I Olimpiada de Mayo (1995)

Nivel 2

1. Verónica, Ana y Gabriela están formando una ronda y se divierten con el siguiente juego. Una de ellas escoge um número y dice en voz alta; la que esta a su izquierda lo divide por su mayor divisor primo y dice el resultado en voz alta y así sucesivamente. Ganará aquella que dice en voz alta el número 1, momento en el que el juego termina. Ana escogió un número mayor que 50 y menor que 100 y ganó. Verónica escogió el número siguiente al escogido por Ana y también ganó. Determinar todos los números que pueideron haber sido escogidos por Ana.

2. El dueño de una ferretería compró cierta cantidad de tornillos en cajas cerradas y vende los tornillos por separado. Nunca tiene más de una caja abierta. Al final del día lunes quedan 2208 tornillos, al final del día martes hay aún 1616 tornillos y al final del miercoles hay aún 973 tornillos. Para controlar a los empleados, todas las noches anota la cantidad de tornillos que hay en la única caja abierta. La cantidad anotada el día martes es el doble que la del día lunes. ¿Cuántos tornillos hay en cada caja cerrada si se sabe que son menos de 500?

3. Se considera inicialmente un número de tres dígitos distintos, ninguno de los cuales es igual a cero. Cambiando de lugar dos de sus dígitos se encuentra un segundo número menor que el primero. Si la diferencia entre el primero y el segundo es un número de dos dígitos y la suma del primero y el segundo es un número capicúa menor que 500, ¿cuáles son los capicúas que pueden ser obtenidos?

4. Se Considera una pirámide cuya base es un triángulo equilátero BCD y cuyas otras caras son triángulos isósceles, rectángulos en el vértice común A. Una hormiga parte del vértice B, llega a un punto P de la arista CD, de ahí va a un punto Q de la arista AC y retorna al punto B. Se el caminho que hace es mínimo, ¿cuánto mide el ángulo PQA?

5. Tneemos 105 monedas, entre las cuales sabemos que hay tres falsas. Las monedas auténticas poseen todas el mismo peso, que es mayor que el de las falsas, las cuales también tienen igual peso. Determine de qué manera se pueden selecionar 26 monedas auténticas realizando apenas dos pesadas en una balanza de dos platillos.

II Olimpiada de Mayo (1996)

Nivel 2

---

1. En un rectángulo $ABCD$, AC es una diagonal. Una recta r se mueve paralelamente a AB, formando dos triángulos opuestos por el vértice, interiores al rectángulo. Prueba que la suma de las áreas de dichos triángulos es mínima cuando r pasa por el punto medio del segmento AD.

2. Uniendo $15^3 = 3375$ cubitos de 1 cm^3 se pueden construir cuerpos de 3375 cm^3 de volumen. Indica cómo se construyen dos cuerpos A y B con 3375 cubitos cada uno y tales que la superficie lateral de B sea 10 veces la superficie lateral de A.

3. Natalia y Marcela cuentas de 1 en 1 empezando juntas en 1, pero la velocidad de Marcela es el triple que la de Natalia (cuando Natalia dice su segundo número, Marcela dice el cuarto número). Cuando la diferencia de los números que dicen al unísono es alguno de los múltiplos de 29, entre 500 y 600, Natalia sigue contando normalmente y Marcela empieza a contar en forma descendente de tal forma que, en un momento, las dos dicen al unísono el mismo número. ¿Cuál es dicho número?

4. Sea $ABCD$ un cuadrado y F un punto cualquiera del lado BC; se traza por B la perpendicular a la recta DF que corta a la recta DC en Q. ¿Cuánto mide el ángulo FQC?

5. Se tiene una cuadrícula de 10×10. Un movimiento en la cuadrícula consiste en avanzar 7 cuadrados a la derecha y 3 cuadrados hacia abajo. En caso de salirse por un renglón se continúa por el principio (izquierda) del mismo renglón y en caso de terminarse una columna se continúa por el principio de la misma columna (arriba). ¿Dónde se debe empezar para que después de 1996 movimientos terminemos en una esquina?

III Olimpiada de Mayo (1997)

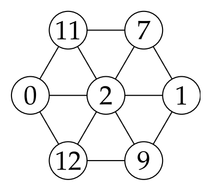
Nivel 2

1. ¿Cuántos números de siete dígitos son múltiplos de 388 y terminan en 388?

