_5), (x_5, x_6), (x_8, x_9), (x_{10}, x_{11}). La solución de $g(x) > 0$ en $(\frac{1}{2}, 1)$ también consiste de 6 intervalos abiertos disjuntos, de modo que el número de intervalos buscado es 12.

Problema 25. Se considera que dos cuadriláteros son iguales si uno puede ser obtenido del otro por una rotación y/o una traslación. ¿Cuántos cuadriláteros convexos cíclicos diferentes hay con lados enteros y perímetro igual a 32?

(a) 560 (b) 564 (c) 568 (d) 1498 (e) 2255

Solución. La respuesta es (c).
Supongamos que un cuadrilátero con lados $a \geq b \geq c \geq d$ y con perímetro 32 existe. Por la desigualdad del triángulo tenemos que $a < b+c+d = 32-a$, de donde $a \leq 15$. Recíprocamente, si (a, b, c, d) es una cuarteta de enteros positivos cuya suma es igual a 32, y cuya máxima entrada es $a \leq 15$, entonces $b + c + d = 32 - a \geq 17 > a$, y la desigualdad del triángulo se verifica. Ésta es la única condición que se requiere para garantizar la existencia de un cuadrilátero convexo con lados de longitudes dadas. Más aún, si se especifica el orden cíclico de los lados, entonces hay exactamente uno de tales cuadriláteros cíclicos.

El problema se reduce a contar todas las cuartetas (a, b, c, d) de enteros positivos con $a+b+c+d = 32$ y $\text{máx}\{a, b, c, d\} \leq 15$, donde dos cuartetas se consideran la misma si generan el mismo cuadrilátero, es decir, si una es una permutación cíclica de la otra. Por ejemplo, $(12, 4, 5, 11)$ y $(5, 11, 12, 4)$ generan el mismo cuadrilátero.
El número de cuartetas (a, b, c, d) con $a + b + c + d = 32$ se pueden contar como sigue: consideremos 31 marcas sobre una línea que serán llenadas con 28 dígitos 1 y 3 signos $+$. Hay $\binom{31}{3}$ formas de escoger las posiciones de los signos $+$, y cada elección está en correspondencia uno a uno con la cuarteta (a', b', c', d'), donde cada entrada indica el número de dígitos 1 que hay entre signos $+$ consecutivos. Haciendo $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1) + (a', b', c', d')$, obtenemos precisamente todas las cuartetas donde $a, b, c, d \geq 1$ y $a + b + c + d = 32$. Para contar aquellas donde la máxima entrada es mayor o igual que 16, consideremos 13 dígitos 1 y 3 signos $+$. Hay $\binom{16}{3}$ cuartetas (a', b', c', d') donde $a', b', c', d' \geq 0$ y $a' + b' + c' + d' = 13$. Hay 4 formas de elegir una de las coordenadas, digamos a', para ser la mínima. Entonces, la cuarteta $(a, b, c, d) = (16, 1, 1, 1) + (a', b', c', d')$ satisface nuestras condiciones. Luego, hay exactamente $4\binom{16}{3}$ cuartetas (a, b, c, d) donde $a, b, c, d \geq 1$, $a + b + c + d = 32$, y $\text{máx}(a, b, c, d) \geq 16$. En consecuencia hay

$$\binom{31}{3} - 4\binom{16}{3} \tag{7}$$

cuartetas (a, b, c, d) donde a, b, c, d son mayores o iguales que 1, $a + b + c + d = 32$ y $\text{máx}(a, b, c, d) \leq 15$.
Si la cuarteta (a, b, c, d) tiene todos sus valores distintos, entonces tiene exactamente 4 permutaciones cíclicas. Lo mismo ocurre si sólo dos de sus valores son iguales entre sí, o tres de sus valores son iguales entre sí y el valor restante es distinto. Si la cuarteta (a, b, c, d) tiene dos pares de valores iguales entre sí ordenados como (a, a, b, b), entonces dicha cuarteta tiene 4 permutaciones cíclicas, pero si están ordenados como (a, b, a, b) entonces tiene 2 permutaciones cíclicas. Finalmente, si todos los valores son iguales entonces sólo hay una permutación cíclica.
Hay exactamente 7 cuartetas de la forma (a, b, a, b) con $a < b$ y $a + b = 16$, y hay exactamente una cuarteta $(a, a, a, a) = (8, 8, 8, 8)$ con cuatro valores iguales. Si sumamos a la ecuación (7) dos veces el número de cuartetas de la forma (a, b, a, b) más 3 veces el número de cuartetas de la forma (a, a, a, a), garantizamos que todas las clases de equivalencia bajo permutaciones cíclicas son contadas exactamente 4 veces. Por lo tanto, el número de cuadriláteros cíclicos buscado es,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\left(\binom{31}{3} - 4\binom{16}{3} + 14 + 3\right) &= \frac{1}{4}(31 \cdot 5 \cdot 29 - 32 \cdot 5 \cdot 14 + 17) \\ &= \frac{1}{4}(5 \cdot 451 + 7) = 568. \end{aligned}$$

XII Olimpiada Centroamericana y del Caribe

Del 24 de mayo al 1 de junio de 2010, se celebró en Mayagüez, Puerto Rico, la XII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. México ocupó el primer lugar, con 108 puntos, de entre los 14 países que participaron. Barbados y Cuba no pudieron asistir, y Jamaica, Trinidad y Tobago, e Islas Vírgenes Americanas participaron por primera vez. En total participaron 41 estudiantes. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Diego Alonso Roque Montoya (Nuevo León), Julio César Díaz Calderón (Oaxaca) y Fernando Josafath Añorve López (Nuevo León).

De las 3 medallas de oro, 7 de plata y 11 de bronce que se entregaron en el certamen, Diego obtuvo medalla de oro, y Julio César y Fernando medalla de plata. Además se otorgó el reconocimiento de "Solución Creativa" a Diego Alonso por su solución del problema 5, reconocimiento que sólo se ha otorgado 2 veces, hasta ahora, en una Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe.

A continuación presentamos los problemas con sus soluciones de la XII Olimpiada Centroamericana y del Caribe. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos. Agradecemos de una manera muy especial a Leonardo Martínez por habernos proporcionado el archivo TEX con las soluciones de los alumnos participantes.

Problema 1. Si $S(n)$ denota la suma de los dígitos de un número natural n, encuentre todas las soluciones de

$$n(S(n)-1)=2010$$

mostrando que son las únicas.

