UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Curso de Aritmética

Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Chiapas

Marzo del 2018

Introducción

Las olimpiadas de matemáticas es un concurso de alcance internacional. En mi experiencia he visto como los participantes en dicho concurso adquieren una gran capacidad de comprensión de las matemáticas, haciendo posible que sean autodidactas y puedan ver muchas de las aplicaciones de esta materia.

El presente material tiene como objetivo desarrollar algunas técnicas básicas para la solución de problemas de aritmética. Abordaremos las técnicas con unos ejemplos y posteriormente ejercicios para practicar el tema.

1. Suma de Gauss

Empezaremos por algunas sumas que son muy comunes al resolver problemas de olimpiada. La suma de Gauss es la suma de los primeros n naturales, es decir, $1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Para obtener el resultado de la suma, se usa el artificio que consiste en sumar lo mismo 2 veces pero de diferente manera. Llamemos S la suma buscada, entonces:

$$\begin{array}{rcccccccccc} & S = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\ + & & & & & & & & & & \\ & S = & n & + & n-1 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline & 2S = & n+1 & + & n+1 & + & \cdots & + & n+1 & + & n+1 \end{array}$$

Observemos que en el lado derecho se tienen n sumandos iguales a $n-1$, sumando y despejando obtenemos que $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

Una progresión aritmética es una sucesión de números tales que la diferencia de dos términos consecutivos cualesquiera de la sucesión es una constante, es decir, es una sucesión de la forma $a, a+r, a+2r, \ldots, a+nr, \ldots$. Haciendo el mismo artificio que con la suma de Gauss se obtiene que la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética es:

$$(a) + (a + r) + (a + 2r) + \cdots + (a + (n - 1)r) = \frac{n[2a + (n - 1)r]}{2}$$

Ejemplo 1. *Determinar la fórmula para calcular la suma* $2 + 4 + \cdots + 2n$

Solución. Para obtener esta suma, podemos factorizar el factor 2, obteniendo:

$$2 + 4 + \cdots + 2n = 2 \cdot (1 + 2 + \cdots n) = 2 \cdot \frac{n(n + 1)}{2} = n(n + 1).$$

Ejemplo 2. *Determinar la fórmula para calcular la suma* $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1$.

Solución. Aplicando la misma idea que para la suma de Gauss, ya que tenemos una progresión aritmética de diferencia 2, observemos que la suma del primer término con el último es $2n - 1 + 1 = 2n$, y en total hay n números, por lo tanto la suma será $\frac{n(2n)}{2} = n^2$.

Ejemplo 3. *En un concurso de matemáticas, antes de iniciar el examen todos los concursantes se saludaron. Un niño observó que en total se dieron 45 apretones de mano. ¿Cuántas personas habián en el salón?*

Solución. Observemos que si n representa el total de personas, la primer persona va a saludar a $n-1$ personas, la segunda persona también saludar a $n-1$ pero entre ellos, está la primer persona, asi que sólo contamos $n-2$ saludos y asi sucesivamente, hasta la persona n que ya fue saludada por todos. Por lo tanto el total de apretones de mano son $(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots 2+1 = \frac{(n-1)\cdot n}{2} = 45$. Resolviendo la ecuación y como el número de personas debe ser entero positivo, tenemos que habian 10 personas.

Una progresión geométrica es aquella en la que el cociente de cualesquiera dos terminos consecutivos es constante, es decir, es una sucesión de la forma $a, ar, ar^2, \ldots, ar^n, \ldots$. Para hallar la suma de los primeros n términos de la progresión geométrica se hace un artificio similar.

$$\begin{array}{rcccccccccccc} & S = & a & + & ar & + & \cdots & + & ar^{n-2} & + & ar^{n-1} & & \\ - & & & & & & & & & & & & \\ & rS = & & & ar & + & \cdots & + & ar^{n-2} & + & ar^{n-1} & + & ar^n \\ \hline & S-rS = & a & + & 0 & + & \cdots & + & 0 & + & 0 & - & ar^n \end{array} \tag{1.1}$$

Despejando se obtiene que $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$. Un caso particular que es muy usado es cuando $a = 1$, en este caso obtenemos:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \tag{1.2}$$

Ejemplo 4. *Calcula las sumas* $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10}$ *y* $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{1024}$.