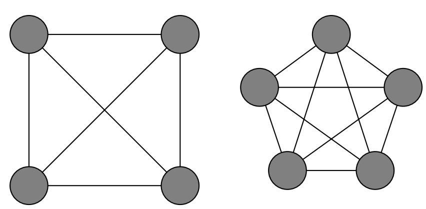
2. En un cuadrado $ABCD$ de lado k, se ubican los puntos P y Q sobre los lados BC y CD, respectivamente, de tal manera que $PC = 3PB$ y $QD = 2QC$. Si se llama M al punto de intersección de AQ y PD, determinar el área del triángulo QMD en función de k.

3. Se tienen 10000 fichas iguales con forma de triángulo equilátero. Con estos triangulitos se forman hexágonos regulares, sin superposiciones ni huecos. Si se forma el hexágono regular que desperdicia la menor cantidad posible de triangulitos, ¿cuántos triangulitos sobran?

4. En las figuras, se señalan los vértices con un círculo. Se llaman caminos a los segmentos que unen vértices. Se distribuyen números enteros no negativos en los vértices y, en los caminos, las diferencias entre los números de sus extremos. Diremos que una distribución de números es garbosa si aparecen en los caminos todos los números de 1 al n, donde n es el número de caminos. El siguiente es un ejemplo de distribución garbosa:



Dar, si es posible, una distribución garbosa para las siguientes figuras. En caso de no poder hacerlo, mostrar por qué.



5. ¿Cuáles son las posibles áreas de un hexágono con todos los ángulos iguales y cuyos lados miden 1, 2, 3, 4, 5 y 6, en algún orden?

IV Olimpiada de Mayo (1998)

Nivel 2

---

1. Inés eligió cuatro dígitos distintos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Formó con ellos todos los posibles números de cuatro cifras distintas y sumó todos esos números de cuatro cifras. El resultado es 193314. Halla los cuatro dígitos que eligió Inés.

2. ABC es un triángulo equilátero. N es un punto del lado AC tal que $AC = 7 \cdot AN$, M es un punto del lado AB tal que MN es paralela a BC y P es un punto del lado BC tal que MP es paralela a AC. Halla la fracción $\dfrac{\text{área}(MNP)}{\text{área}(ABC)}$.

3. Dado un tablero cuadriculado de 4×4 con cada casilla pintada de un color distinto, se desea cortarlo en dos pedazos de igual área mediante un solo corte que siga las líneas de la cuadrícula. ¿De cuántas maneras se puede hacer?

4. En el piso del patio hay dibujado un octógono regular. Emiliano escribe en los vértices los números del 1 al 8 en cualquier orden. Pone una piedra en el punto 1. Camina hacia el punto 2, habiendo recorrido $1/2$ del camino se detiene y deja la segunda piedra. Desde allí camina hacia el punto 3, habiendo recorrido $1/3$ del camino se detiene y deja la tercera piedra. Desde allí camina hacia el punto 4, habiendo recorrido $1/4$ del camino se detiene y deja la cuarta piedra. Así sigue hasta que, después de dejar la séptima piedra, camina hacia el punto 8 y habiendo recorrido $1/8$ del camino deja la octava piedra. La cantidad de piedras que quedan en el centro del octógono depende del orden en que escribió los números en los vértices. ¿Cuál es la mayor cantidad de piedras que pueden quedar en dicho centro?

5. En el planeta X31 hay sólo dos tipos de billetes, sin embargo el sistema no es tan malo porque hay solamente quince precios enteros que no se pueden pagar exactamente (se paga de más y se recibe cambio). Si 18 es uno de esos precios que no se pueden pagar exactamente, halla el valor de cada tipo de billete.

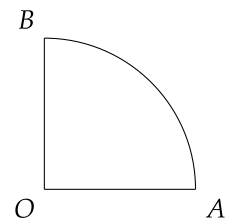
V Olimpiada de Mayo (1999)

Nivel 2

---

1. Un número natural de tres cifras se llama tricúbico si es igual a la suma de los cubos de sus dígitos. Hallar todas las parejas de números consecutivos tales que ambos sean tricúbicos.

2. La figura representa la cuarta parte de un círculo de radio 1. En el arco AB, se consideran dos puntos P y Q de forma tal que la recta PQ es paralela a la recta AB. Sean X e Y los puntos de intersección de la recta PQ con las rectas OA y OB respectivamente.