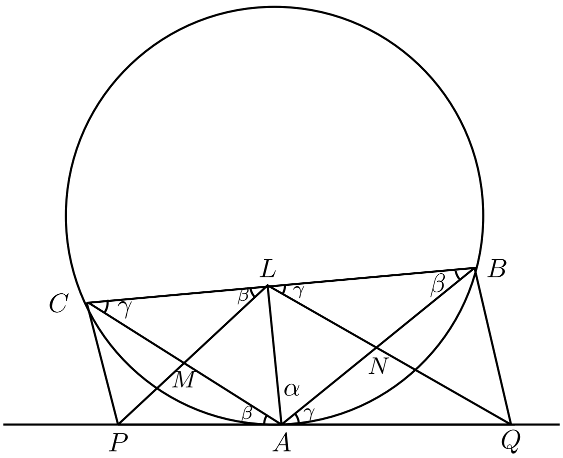
Solución de Julio César Díaz Calderón. Sea $n=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\cdots+a_1 10^1+a_0$ donde las a_i's son sus dígitos. Así, $S(n)=a_0+a_1+\cdots+a_n$.
Supongamos que n es tal que $n(S(n)-1)=2010$. Como n es natural, $S(n)$ es entero, y como queremos que $n(S(n)-1)=2010$, necesitamos $S(n)-1\neq 0$, así que $S(n)\neq 1$, de modo que $S(n)\geq 2$. Como $2010=2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$, tenemos $S(n)\geq 2$ y queremos $n(S(n)-1)=2010$, entonces $n\leq 3\cdot 5\cdot 67=1005$, de modo que n tiene a lo más 4 dígitos, y por tanto $n=a_3 10^3+a_2 10^2+a_1 10+a_0$, de modo que $S(n)=a_3+a_2+a_1+a_0\leq 4\cdot 9=36$, y así $S(n)-1\leq 35$.
Pero 67 divide a $2010=n(S(n)-1)$ y 67 es primo, así que 67 divide a n ó 67 divide a $(S(n)-1)$. Si 67 divide a $(S(n)-1)$, entonces $67\leq S(n)-1$, pero no se puede pues $0<S(n)\leq 35<67$. Así que 67 divide a n. Pero $2010=n(S(n)-1)$, con $n\leq 1005$, así que n sólo tiene 7 valores posibles: 67, $67\cdot 2$, $67\cdot 3$, $67\cdot 5$, $67\cdot 2\cdot 3$, $67\cdot 2\cdot 5$ y $67\cdot 5\cdot 3$. Tenemos entonces la siguiente tabla.

n	$S(n)$	$S(n)-1$
67	13	12
134	8	7
201	3	2
335	11	10
402	6	5
670	13	12
1005	6	5

Al fijarnos en $n(S(n)-1)$, descartamos los primeros 3 ya que su producto no puede ser 2010 pues ningún factor tiene 5. El cuarto caso y los últimos dos los descartamos pues en los productos correspondientes se repite el factor 2 o el factor 5 al menos 2 veces, y 2010 sólo tiene un factor 2 y un factor 5. Finalmente, vemos que $n = 402$ y $S(n) - 1 = 5$ tienen producto igual a 2010. Así, éste es el único caso posible.

Problema 2. Dado el triángulo ABC, sean L, M y N los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente. Se traza una tangente al circuncírculo del triángulo ABC en A, siendo P y Q las intersecciones respectivas de las rectas LM y LN con dicha tangente. Demuestre que CP es paralela a BQ.

Solución de Fernando Josafath Añorve López. Supongamos que $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Ahora, como L y M son puntos medios de BC y CA, respectivamente, tenemos que $LM||AB$. Por lo tanto, $\angle CLM = \beta$. Como PQ es tangente al circuncírculo de ABC, $\angle CAP$ es semi-inscrito a la circunferencia, luego $\angle CAP = \angle CBA = \beta$. Entonces sabemos que $\angle CLP = \angle CAP = \beta$. Es decir, $PALC$ es cíclico.



Como L y N son puntos medios de CB y AB, tenemos que $LN||AC$, luego $\angle BLN = \angle BCA = \gamma$. Sabemos que como PQ es tangente entonces $\angle BAQ$ es semi-inscrito y $\angle BAQ = \angle BCA = \gamma$, y sabemos que $\angle BLQ = \gamma$, de modo que $\angle BAQ = \angle BLQ = \gamma$ y entonces $BQAL$ es cíclico.
Ahora, usando que $BLAQ$ y $CLAP$ son cíclicos, tomemos $\angle AQB = \theta$. Luego, $\angle ALB = 180° - \theta$, de donde $\angle CLA = \theta$ y por lo tanto $\angle CPA = 180° - \theta$. Como $\angle AQB = \theta$ y $\angle CPA = 180° - \theta$, se sigue que $BQ||CP$.

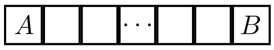
Problema 3. Un jugador coloca una ficha en una casilla de un tablero de $m \times n$, dividido en casillas de tamaño 1×1. El jugador mueve la ficha de acuerdo a las siguientes reglas:

- En cada movimiento, el jugador cambia la ficha de la casilla en la que ésta se encuentra a una de las casillas que tienen un lado en común con ella.
- El jugador no puede ubicar la ficha en una casilla que ésta ha ocupado previamente.
- Dos movimientos consecutivos no pueden tener la misma dirección.

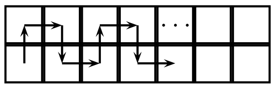
El juego termina cuando el jugador no puede mover la ficha. Determine todos los valores de m y n para los cuales el jugador puede colocar la ficha en alguna casilla tal que ésta haya ocupado todas las casillas al terminar el juego.