Solución. Para la primera suma, tenemos $1 + 2 + 2^2 + \cdots 2^{10} = \frac{2^{11}-1}{2-1} = 2^{11} - 1$.

Para la segunda, podemos observar que $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{1024} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^8}\right) = \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^8\right)$. Así, usando 1.2 con $r = \frac{1}{2}$ tenemos que:

$$\frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^8\right) = \frac{1}{2^2}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^9 - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right) = \frac{1}{2^2}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

Ejemplo 5. *Demuestre que la suma* $7 + 77 + 777 + \cdots 77\ldots77$*, donde el último sumando tiene* 1997 *dígitos, es* $\frac{7(10^{1998}-9\cdot 1997-10)}{81}$

Solución.

$$\begin{aligned}
7 + 77 + 777 + \cdots 77\ldots77 &= 7\cdot(1 + 11 + 111 + \cdot \underbrace{111\ldots11}_{1997})\\
&= 7\cdot\left(\frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \cdots + \frac{10^{1997}-1}{9}\right)\\
&= 7\cdot\left(\frac{10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{1997} - 1997}{9}\right)\\
&= 7\cdot\left(\frac{10(1 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{1996}) - 1997}{9}\right)\\
&= 7\cdot\left(\frac{10(\frac{10^{1997}-1}{9}) - 1997}{9}\right) = 7\cdot\left(\frac{10^{1998} - 9\cdot 1997 - 10}{81}\right)
\end{aligned}$$

De la fórmula (1.2) tenemos que $r^n - 1 = (r-1)(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1})$, sustituyendo $r = \frac{a}{b}$ obtenemos:

$$\frac{a^n}{b^n} - 1 = \left(\frac{a}{b} - 1\right)\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} + \cdots + \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}\right)$$

Multiplicando la ecuación anterior por b^n obtenemos que:

$$a^n - b^n = (a-b)\cdot(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Observemos que si hacemos $b = -b'$ y consideramos n impar, tenemos:

$$a^n + b'^n = (a-b')\cdot(a^{n-1} - a^{n-2}b' + a^{n-3}b'^2 - \cdots - ab'^{n-2} + b'^{n-1}).$$

Para finalizar esta sección, presentamos un par de fórmulas que son usadas en problemas de olimpiada.

- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Ejercicios

Problema 1. Las campanas de un reloj suenan cada hora. Por ejemplo, si son las 3 de la mañana o de la tarde el reloj toca tres campanadas. ¿Cuántas campanadas toca en un día completo?

Problema 2. Raúl leyó un libro. El primer día leyó 5 páginas, y cada día siguiente leyó dos páginas más que el anterior. Si la lectura le llevó un total de 20 días, ¿Cuántas páginas tenía el libro?

Problema 3. ¿A cuánto es igual $-1 + 3 - 5 + 7 - 9 + 11 - 13 + \cdots + 2015 - 2017 + 2019$?

Problema 4. Carlos estaba aburrido y para entretenerse, sumó los números de las páginas de su libro que tiene 100 hojas (las páginas estan numeradas del 1 al 200). Decidió empezar la suma en la pagina 37. ¿Cuál fue el resultado de las suma?.

Problema 5. Un dominó chido es como el dominó clásico, con la diferencia que los números varian de 0 hasta 9. ¿Cuántas fichas tiene este dominó?.

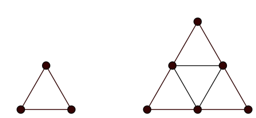
Problema 6. Encontrar las soluciones en números naturales de la ecuación

$$\frac{1 + 3 + \cdots (2n - 1)}{2 + 4 + \cdots 2n} = \frac{2017}{2018}$$

Problema 7. Calcular la suma de las 100 fracciones que se obtienen formando todos los cocientes de cada par de números del siguiente conjunto $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\}$.

Problema 8. En una fiesta asistieron 30 parejas, al brindar, cada persona chocó su copa con cada una de las otras personas que no era su pareja. ¿Cuántos choques de copa se hicieron en total?.