Calcular $PX^2 + PY^2$.

3. Se tiene un tablero de 3 filas y 10 columnas. La primera fila se completa con los números del 1 al 10, en ese orden. La segunda fila se completa con los números del 1 al 10, en cualquier orden. En cada casilla de la tercera fila se escribe la suma de los dos números escritos arriba. ¿Hay alguna forma de completar la segunda fila de modo que las cifras de las unidades de los números de la tercera fila sean todas distintas?

4. Sea ABC un triángulo equilátero. M es el punto medio del segmento AB y N es el punto medio del segmento BC. Sea P el punto exterior a ABC tal que el triángulo ACP es isósceles rectángulo en P. PM y AN se cortan en I. Probar que CI es la bisectriz del ángulo MCA.

5. Se tienen 12 puntos que son vértices de un polígono regular de 12 lados. Rafael debe trazar segmentos que tengan sus dos extremos en dos de los puntos dibujados. Tiene permitido que cada punto sea extremo de más de un segmento y que los segmentos se crucen, pero tiene prohibido trazar tres segmentos que sean los tres lados de un triángulo en el que cada vértice es uno de los 12 puntos iniciales. Hallar el máximo número de segmentos que puede trazar Rafael y justificar por qué no puede trazar un número mayor de segmentos.

VI Olimpiada de Mayo (2000)

Nivel 2

---

1. El conjunto $\{1,2,3,4\}$ puede ser partido en dos subconjuntos $A = \{1,4\}$ y $B = \{3,2\}$ sin elementos comunes y tales que la suma de los elementos de A es igual a la suma de los elementos de B. Una tal partición es imposible para el conjunto $\{1,2,3,4,5\}$ y también para el conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$. Determinar todos los valores de n para los que el conjunto de los primeros n números naturales puede ser partido en dos subconjuntos sin elementos comunes tales que la suma de los elementos de cada subconjunto sea la misma.

2. En un paralelogramo de área 1 se trazan las rectas que unen cada vértice con el punto medio de cada lado no adyacente a él. Las ocho rectas trazadas determinan un octógono en el interior del paralelogramo. Calcular el área de dicho octógono.

3. Sean S una circunferencia de radio 2; S_1 una circunferencia de radio 1 tangente interiormente a S en B y S_2 una circunferencia de radio 1 tangente a S_1 en el punto A pero que no es tangente a S. Si K es el punto de intersección de la recta AB con la circunferencia S, demostrar que K pertenece a la circunferencia S_2.

4. Se tiene un cubo de $3 \times 3 \times 3$ formado por la unión de 27 cubitos de $1 \times 1 \times 1$. Se retiran algunos cubitos de tal modo que los que permanecen siguen formando un sólido constituido por cubitos que están unidos por lo menos por una cara al resto del sólido. Cuando se retira un cubito los que permanecen lo hacen en el mismo lugar en que estaban. ¿Cuál es el máximo número de cubitos que se pueden retirar de modo que el área del sólido que resulta sea igual al área del cubo original?

5. Un rectángulo se puede dividir en n cuadrados iguales y también se puede dividir en $n + 98$ cuadrados iguales. Si el área del rectángulo es n, con n entero, hallar los lados del rectángulo. Dar todas las posibilidades.

VII Olimpiada de Mayo (2001)

Nivel 2

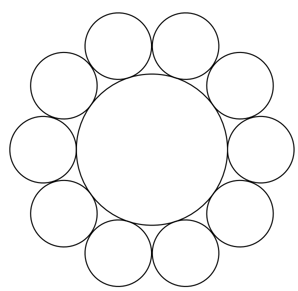
---

1. En mi calculadora una de las teclas del 1 al 9 funciona mal: al apretarla aparece en pantalla un dígito entre 1 y 9 que no es el que corresponde. Cuando traté de escribir el número 987654321, apareció en la pantalla un número divisible por 11 y que deja resto 3 al dividirlo por 9. ¿Cuál es la tecla descompuesta? ¿Cuál es el número que apareció en la pantalla?

2. En el trapecio $ABCD$, el lado DA es perpendicular a las bases AB y CD. La base AB mide 45, la base CD mide 20 y el lado BC mide 65. Sea P en el lado BC tal que BP mide 45 y sea M el punto medio de DA. Calcula la medida del segmento PM.