Solución de Diego Alonso Roque Montoya. Sin perder generalidad supongamos que $n \geq m$. Consideramos los siguientes casos:

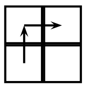
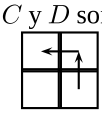
a) $m = 1, n \leq 2$;  cumple.

b) $m = 1, n > 2$; 

Para ir de A a B tienes que avanzar mínimo 2, y como no puedes moverte a los lados (ya que no existen) entonces esos 2 movimientos son consecutivos hacia una misma dirección, lo cual sería ilegal.

c) $m = 2, n \geq 2$; 

cumple.

d) $m, n > 2$. En este caso no hay 2 esquinas colindantes. Coloreamos el tablero como tablero de ajedrez (de blanco y negro). Hay un número par (0, 2 ó 4) de esquinas blancas y un número par de esquinas negras (4, 2 ó 0), así que si las esquinas son A, B, C, D (no necesariamente en orden cíclico), podemos tomar parejas (A, B) y (C, D) tales que A y B son del mismo color x y C y D son del mismo color y. Los movimientos tras 2 turnos son  o  o rotaciones de estos, entonces cada 2 turnos vuelves al mismo color. Si la primera casilla del color x que pisas no es ni A ni B, entonces cuando entres a A (la primera de estas) te atorarás y no podrás entrar a B. De manera similar con C y D. Entonces, la primera casilla del color x que pisas es A o B y la de y es C o D, pero si $x = y$ eso es imposible y si $x \neq y$ entonces hay 2 esquinas colindantes, contradiciendo el caso en el que estamos. Esto demuestra que con $m, n > 2$ es imposible.

Problema 4. Se desea embaldosar un patio cuadrado de lado n entero positivo. Se dispone de dos tipos de baldosas: cuadradas de 5×5 y rectangulares de 1×3. Determine los valores de n para los cuales es posible hacerlo.
Nota: El patio debe quedar completamente cubierto sin que las baldosas se sobrepongan.

Solución de Fernando Josafath Añorve López. Demostraremos que si tenemos un rectángulo y uno de sus lados es múltiplo de 3, puede llenarse con baldosas de 3×1.

Este resultado se usará posteriormente.
Si 3 divide al número de filas, me tomo cada columna y la lleno de una por una. Ahora, como tiene $3x$ cuadritos cada columna, puedo separarlos en grupos de 3 y llenar cada uno, llenando así la columna. Análogamente si el número de columnas es múltiplo de 3, sólo volteamos la figura y ya.
Para la siguiente parte del problema primero necesito cubrir los casos donde $n \leq 10$.

- $n = 1$ y $n = 2$ no se puede.
- $n = 3$, $n = 6$, $n = 9$ sí, pues $3|n$.
- $n = 4$ no se puede, pues no cabe una baldosa de 5×5 y no se puede con baldosas de 3×1 pues 3 no divide a $16 = 4 \times 4$.
- $n = 5$ sí, pues lo cubrimos con una de 5×5.
- $n = 7$ sí, pues se llena enmedio con un 5×5 y las orillas se pueden cubrir con 8 de 3×1.
- $n = 8$ sí, siguiendo el procedimiento de la siguiente parte de la solución.

Para los valores de n mayores o iguales que 10:

- Si $n \equiv 0 \pmod 3$ entonces ya vimos que sí se puede.
- Si $n \equiv 2 \pmod 3$ entonces ponemos una baldosa de 5×5 en la esquina superior izquierda, dejando rectángulos de $5 \times (n-5)$ y $(n-5) \times n$. Como $n \equiv 2 \pmod 3$, tenemos $n - 5 \equiv 0 \pmod 3$, y entonces $3|n - 5$, de modo que los 2 rectángulos de ahí pueden ser llenados. Notemos que el caso $n = 8$ entra aquí, completando los casos $n \leq 10$.
- Si $n \equiv 1 \pmod 3$ entonces ponemos 4 baldosas de 5×5 cubriendo la esquina superior izquierda (pues $n \geq 10$). Como $n \equiv 1 \pmod 3$, tenemos $n - 10 \equiv 0 \pmod 3$, así $3|n - 10$. Así que los rectángulos que quedan pueden llenarse porque tienen medidas $10 \times (n - 10)$ y $(n - 10) \times n$.

Problema 5. Sean p, q y r números racionales distintos de cero tales que

$$\sqrt[3]{pq^2} + \sqrt[3]{qr^2} + \sqrt[3]{rp^2}$$

es un número racional distinto de cero. Pruebe que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{pq^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{qr^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{rp^2}}$$

también es un número racional.

Solución de Diego Alonso Roque Montoya. [5] Comenzamos demostrando un lema:

Lema. Si a, b, c y $a\sqrt[3]{b}+c\sqrt[3]{b^2}$ son racionales, entonces $\sqrt[3]{b}$ también es racional.
Demostración. Tomemos $t=a\sqrt[3]{b}+c\sqrt[3]{b^2}$. Entonces, $c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{b}-t=0$, de modo que $\sqrt[3]{b}$ es solución de la ecuación cuadrática $cx^2+ax-t=0$, así que por la fórmula general, $\sqrt[3]{b}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4ct}}{2c}$.

$$\begin{aligned} b=(\sqrt[3]{b})^3 &= \left(\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4ct}}{2c}\right)^3 \\ &= \frac{-a^3\pm 3a^2\sqrt{a^2+4ct}+3a(a^2+4ct)\pm\sqrt{a^2+4ct}(a^2+4ct)}{8c^3} \end{aligned}$$

Despejando $\sqrt{a^2+4ct}$ y usando que a, b, c, t son racionales, obtenemos que $\sqrt{a^2+4ct}$ es racional, y por tanto $\sqrt[3]{b}$ también. Con ésto queda demostrado el lema.

Ahora, tomemos $A=\sqrt[3]{pq^2}+\sqrt[3]{qr^2}+\sqrt[3]{rp^2}$, $B=\frac{1}{\sqrt[3]{pq^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{qr^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{rp^2}}$, $a=pq+qr+rp$, $b=pqr$ y $c=p+q+r$. Por hipótesis del problema, A, a, b, c son racionales. Así, $A^3=(pq^2+qr^2+rp^2+6pqr)+a\sqrt[3]{b}+c\sqrt[3]{b^2}$ también y como $(pq^2+qr^2+rp^2+6pqr)$ es racional, entonces $a\sqrt[3]{b}+c\sqrt[3]{b^2}$ también es racional. Entonces, el Lema nos dice que $u=\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{pqr}$ es racional.
Basta verificar que $AB=3+\frac{u}{p}+\frac{p}{u}+\frac{u}{q}+\frac{q}{u}+\frac{u}{r}+\frac{r}{u}$, y como u, p, q, r son racionales, entonces AB lo es. Así, como $A\neq 0$ es racional, tenemos que B también lo es.