Problema 9. Alejandra tiene palitos de madera de $5cm$ de largo y bolitas de plastilina con las que quiere unir los palitos para formar triangulos como se muestra en la figura. En la parte izquierda de la figura se puede observar un triángulo cuyo lado mide $5cm$ y en la derecha un triángulo cuyo lado mide $10cm$. ¿Cuántos palitos necestia Alejandra para formar un triángulo cuyo lado mida $1m$?



Problema 10. Calcular la suma a) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2$, b)$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2$.

Problema 11. ¿Cuál es el valor de: $\frac{2017^2-2016^2+2015^2-2014^2+\cdots+3^2-2^2+1^2}{2017-2016+2015-2014+\cdots+3-2+1}$?.

2. Problemas de secuencias y dígito de las unidades

Hay problemas muy comunes en los concursos cuya solución es muy sencilla al observar que se forman unas secuencias, es decir, hay un patrón que se repite en un número constante de pasos. Para ilustrar este tipo de problemas, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6. *Carlos escribe algunas letras de la siguiente manera: $AXBFYBAXBFYBAXBFY\ldots$, ¿Qué letra se encuentra en la posición 2018?. La letra F está en la posición 4 y en la posición 7 está la letra A.*

Solución. *Observemos que se forma una secuencias cuyo* **periodo** *es 6, es decir, cada 6 letras se vuelve a empezar la secuencia $AXBFYBA$.*

Para resolver este problemas, podemos pensar en hacer "paquetes"de letras que contienen a las letas de un periodo. Por ejemplo, si tenemos $AXBFYBAXBFYBAXB$, es decir, 15 letras, al hacer la división 15 entre 6, obtenemos como cociente 2 y residuo 3, esto nos dice que se pueden hacer 2 paquetes y sobran 3 letras, esto se puede visualizar de la siguiente manera: $|AXBFYB||AXBFYB|AXB$. Como al terminar cada paquete empieza la secuencia ($AXBFYB$), si el residuo es 3, nos indica que la letra 15 debe ser B, ya que es la tercer letra del periodo.

Los problemas en los que se pregunta el dígito de las unidades de un número es muy común. La primera observación es que al sumar dos números, la terminación de la suma depende únicamente de los dígitos de las unidades de los sumandos. Para ver esto, observemos en el algorítmo de la suma que el dígito de las unidades esta dado por la suma de la primer columna (dígito de las unidades de todos los sumandos). Algo similar sucede en la multiplicación, ya que en el algorítmo de la multiplicación, la primer fila de la multiplicación se obtiene al multiplicar el dígito de las unidades del segundo factor por todo el primer factor. Posteriormente, las siguientes filas se recorren un lugar y al sumar, el dígito de las unidades del producto es precisamente el dígito de las unidades del número en la primer fila, es decir, el dígito en que termina el producto de los dígitos de las unidades de los factores, para entender esto se puede hacer en la libreta el producto de los números 2017×2018 y observar que el dígito de las unidades es 6, que corresponde al dígito de las unidades de 7×8.

Ejemplo 7. *Hallar el dígito de las unidades de* 2^{2018} ***Solución.***

Si no tenemos idea de que hacer, podemos empezar a elevar 2 a diferentes potencias y observar que sucede. Al hacerlo, observamos lo siguiente: 2^1 = ***2***, 2^2 = ***4***, 2^3 = ***8***, 2^4 = *1**6***, 2^5 = *3**2***, 2^6 = *6**4***, 2^7 = *12**8***, 2^8 = *25**6***, 2^9 = *51**2***, 2^{10} = *102**4***.

Después de unas cuantas cuentitas, podemos observar que se forma una secuencia, la secuencia es $2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6\cdots$*, por lo tanto procedemos como en el ejemplo anterior, es decir, identificamos que el periodo es* $2, 4, 8, 6$*, el cual tiene longitud 4, por lo tanto dividimos* 2018 *entre 4, esto nos da 504 con residuo 2. Esto nos dice que el número buscado es el segundo número del periodo, es decir, cuatro. Por lo tanto* 2^{2018} *termina en 4.*

Una observación importante es que en las "cuentitas" iniciales, no era necesario calcular todo el número ya que sólo queremos la terminación, por ejemplo, como 2^8 = *25**6***, *que termina en 6, y para obtener* 2^9 *lo que hacemos es multiplicar* 2^8 *con 2, se tiene que la terminación de* 2^9 *es la terminación de* 6×2*, que es 2.*

Ejercicios

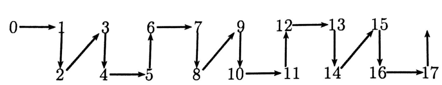
Problema 12. ¿Cuál es el último dígito de $2017 \times 2017 \times 2017 \times 2017 \times 2017$?.