Problema 6. Sean Γ y Γ_1 dos circunferencias tangentes internamente en A, de centros O y O_1, y radios r y r_1 ($r>r_1$), respectivamente. Sea B el punto diametralmente opuesto a A en la circunferencia Γ, y C un punto en Γ tal que BC es tangente a Γ_1 en P. Sea A' el punto medio de BC. Si se cumple que O_1A' es paralela a AP, determine la razón $\frac{r}{r_1}$.

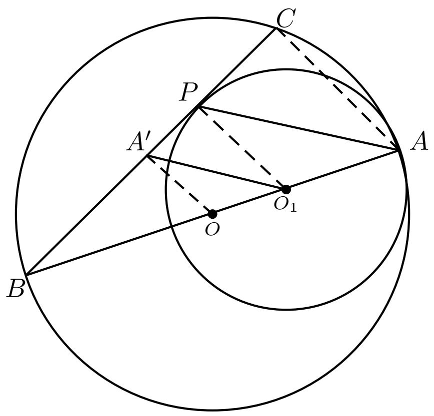
Solución de Julio César Díaz Calderón. Como las circunferencias son tangentes en A, los puntos B, O, O_1 y A son colineales. Como A' es punto medio de BC y O es punto medio de BA (pues es un diámetro), por el teorema de Thales tenemos $A'O||CA$, y así $\angle BA'O=\angle BCA=90°$. Luego, por el criterio de semejanza AA, tenemos que los triángulos $BA'O$ y BCA son semejantes.
Tenemos que $\angle BPO_1=90°$ por ser BC tangente a Γ_1 en P. Así, $A'O||PO_1$, de modo que por el teorema de Thales,

$$\frac{BO}{BO_1}=\frac{A'O}{PO_1} \tag{8}$$

[5] Esta solución recibió Premio Especial por ser una solución creativa. El premio fue otorgado por la forma de abordar el problema, la cual no se le ocurrió a nadie previamente, y por la demostración elemental del lema (existen otras demostraciones que utilizan resultados de la Teoría de Campos).

Por hipótesis, $O_1A'||AP$, así, $\angle A'O_1O = \angle PAO_1$ y $\angle A'OO_1 = \angle PO_1A$, de modo que por el criterio AA, tenemos que los triángulos $A'OO_1$ y PO_1A son semejantes. De aquí tenemos,

$$\frac{OO_1}{O_1A} = \frac{A'O}{PO_1} = \frac{A'O_1}{PA} \tag{9}$$



Usando el teorema de Thales con $A'O_1||AP$, y las ecuaciones (8) y (9) tenemos:

$$\frac{BO_1}{BA} = \frac{A'O_1}{PA} = \frac{A'O}{PO_1} = \frac{BO}{BO_1},$$

concluyendo que $BO_1 = \sqrt{BO \cdot BA} = \sqrt{r \cdot 2r} = \sqrt{2}r$.
Finalmente, ya que $BO_1 = 2r - r_1$, tenemos que $2r - r_1 = \sqrt{2}r$, de donde obtenemos que $\frac{r}{r_1} = \frac{1}{2-\sqrt{2}}$.

Una conversación con Emilio Lluis Riera

Por Emilio Lluis Puebla

Introducción

Uno de los matemáticos mexicanos de mayor prestigio internacional, es sin duda, Emilio Lluis Riera. Nació en España en 1925, realizó sus estudios de licenciatura, maestría y doctorado en matemáticas en la Universidad Nacional Autónoma de México. Durante su formación trabajó con Solomón Lefschetz, uno de los matemáticos más destacados del siglo XX. También fue discípulo de Pierre Samuel, Aleksandr Kurosh, Igor Shafarevich, Guillermo Torres y Alberto Barajas. Es investigador del Instituto de Matemáticas de la UNAM desde 1951.

Ha publicado más de veinte textos de Matemáticas, que van desde nivel primaria hasta posgrado. En cuanto a la investigación matemática, es autor de numerosos artículos publicados en revistas especializadas de prestigio internacional, siendo muy relevantes sus aportaciones en Geometría Algebraica, Homolgía y Cohomología de grupos.

También la docencia ha sido una de sus actividades prioritarias. Muchas generaciones de matemáticos han asistido a sus clases y su valiosa participación en diversos programas de formación docente ha dejado profundas huellas en varias generaciones de profesores. En 1990 recibió el Premio Universidad Nacional en el área de Docencia en ciencias exactas y en 1997 fue nombrado Profesor Emérito, el máximo galardón que ofrece dicha institución.

A continuación presentamos una entrevista que Emilio Lluis Puebla, hijo de Lluis Riera y también un destacado matemático mexicano, hizo a su padre en exclusiva para la revista Tzaloa.

La entrevista

A finales de marzo del presente año recibí un correo electrónico de Anne Alberro, solicitándome que escribiera un artículo sobre mi padre. Anne fue durante algunos años ayudante de mi papá en la Facultad de Ciencias de la UNAM y su mamá Pierrette Semerena fue mi alumna estrella de tesis en 1986-87. Creí que una forma adecuada para realizar este artículo sería mediante una entrevista grabada. Agradezco a Anne que lo haya transcrito palabra por palabra. Esto nos proporcionó una base sobre la cual pudimos editar la siguiente conversación.

LP.- Emilio Lluis Puebla **LR.- Emilio Lluis Riera**

LP- Dinos primero, ¿dónde naciste?
LR- Nací en Roquetas. Queda pegadito a Tortosa la cual está en la desembocadura del Ebro al Mediterráneo, prácticamente entre Cataluña y Valencia.
LP- ¿En Cataluña?
LR- En Cataluña desde luego, pero muy cerca de Valencia.
LP- ¿Ahí naciste porque tus papás estaban dando clases en Roquetas?
LR- Los dos fueron maestros en Roquetas. Ellos ganaron plazas por oposición y les dio muchísimo gusto de que les dieran trabajo a los dos, de maestros, en el mismo lugar.
LP- Ellos se graduaron en Barcelona, en la Escuela Normal de Maestros.
LR- Sí, fue en la Escuela Normal de Maestros. Eran los únicos maestros pues era un pueblo muy chiquito.
LP- En las escuelas de aquel entonces los alumnos cursaban todos los grados juntos. ¿Comenzaste a estudiar la escuela en Roquetas o en Barcelona?
LR- La escuela la empecé en Roquetas. Simplemente me metí a los cursos que daban mis papás donde veía a los niños. Estudié igual que ellos. Además, cuando ya estaba más avanzado en primaria ayudaba a mis papás cuando tenían alumnos que había que darles un poco más de apoyo. Me gustaba darles ayuda. Era muy bonito y muy divertido.
LP- Ahí podría decirse que comenzó tu actividad docente.
LR- Sí, completamente. Había muchachos mucho mayores que yo. Algunos ya estaban terminando la primaria, pero que andaban mal, pues a veces en los pueblitos asisten a la escuela cuando se puede. Primero trabajan el campo y después van a la escuela. Había algunos alumnos bastante mayores que yo y a esos les ponía especial atención porque me decían mis papás que había que enseñarles rápidamente porque tenían que terminar pronto, pues ya estaban grandes.
LP- Entonces tú te inicias propiamente en la docencia desde chiquito.
LR- Sí, desde chiquito, me gustaba dar clases.
LP- Es así como a menudo los hijos de carpinteros se hacen carpinteros, hijos de maestros...
LR- Sí, a mi me gustaba mucho ir a la ferretería que quedaba cerca de nuestra casa en Roquetas, ahí vi que los hijos de los ferreteros iban también a la ferretería desde chiquitos.
LP- Por eso muchas veces los hijos de profesionistas de cierta disciplina se encaminan a esa disciplina.
LR- Y si se aprende desde chico se hace mucho mejor.

LP- Y después te vas a estudiar a Barcelona.
LR- Mis papás se fueron a Barcelona cuando les dieron los cursos en las escuelas de esa ciudad. Me fui también, claro, y ahí continué la primaria y después la secundaria.
LP- Y tus encuentros con la matemática fueron a través de tus papás.
LR- Sí, simplemente lo que se enseña a todos los niños.
LP- Pero él tenía especial interés en la matemática.
LR- Le gustaba mucho, sobre todo, las demostraciones, la geometría y esas cositas donde hay que pensar. No era nada más aprender de memoria las tablas de multiplicar sino el enseñar a razonar.
LP- Después, hay un periodo de inestabilidad política en España y muchos tienen que salir de España. Cuéntanos cómo fue eso, estabas estudiando la secundaria o preparatoria ¿quizás?
LR- No, mucho menos, tenía 10 u 11 años.
LP- ¿En la primaria?
LR- Sí, finales de la primaria o principios de la secundaria.
LP- Y luego se vieron forzados a salir por cuestiones de peligro.
LR- De peligro, de bombardeos constantes que estaban haciendo en Barcelona, que te pescaban en la calle, y al día siguiente era igual. Entonces llegó un momento que era demasiado peligroso vivir donde vivíamos. Era un piso común y corriente en un edificio grande. Estábamos en el tercer o quinto piso, no sé. Y era peligroso vivir ahí. Entonces mis papás decidieron irse a otra parte.
LP- Yo me acuerdo que mi abuelo me contó que, estando en una reunión, cayó una bomba atrás de él y no explotó, quedó ahí clavada, hizo un agujero.
LR- Conocimos a muchos que desaparecieron durante los bombardeos. Estábamos expuestos a bombazos y por eso se decidió salir.
LP- Me contaron que había un barco y que en ese barco se fueron con los niños, toda una escuela.
LR- No, primero fuimos en tren a Francia, no recuerdo el lugar, y ahí tomamos un barco soviético pues ellos invitaron para que saliéramos de la guerra con los 300 niños.
LP- Y ese barco ¿a dónde los llevó?
LR- A Leningrado, y de ahí nos llevaron un poco más abajo de Moscú, donde hicieron una escuela precisamente para niños, para esos niños españoles que estábamos ahí.
LP- ¿Eran como 300?
LR- Sí, yo creo que de ese orden.
LP- Y había más profesores además de tus papás...
LR- Sí, sí, claro. Había más profesores.
LP- ...y entonces ahí en la URSS tú cursaste la secundaria y la preparatoria...
LR- El último año de la primaria y luego la secundaria. La secundaria ya no lo hice en la Casa de Niños en español. La secundaria ya la hice en ruso en una escuela soviética.
LP- Y, ¿hay el equivalente a preparatoria?
LR- Secundaria y preparatoria, en total son cinco años.
LP- Durante este tiempo estalla la segunda guerra mundial...
LR- Estalla la segunda guerra mundial, cuando Hitler invade la URSS yo estaba en la preparatoria. A las pocas semanas que entró Hitler a la URSS, nos empacaron a todos los de la Casa de Niños y nos llevaron a una casa cerca de Saratov, en el Río Volga.
LP- Y ahí ¿cuánto tiempo estuvieron?

LR- Estuvimos durante la guerra, unos cuatro años.
LP- ¿Y tú ya habías ido a estudiar a Moscú la licenciatura de matemática?
LR- No, eso fue después. Justito acabando la guerra, me fui cerca de Moscú y de ahí iba a tomar unos cursillos para poder entrar a la Universidad, cuyo ingreso era a base de exámenes que tenías que aprobar. Para entrar tuvimos que pasar unos exámenes pavorosos, pues había mucha gente que quería entrar. Moscú es la número uno, entonces tuvimos que hacer unos exámenes realmente difíciles, ¡pero con ganas! Tanto Emiliano Aparicio como yo, lo pasamos muy bien.
LP- ¿Quiénes fueron tus maestros?
LR- Shafarievich, entre otros. Había matemáticos de primera: Kuroch, etc.
LP- ...y luego..., viene la posibilidad de venir a México invitados por la hermana de tu mamá que vivía en México.
LR- Gracias a eso pudieron dar permiso a mi mamá para salir, porque en general en ese tiempo era muy difícil que alguien saliera de la URSS sin razón de nada, pero en ese caso como una hermana la solicitó, le dieron permiso.
LP- Y entonces, vino toda la familia a México en el año 1947, me parece, y llegando aquí, ¿cómo es que te inscribes a estudiar matemática?
LR- ¡Ah! Ese fue mi problema. Quería estudiar matemática y me decían que fuera a ingeniería. Nadie sabía que ya existía una escuela de matemática. Por fin encontré alguien que me dijo: *mira, ve allá y habla con el director*, *¿cómo se llama? ... Nápoles Gándara*. Entonces fui a verlo. Inmediatamente me explicó que ya teníamos en la U.N.A.M. la carrera de matemático. Me trató muy bien e ingresé a la carrera.
LP- Y entonces pudiste continuar tus estudios que ya habías comenzado en la URSS y terminaste tu licenciatura. ¿Cuándo apareció Lefschetz?
LR- Lefschetz apareció desde que yo estaba en los primeros años. Él iba a dar conferencias y cursillos y eso me animó muchísimo. Era una persona que sabía matemática, pero, de los primeros del mundo. Hablaba ruso, inglés, español. Ruso de nacimiento. Después lo llevaron a Italia, luego pasó a Francia donde hizo el doctorado. Después lo pescaron en E.U., pues era de primer orden.
LP- Lefschetz fue uno de los más destacados matemáticos y científicos. Recuerdo que cuando venía cada verano tú trabajabas con él y te propuso un tema de tesis doctoral. Te sugirió que fueras a trabajar con Pierre Samuel a Francia.
LR- Me recomendó, que un tema como ese, *debe discutirse con matemáticos de a de veras*, y que si podía ir a Francia con Pierre Samuel, que sabía de esas cosas. Pues, encantado de la vida salí, con muchos problemas y con muchas necesidades.
LP- ¿En 1954?, más o menos.
LR- De ese orden.
LP- Sí, yo me acuerdo que te dejé de ver una época.
LR- Sí, sí, muy duro estuvo, no tenía dinero, muy difícil todo, además el problema no era tan fácil y cuando vi que la cosa ya iba bien, me regresé. Trabajé en Clermont-Ferrand, donde Pierre Samuel era maestro de la Universidad.
LP- Y tu trabajo fue, quizás, uno de los primeros, si no es que el primer artículo publicado por un matemático, mexicano o español, en el Annals of Mathematics. Fue un artículo muy exitoso, muy importante...
LR- ...es que el problema era bonito, era un problema interesante.
LP- Inmersión de Variedades Algebraicas.