Problema 13. En la siguiente multiplicación faltan dos cifras, ¿qué cifras son?.

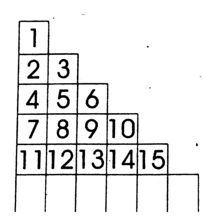
$$17 \times 12\square = 2\square 08$$

Problema 14. ¿Cuál es el dígito de las unidades de $(1+1^2)+(2+2^2)+(3+3^2)+\cdots+(2017+2017^2)$?

Problema 15. Los números entre el 0 y 2017 están acomodados en un arreglo de flechas. En la siguiente figura de la derecha se muestra como inicia dicho arreglo. ¿Cuál es la posición de las flechas entre el 2015 y el 2017?



Problema 16. Los números enteros positivos se arreglan siguiendo el patrón que se indica en el diagrama. ¿Cuál es el número que aparece en la casilla que corresponde al renglón 64 (horizontal) y a la columna 38 (vertical)?



Problema 17. En la siguiente multiplicación, dígitos distintos se representan con letras diferentes. Halla el número *dbc*.

$$\begin{array}{r} a\,b\,c \\ \times \quad c \\ \hline d\,b\,c \end{array}$$

Problema 18. Halla el dígito de las unidades de $3^{88} \cdot 7^{87}$.

Problema 19. ¿Cuál es el dígito de las unidades de $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 2017^2$

Problema 20. Javier escogió 3 dígitos del 1 al 9, con ellos escribió todos los números de tres cifras distintas que se pueden formar y luego los sumó, el resultado es un número de 4 cifras que termina en 18. ¿Cuánto le dió la suma?.

Problema 21. Sea a_n el dígito de las unidades del número $2017 + 2017^3 + 2017^5 + \cdots + 2017^{2n-1}$. Calcular la suma: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2017}$.

Problema 22. ¿Cuál es la última cifra no nula del producto de los primeros 100 enteros positivos?

Problema 23. ¿Puede un número escrito con 100 dígitos 3, 100 dígitos 7 y 100 dígitos 2, ser un cuadrado perfecto?

Divisibilidad

Los números naturales son los que usamos para contar: $1, 2, 3, \ldots$. Al conjunto de números naturales se denota por $\mathbb{N}$. Los números enteros es el conjunto denotado por $\mathbb{Z}$ y es el conjunto $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\}$.

Definición. *Decimos que un entero b es divisible por un entero a (diferente de cero), si existe un entero x tal que $b = a \cdot x$. Que b sea divisible por a, se denotará por $a|b$, que b no es divisible por a, lo denotamos por $a \nmid b$.*

A continuación enunciamos las propiedades principales de divisibilidad:

1.- Si $a|b$, entonces $a|bc$ para cualquier entero c.

2.- Si $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$.

3.- Si $a|b$ y $a|c$ entonces $a|(bx + cy)$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Z}$.

4.- Si $a|b$ y $b|a$ entonces $a = \pm b$.

5.- Si $a|b$, $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a \leq b$.

6.- $m \neq 0$ y $a|b$ si y sólo si $ma|mb$.

El siguiente resultado es consecuencia de la tercer propiedad y nos será muy útil más adelante.

Si cualesquiera dos términos en $a + b = c$ son divisibles por d, entonces el tercer término también es divisible por d.

Ejemplo 8. *Indica cuáles afirmaciones son ciertas:*

- $-12|36$ *ya que* $36 = (-12) \cdot (-3)$
- $5 \nmid 2007$.
- $1|a$ *para todo entero* a *ya que* $a = (1) \cdot (a)$
- $0 \nmid a$ *para todo entero* $a \neq 0$. *Ya que si* $a \neq 0$ *tenemos que* $a \neq 0 = 0 \cdot x$ *para todo* $x \in \mathbb{Z}$.
- $a|0$ *para todo entero* a *ya que* $0 = a \cdot 0$ *para cualquier entero* a.