LR- Sí. Si la variedad tiene cierta dimensión, cuál es la más pequeña dimensión donde se puede meter, dicho de manera informal. Estaba muy bonito el tema y a Pierre Samuel le encantó.
LP- Ese resultado aparece en muchísimos lados, inclusive me acuerdo que en alguna ocasión vino Robin Hartshorne, que tiene el libro de Geometría Algebraica, y ahí viene alguno de tus resultados.
LR- Sí, yo conocí bien a Hartshorne.
LP- Me acuerdo que me tocó de niño conocer a grandes matemáticos. Oscar Zariski, entre otros.
LR- Zariski, nada menos.
LP- Varias veces vino a México a trabajar aquí contigo y a mí me tocaba convivir con él en la parte no matemática puesto que yo tenía 9 o 10 años. También vino Pierre Samuel en 1955 más o menos. Me acuerdo porque traía a su hijo y se cayó en la fuente de la casa de Manuel Dublán y se mojó la ropa. Me pediste que trajera algo mío, un suéter, para que se lo pusiera... Luego, trabajaste en Berkeley.
LR- Sí, estuve dos semestres invitado por ellos, para hacer matemática, y estaba Tarski, Sidenberg, Maxwell Rosenlich. Y el otro...
LP- ...¿el de geometría algebraica?
LR- No, él hacía geometría en general.
LP- Me acuerdo que te acompañamos un semestre, en 1962, donde conviviste y trabajaste con matemáticos de Berkeley. Después regresamos a México y seguiste trabajando en Geometría Algebraica y Cohomología de Grupos. Durante ese periodo de los años 60 me acuerdo que estabas trabajando mucho también en la escritura de textos.
LR- También, eso era muy importante para maestros.
LP- Exactamente, y también en los años 70.
LR- De los de primaria, escribí todos los años, los 6 de primaria.
LP- Te acuerdas cómo fue la cuestión, ¿te los pidió la Secretaría de Educación Pública?, o ¿cómo estuvo?
LR- No, no fue por pedido, fue por gusto, por hacerlos, y se interesaron algunas editoriales.
LP- ¿Y también hiciste los de secundaria?
LR- De secundaria también, una vez que estás escribiendo, pues ya escribes todo... hasta de facultad también tengo uno, ¿no?
LP- Varios. Me acuerdo de los de secundaria. Tenías un equipo con 6 maestros, que trabajaban en eso, Cárdenas y tú, por supuesto.
LR- Matemáticos éramos Cárdenas y yo, nada más y los demás eran maestros que había que enseñarles la parte matemática ya superior, y ellos se pegaban a escribir también.
LP- Muy entusiastas, Villar era uno de ellos.
LR- Sí, sí, ahí está el libro.
LP- Colaboraste muchísimos años en la creación de textos de matemática para la Secretaría...
LR- Y más.
LP- Claro, es una de las labores más importantes que hay que hacer.
LR- A mí siempre me pareció muy importante la escritura de textos, más para los maestros que para los alumnos. Lo que necesitaban los maestros es tener, por escrito,

lo que debían enseñar. Les di mil conferencias, ...muchísimas.
LP- Sí, durante toda esa época ibas a muchas ciudades del país, ibas a Monterrey donde fundaste junto con otros la facultad de matemáticas, a Yucatán y también a Querétaro.
LR- Sí mucho a Querétaro... y a Toluca también mucho, a Morelia...
LP- Es decir, estuviste apoyando a muchísimas universidades donde se enseñaba matemática, para tener lo que ahora tenemos.
LR- Fuí muchísimo a Monterrey y creció rápidamente.
LP- A Sonora también...
LR- Sí, sí,
LP- Es decir, fuiste a muchos lugares de la República. Yo me acuerdo que a cada rato te íbamos a dejar a la estación del tren, viajabas toda la noche para amanecer allá y dar clase, en fines de semana muchas veces.
LR- Sí, en fines de semana, daba clases sábado y domingo y regresaba el domingo en la noche.
LP- Eso en la época de los 60, y después ibas manejando a muchos lugares.
LR- Yucatán, muchas veces iba en coche a Yucatán.
LP- Uno de tus cumpleaños lo pasaste en Mérida dando conferencias y participando en un congreso.
LR- También a Oaxaca fui mucho.
LP- Hay un famoso Symposium del 56, que vino Atiyah, Hilton, Kan, Cartan, Eilenberg, Chern y Hurevich quien perdió la vida en una de las pirámides pues al no ver bien se cayó. Vino Jean Pierre Serre, también estuvo Lefschetz. Tú colaboraste en la organización de ese famosísimo Symposium que hizo historia en la matemática mundial.
LR- Es que eso jaló a la gente que le gustaba trabajar en matemática y creció el grupo.
LP- También recuerdo que dirigiste muchísimas tesis de todos tipos.
LR- Ah claro, sí,...es que no había gente para hacerlo, tenía que meterse uno siempre.
LP- Ibas en la calle caminando o a cualquier tienda y todo mundo te conocía, porque de alguna u otra manera habían sido tus alumnos o asistentes a alguna de tus conferencias. Colaboraste muchísimos años con Humberto Cárdenas.
LR- Sí, sí, muchísimos, y ahorita seguiríamos, lo que pasa es que está en Morelia, si no, estaríamos escribiendo artículos.
LP- Pero has seguido trabajando con él todo el tiempo y han hecho un grupo de trabajo que los ha llevado por distintas áreas de la matemática y han publicado muchísimos artículos.
LR- Sí, porque Cárdenas nunca estuvo en Geometría Algebraica, estaba en otras cosas.
LP- También me acuerdo que vino Steenrod a México.
LR- Y estaba muy contento con nosotros, trabajaba muy bien.
LP- Y a través de todos estos años has visto crecer el ambiente matemático y no nada más en la Ciudad de México, sino en todo el país.
LR- Sí, hemos visitado todo el país, muchas veces.
LP- Del 60 al 62 fuiste presidente de la Sociedad Matemática Mexicana...
LR- Sí, sí, me pescaron, y ni modo de decir que no.
LP- Y te tocó organizar alguno de los congresos de la Sociedad, antes no era cada año...
LR- No era obligatorio, pero más o menos.
LP- Cada presidencia es de dos años de duración. La Sociedad Matemática Mexicana

obviamente creció enormemente.
LR- Bastante, porque fuimos a todas partes. No nos quedábamos quietos.
LP- En Saltillo hay una placa conmemorativa de la Sociedad Matemática Mexicana porque ahí se fundó. Cuando a mí me tocó ser presidente, 40 años después de ti, en el 2001, se colocó también una placa alusiva a la Sociedad Matemática Mexicana, en el mismo Ateneo Fuente de Saltillo...
LR- ...y esos congresos sirvieron mucho para entusiasmar a los maestros de matemáticas de todos los niveles, sobre todo los de primaria, secundaria y desde luego los más avanzados. Eso ha servido mucho para la mejor formación de los maestros.
LP- Entusiasmar a la gente... hay gente que no conoce nada de matemática y en cuanto oye hablar de matemática se entusiasma...
LR- ...y aprende que las matemáticas no son una serie de fórmulas y tablas sino que es el arte de razonar correctamente, nada más, y todo lo demás, sale sobrando.
LP- Muchas personas ven a la matemática desde distintos puntos de vista, algunos ven a la matemática como una herramienta para hacer algo...
LR- ...la utilidad...
LP- la utilidad de..., pero los matemáticos la vemos como una disciplina de estudio por sí misma.
LR- Formación mental...
LP- ...y la cual es una bella arte...
LR- ...sí, sí una bella arte....
LP- Y en cuanto al número de matemáticos que existen en México, qué puedes decir.
LR- Pues me parece que todavía somos muy pocos. Cuantos más matemáticos hay, más avanzado es el país. Eso es importantísimo. Una cosa es saberlas y otra cosa es utilizarlas, y si no la saben, no pueden utilizarla. Para que un país esté muy bien, debe tener buena matemática en muchas partes.
LP- Sí, en alguna ocasión leí que habría que multiplicar por 16 el número de matemáticos en México...
LR- ...posiblemente...
LP- ¿Por qué razón dirías que hay que estudiar matemáticas?
LR- ¿Por qué razón? Por gusto, que les guste, que les guste. En general le gusta pensar bien a la gente, pero da mucho trabajo pensar bien y cuando se dan cuenta que sí pueden, se ponen contentísimos. En cuanto descubren una cosa de matemáticas que la pueden razonar y deducir, les da mucho gusto a los chamacos. Eso es lo que hay que tratar de hacer: entusiasmar a la gente. Una cosa muy particular de la matemática es que la matemática es totalmente internacional, muchas de las disciplinas que se estudian van dirigidas a ciertos grupos a ciertos lugares, pero la matemática es totalmente de todo el mundo.

Y como ya se hacía tarde, decidimos parar por el momento para retomar esta conversación más adelante.

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, de octubre a diciembre de 2010.

Del 21 al 27 de noviembre en Ensenada, Baja California

24° Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Del 9 al 19 de diciembre en Cuernavaca, Morelos

Entrenamiento para los seleccionados nacionales.

Apéndice

Teorema 1 (Factorización en primos) *Todo entero n mayor que 1 puede expresarse como un producto de primos (con, tal vez, solamente un factor).*
Ver [5, 7].

Definición 2 (Congruencias) *Dados dos números enteros a, b, y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m, si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \pmod{m}$.*
Ver [9].

Teorema 3 (Pequeño teorema de Fermat) *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Ver [5, 7].

Teorema 4 (Desigualdad media aritmética - media geométrica) *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
Ver [3].

Definición 5 (Sucesión de Fibonacci) *La sucesión de Fibonacci F_n se define como sigue:*

$$F_1 = 1, F_2 = 1, \;\; y \;\; F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \;\; si \;\; n > 2.$$

Ver [4].

Teorema 6 (Teorema del binomio) *Si a y b son números reales y n es un entero positivo, entonces*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
Ver [6].

Teorema 7 (Fórmulas de área)

1. *El área de un rectángulo de lados* a *y* b *es* $a \times b$.
2. *El área de un triángulo es igual a* $\frac{1}{2}hl$, *donde* l *es la medida de un lado y* h *es la medida de la altura sobre dicho lado.*
3. *El área de un círculo de radio* r *es igual a* πr^2.

Ver [1, 2].

Teorema 8 (Suma de los ángulos internos de un triángulo) *La suma de los ángulos internos de un triángulo es* $180°$.
Ver [1, 2].

Teorema 9 (Desigualdad del triángulo) *Dado un triángulo cuyas longitudes de sus lados son* a, b *y* c, *entonces se cumplen las siguientes relaciones*

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad a + c > b.$$

El recíproco también es verdadero, es decir, si a, b *y* c *son números positivos que satisfacen las relaciones anteriores, entonces se puede formar un triángulo cuyos lados tienen longitudes* a, b *y* c.
Ver [2].

Teorema 10 (Teorema de Pitágoras) *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*
Ver [1, 2, 8].