Ejemplo 9. *Demuestre que si* $(a - c)|(ab + cd)$ *entonces* $(a - c)|(ad + bc)$

Solución. Es claro que $(a - c)|(a - c)(d - b)$ y por la propiedad 3 tenemos que $(a - c)|[(ab + cd) \cdot 1 + (a - c)(d - b) \cdot 1] = ad + bc$.

Existen criterios que nos permiten verificar de manera rápida si un número es divisible entre otro. Aquí enunciaremos los criterios de divisilidad del 2 al 11:

Criterio del 2: Un número a es divisible entre 2 si y solo si a termina en 0, 2, 4, 6, u 8.

Criterio del 3: Un número a es divisible entre 3 si y solo si la suma de los dígitos de a es divisible entre 3.

Criterio del 4: Un número a es divisible entre 4 si y solo si el número formado entre las dos últimas cifras de a es múltiplo de 4.

Criterio del 5: Un número a es divisible entre 5 si y solo si a termina en 0 o 5.

Criterio del 6: Un número a es divisible entre 6 si y solo si a es divisible entre 2 y entre 3.

Criterio del 7: Un número a es divisible entre 7 si y solo si el número que resulta de quitarle a a su último dígito y restarle el doble del último dígito es divisible entre 7. (Por ejemplo 161 es divisible entre 7 pues $16–2 \cdot 1 = 14$ es divisible entre 7; también 1673 es divisible entre 7 pues $167–2 \cdot 3 = 161$ es divisible entre 7)

Criterio del 8: Un número a es divisible entre 8 si y solo si el número formado por las tres últimas cifras de a es múltiplo de 8.

Criterio del 9: Un número a es divisible entre 9 si y solo si la suma de los dígitos de a es divisible entre 9.

Criterio del 10: Un número a es divisible entre 10 si y solo si a termina en 0.

Criterio del 11: Un número a es divisible entre 11 si y solo si la diferencia de la suma de las cifras de a en posición impar menos la suma de las cifras de a en posición par es divisible entre 11. (Por ejemplo 82817053 es divisible entre 11 pues (3+0+1+2)–(5+7+8+8)=-22 que es divisible entre 11)

A continuación usaremos la notación desarrollada de un número. La notación desarrollada es la forma de exprezar un número decimal como suma de múltiplos de potencias de diez, por ejemplo: $463 = 400 + 60 + 3 = 4 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 3 = 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$. En general, si n es un entero positivo de k cifras, entonces $n = 10^{k-1}a_{k-1} + 10^{k-2}a_{k-2} + \cdots 10^1 a_1 + a_0$ donde a_0 es el dígito de las unidades, a_1 el de las decenas y así sucesivamente.

Ejemplo 10. *Demostrar el criterio de divisibilidad de 2, es decir, demostrar que un número n es divisible por 2 si y sólo si la útima cifra de n es par.*

Solución.

$$\begin{aligned} n = 10^{k-1}a_{k-1} + 10^{k-2}a_{k-2} + \cdots 10^1 a_1 + a_0 &= 2^{k-1}15^{k-1}a_{k-1} + 2^{k-2}5^{k-2}a_{k-2} + \cdots 2^1 5^1 a_1 + a_0 \\ &= 2(2^{k-2}15^{k-1}a_{k-1} + 2^{k-3}5^{k-2}a_{k-2} + \cdots 5^1 a_1) + a_0 \end{aligned}$$

Sea m el número $2^{k-2}15^{k-1}a_{k-1} + 2^{k-3}5^{k-2}a_{k-2} + \cdots 5^1 a_1$, de lo anterior tenemos que $n = 2m + a_0$ con lo que usando la propiedad en negritas enunciada anteriormente, se tiene que si n es par, entonces dos términos de la igualdad son pares, por lo tanto el tercero debe ser par, es decir, a_0 debe ser par, al revés también se cumple, es decir, si a_0 es par, entonces n debe ser par.

Ejemplo 11. *Demostrar el criterio de divisibilidad de 4, es decir, demostrar que un número n es divisible por 4 si y sólo si el número formado entre las dos últimas cifras de a es múltiplo de 4.*

Solución. De la notación desarrollada de un número, se puede observar que todo número N se puede ver de la forma $N = 100A + B$ donde B es el número formado por las dos últimas cifras de N. Como 4 divide a 100, aplicamos nuestro lema y tenemos que 4 divide a N si y sólo si 4 divide a B.

Ejemplo 12. *¿Para cuántos enteros positivos n se cumple que* $(n + 2)|36$ *?*

Solución. Como n debe ser entero, $n + 2$ también lo es, asi que $n + 2$ debe ser un divisor de 36. Observemos que 36 tiene 9 divisores (1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 36), al igualar $n + 2$ a cada divisor, se puede ver que n puede tomar 7 valores positivos.

Ejercicios

Problema 24. ¿Cuál es el menor entero positivo formado sólo por dígitos 1 y 0 que es divisible entre 15?

Problema 25. Justifica los criterios de divisibilidad de 2, 5 y 10. Son bastante parecidos al de 4.

Problema 26. Exactamente una de las siguientes afirmaciones acerca del número de mi casa es falsa: La suma de las cifras del número es 6, dos de las cifras del número son iguales, el número es menor que 110, el número es mayor que 40, el número es primo. ¿Cuál es el número de mi casa?

Problema 27. ¿Para cuántos valores enteros positivos de n la expresión $\frac{18}{n+4}$ es un entero?

Problema 28. ¿Cuántos números enteros positivos de 5 dígitos hay tal que el producto de sus dígitos es 2000?

Problema 29. ¿Qué valor debe tener la cifra "M" en el número 5M8M para que sea divisible entre 2 y 3 a la vez?

Problema 30. La suma de los cuadrados de tres números consecutivos cualesquiera es:

a) Siempre impar b) Siempre par c) Nunca divisible entre 3 d) Nunca divisible entre

Problema 31. ¿Cuántos números de 10 dígitos que contienen sólo ceros y unos son divisibles entre 9? (El primer dígito tiene que ser uno).

Problema 32. Se sabe que el número $A77C$ es divisible entre 12. Si A y C son distintos, encuentra los posibles valores de A y C.

Problema 33. Al leer una nota de compra ví que por 72 pavos se pagó $*67{,}9*$ pesos (la primera y última cifra se borraron). ¿Cuáles son los dígitos faltantes?

Problema 34. Sea N un número entero positivo y a, b, c, d los cuatro divisores positivos más pequeños de N, en donde $a < b < c < d$. Encuentra todos los valores posibles de N para los cuales $N = b \cdot c + d$.

Problema 35. ¿Cuántos polígonos regulares tienen ángulos internos cuya medida sea un número entero de grados?

Problema 36. A Julio le dieron el número secreto de su nueva tarjeta de crédito, y observó que la suma de los cuatro dígitos del número es 9 y ninguno de ellos es 0; además el número es múltiplo de 5 y mayor que 1995. ¿Cuál es la tercera cifra de su número secreto?

Problema 37. Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 se forman enteros de dos cifras de manera que sean múltiplos de 15.¿Cuántos enteros distintos se pueden formar?

Problema 38. Sea $N = \underbrace{2017}_{1}\underbrace{2017}_{2}\ldots\underbrace{2017}_{2017}$, el número formado al pegar 2017 veces el 2017. ¿Cuál es el número más cercano a N que es mútiplo de tres?.

Problema 39. Las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se usan para escribir un número $abcdef$ de seis dígitos tal que abc es divisible entre 4, bcd es divisible entre 5, cde es divisible entre 3 y def es divisible entre 11. ¿Cuánto vale a?

Problema 40. Escribe un número usando exactamente una vez cada dígito del 1 al 9, tal que el número determinado por cualesquiera dos dígitos consecutivos sea divisible entre 7 o 13.

Problema 41. Se tiene que $x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x + 7x + 8x + 9x = a$, donde a es un número que tiene todas sus cifras iguales. ¿Cuál es el menor valor positivo que puede tomar a?

Problema 42. Justifica porqué el producto de cualesquiera 3 números naturales consecutivos es divisible entre 6.

Problema 43. En mi calculadora una de las teclas del 1 al 9 funciona mal: al apretarla aparece en la pantalla un dígito entre 1 y 9 que no es el que corresponde. Cuando traté de escribir el número 987654321, apareció en la pantalla un número divisible entre 11 y que deja resto 3 al dividirlo entre 9. ¿Cuál es la tecla descompuesta?.