Definición 11 (Congruencia de triángulos) *Los triángulos* ABC *y* $A'B'C'$ *son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo* ABC *son iguales a los ángulos y los lados del triángulo* $A'B'C'$.
Ver [1, 2].

Criterio 12 (Criterio de congruencia ALA) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio de congruencia se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*
Ver [1, 2].

Criterio 13 (Criterio de congruencia LLL) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio de congruencia se le conoce como lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*
Ver [1, 2].

Definición 14 (Semejanza de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir,*

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$
$$\angle ACB = \angle A'C'B'$$
$$\angle BAC = \angle B'A'C'$$

y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.
Ver [1, 2].

Criterio 15 (Criterio de semejanza AA) *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A este criterio de semejanza le llamamos ángulo-ángulo y lo denotamos como AA.*
Ver [1, 2].

Criterio 16 (Criterio de semejanza LAL) *Si dos triángulos tienen dos lados homólogos proporcionales y el ángulo entre dichos lados igual, entonces los triángulos son semejantes. A este criterio de semejanza se le conoce como lado-ángulo-lado y lo denotamos como LAL.*
Ver [1, 2].

Teorema 17 *Si trazamos dos rectas tangentes a una circunferencia desde un mismo punto P, entonces los segmentos de recta desde P a los puntos de tangencia son iguales y el centro de la circunferencia yace en la bisectriz del ángulo entre las rectas.*
Ver [2].

Teorema 18 (Medida del ángulo inscrito) *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco.*
Ver [1, 2].

Definición 19 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*
Ver [2].

Teorema 20 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, es decir, si y sólo si*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Ver [2].

Definición 21 (Figuras en perspectiva) *Dos figuras están en perspectiva si todas las rectas que unen puntos correspondientes de las dos figuras son concurrentes. El punto por el cual pasan estas rectas se llama centro de perspectiva.*
Ver [2].

Teorema 22 (Teorema de Desargues) *Dos triángulos están en perspectiva si y sólo si los puntos de intersección de lados correspondientes son colineales.*
Ver [2].

Bibliografía

[1] A. Baldor. *Geometría plana y del espacio*. Publicaciones Cultural, México, 1999.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM. Tercera edición, 2007.

[4] R. Grimaldi, *Matemáticas Discreta y Combinatoria*. Addison Wesley Longman, Pearson. Tercera edición, 1998.

[5] I. Niven, H. Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[6] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2000.

[7] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de Números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2003.

[8] A. Rechtman Bulajich. *Algunas demostraciones del teorema de Pitágoras*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 1, 2010.

[9] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[10] N. Vilenkin. *¿De cuántas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Directorio

Directorio del Comité Organizador de la OMM

Anne Alberro Semerena
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 3 81 03 80
Fax (777) 3 29 70 40
aalberro@uaem.mx

Gerardo Arizmendi Echegaray
Centro de Investigación en Matemáticas
Callejón Jalisco s/n, Mineral de Valenciana
36240, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 71 55
gerardo@cimat.mx

Ignacio Barradas Bribiesca
Universidad de Guanajuato
L. de Retana #5, Centro
36000, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 00 06 ext 2006
barradas@quijote.ugto.mx

Radmila Bulajich Manfrino
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
bulajich@uaem.mx

Gabriela Campero Arena
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 48 67
Fax (55) 56 22 48 66
gabriela@matematicas.unam.mx

Fernando Campos García
1a de Ángel Rico 85
AU.H. Vicente Guerrero
09200, Iztapalapa, Distrito Federal
Tel. (55) 34 63 75 43
fermexico89@hotmail.com

José Antonio Climent Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 24 59 22
Fax (55) 56 22 48 59
jach@fciencias.unam.mx

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 49 25
Fax. (55) 56 22 48 59
cobian@matematicas.unam.mx

David Cossío Ruiz
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
Instituto de Ingeniería y Tecnología
Departamento de Física y Matemáticas
Av. del Charro 450 Nte.
CP 32310, Cd. Juárez, Chihuahua
Tel. (656) 688 48 87
Fax. (656) 688 48 13
sirio11@gmail.com

Luis Cruz Romo
UPIITA, IPN
Av. Instituto Politécnico Nacional 2580
Col. Barrio la Laguna Ticomán
07340, México, D.F.
lucruz@ipn.mx

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Facultad de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
Callejón Jalisco s/n, Mineral de Valencia
36240, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 01 40
marcant@cimat.mx

Jesús Jerónimo Castro
CIMAT
Apartado Postal 402
36000, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 71 55
Fax (473) 7 32 57 49
jeronimo@cimat.mx

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Primera Cerrada de Alfalfares 41-2
Rinconada Coapa Primera Sec, Tlalpan
14330, México, D.F.
Tel. (55) 26 52 23 29
ssbmplayer@gmail.com

Carlos Jacob Rubio Barrios
Universidad Autónoma de Yucatán
Periférico norte tablaje 13615
97119, Mérida, Yucatán
Tel. (999) 942-3140 al 49
Fax (999) 942-31-40
carlos.rubio@uady.mx
jacob.rubio@gmail.com

Elena Ruiz Velázquez
Altair 12
Col. Lomas de Palmira
62550, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 320 54 39
Cel. (777) 133 39 83
eleniux@gmail.com
A00375640@itesm.mx

Pablo Soberón Bravo
Circuito Interior no. 830
Fracc. La Herradura
62303, Cuernavaca, Morelos
Cel. (777) 134 55 49
bandrak@hotmail.com

Carmen Sosa Garza
Facultad de Ingeniería, UAQ
Cerro de las Campanas s/n
Querétaro, Querétaro
Tel. (442) 1 92 12 64 ext. 121 ó 136
Fax (442) 1 92 12 646
carsg@uaq.mx

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
rogelio@matcuer.unam.mx

Eduardo Velasco Barreras
Universidad de Sonora
Calle Yucas 16, Vista Bella
83170, Hermosillo, Sonora
Tel. (662) 2 19 10 07
hamsteritokeweb@hotmail.com

Hugo Villanueva Méndez
Instituto de Matemáticas, UNAM
Cub. 4 de Becarios,
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria
Coyoacán 04510,
México, D.F.
Tel (55) 56 22 45 32
vill_hugo@hotmail.com
hvillan@matem.unam.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@fciencias.unam.mx`

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

`http://www.omm.unam.mx/`