3. Teorema fundamental de la aritmética

Un entero $p > 1$ es llamado número primo si no existen divisores d de p tales que $1 < d < p$. Si un entero $a > 1$ no es primo entonces se le llamaremos compuesto. Se puede demostrar que si n es compuesto entonces tiene un divisor primo p tal que $p \leq \sqrt{n}$. Esta observación nos ayuda a determinar si un número es primo o compuesto, lo único que debemos hacer es ver si algún primo menor o igual a la raíz cuadrada del número lo divide. Otro resultado importante sobre primos es el siguiente: Si p es un primo y $p|ab$, entonces $p|a$ o $p|b$, se puede ver con un ejemplo que si el número es compuesto, no necesariamente la afirmación se cumple, por ejemplo: 4 divide a 2×2, pero 4 no divide a 2. La propiedad enunciada para primos se puede exteneder a un producto finito, es decir, si $p|a_1a_2 \cdots a_n$, entonces p divide a al menos un factor a_i.

El teorema fundamental de la aritmética afirma que todo número entero mayor a 1 se puede escribir como el producto de primos de manera única salvo el orden de los factores.

Por ejemplo: $5 = 5$, $30 = 2 \times 3 \times 5$, $140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$. En el primer ejemplo se tiene que el producto puede ser de un sólo factor.

Al agrupar todos los primos, obtenemos la factorización del número que será llamada la descomposición canónica, por ejemplo $140 = 2^2 \times 5 \times 7$. En general, para un número n, la descomposición canónica del número se expresa como $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots p_k^{\alpha_k}$, esto nos dice que los primos $p_1, p_2, \cdots, p_k$ dividen a n y por la unicidad de la factorización son los únicos primos que lo dividen.

La descomposición canónica es muy importante, observamos que los divisores de n deben ser de la forma $p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \cdots p_k^{\beta_k}$, donde $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, es decir, el exponente β_i tiene $\alpha_i + 1$ posibilidades, obteniendo así que el número n tiene $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \cdot \times (\alpha_k + 1)$ divisores positivos.

Otra observación importante es la siguiente: Si n es un cuadrado perfecto, entonces TODOS los exponentes de la descomposición canónica son pares. Para ver esto, al ser n un cuadrado perfecto, $n = m^2$ donde m es un entero (lo podemos tomar positivo). Si $n = 1$, todos los exponentes de la descomposición canónica son cero y por lo tanto todos son pares. Si $n \neq 1$, entonces $m > 1$, por lo tanto m tiene una descomposición canónica $q_1^{\beta_1} \times q_2^{\beta_2} \times \cdots q_k^{\beta_k}$, al sustituir se tiene que $n = q_1^{2\beta_1} \times q_2^{2\beta_2} \times \cdots q_k^{2\beta_k}$, obteniendo la observacion inicial. Esto se cumple en general para potencias k-ésimas, es decir, si n es un cubo perfecto, todos sus exponentes en la descomposición canónica son multiplos de 3, si n es potencia k-ésima, entonces todos los exponentes de la descomposición canónica de n son múltiplos de k.

Ejercicios

Problema 44. El producto de tres enteros positivos es 180 y su suma es 23. ¿Cuál es el mayor de esos tres números?

Problema 45. Hugo abre su libro de matemáticas y observa que el producto de los números de las dos páginas es 1806. ¿Cuánto vale la suma de los dos números?.

Problema 46. Hugo olvidó la contraseña de su computadora. Como Hugo es muy precavido, anotó en su libreta que lo siguiente: La contraseña es un número de cuatro dígitos, el 6 no es uno de los dígitos y el producto de los dígitos es 420. ¿Cuál es la suma de los dígitos de la contrseña de Hugo?.

Problema 47. ¿Cuál es el menor número por el que debes multiplicar a 750 para obtener un cuadrado perfecto?

Problema 48. Encuentra la menor pareja de números enteros consecutivos tales que cada uno de ellos tiene exactamente 6 divisores.

Problema 49. ¿Cuál es la mayor potencia de 2 que divide al resultado de la suma $1+2+3+...+10^{11}$?.