3. En un tablero de 3 filas y 555 columnas, se colorean de rojo 3 casillas, una en cada una de las 3 filas. Si se escriben en las casillas, ordenadamente por filas, de izquierda a derecha, los números del 1 al 1665 (en la primera fila del 1 al 555, en la segunda del 556 al 1110 y en la tercera del 1111 al 1665) hay 3 números que quedan escritos en casillas rojas. Si se escriben en las casillas, ordenadamente por columnas, de arriba hacia abajo, los números del 1 al 1665 (en la primera columna del 1 al 3, en la segunda del 4 al 6, en la tercera del 7 al 9,..., y en la última del 1663 al 1665) hay 3 números que quedan escritos en casillas rojas. Llamamos números rojos a los que en alguna de las dos distribuciones quedan escritos en casillas rojas. Indica cuáles son las 3 casillas que hay que colorear de rojo para que sólo haya 3 números rojos. Muestra todas las posibilidades.

4. Alrededor de un círculo se ubican diez monedas de 1 cm de radio como se indica en la figura. Cada moneda es tangente al círculo y a sus dos monedas vecinas.



Demuestra que la suma de las áreas de las diez monedas es el doble del área del círculo.

5. En el pizarrón están escritos los números naturales desde 1 hasta 2001 inclusive. Hay que borrar algunos números de modo que entre los que quedan sin borrar sea imposible elegir dos números distintos tales que el resultado de su multiplicación sea igual a alguno de los números que quedan sin borrar. ¿Cuál es la mínima cantidad de números que se deben borrar? Para dicha cantidad, presenta un ejemplo que muestre qué números se borran. Justifica por qué, si se borran menos números, no se tiene la propiedad deseada.

VIII Olimpiada de Mayo (2002)

Nivel 2

---

1. Utilizando cubitos blancos de lado 1 se armó un prisma (sin huecos). Se pintaron de negro las caras del prisma. Se sabe que los cubitos que quedaron con exactamente 4 caras blancas son 20 en total. Determina cuáles pueden ser las dimensiones del prisma. Da todas las posibilidades.

2. Sea k un número entero positivo fijo, $k \leq 10$. Dada una lista de diez números, la operación permitida es: elegir k números de la lista, y sumarle 1 a cada uno de ellos. Se obtiene así una nueva lista de diez números. Si inicialmente se tiene la lista $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, determina los valores de k para los que es posible, mediante una secuencia de operaciones permitidas, obtener una lista que tenga los diez números iguales. En cada caso indica la secuencia.

3. En un triángulo ABC, rectángulo en A e isósceles, sea D un punto del lado AC ($D \neq A$ y $D \neq C$) y sea E el punto de la prolongación del lado BA tal que el triángulo ADE es isósceles. Si P es el punto medio del segmento BD, R es el punto medio del segmento CE y Q el punto en donde se cortan las rectas ED y BC, demuestra que el cuadrilátero $ARQP$ es un cuadrado.

4. Los vértices de un polígono regular de 2002 lados están numerados del 1 al 2002, en sentido horario. Dado un entero n, $1 \leq n \leq 2002$, se colorea de azul el vértice n, luego, siguiendo el sentido horario, se cuentan n vértices comenzando en el siguiente de n, y se colorea de azul el número n. Y así sucesivamente, a partir del vértice que sigue al último vértice que se ha coloreado, se cuentan n vértices, coloreados o sin colorear, y al número n se lo colorea de azul. Cuando el vértice que toca colorear ya es azul, el proceso se detiene. Denotamos $P(n)$ al conjunto de vértices azules que se obtienen con este procedimiento cuando se comienza por el vértice n. Por ejemplo, $P(364)$ está formado por los vértices 364, 728, 1092, 1456, 1820, 182, 546, 910, 1274, 1638 y 2002. Determina todos los enteros n, $1 \leq n \leq 2002$, tales que $P(n)$ tiene exactamente 14 vértices.

5. Dados x e y enteros positivos, consideramos una cuadrícula de $x \times y$, que tiene coloreados de rojo los $(x + 1) \times (y + 1)$ puntos que son vértices de cuadraditos. Inicialmente hay una hormiga en cada uno de los puntos rojos. En un instante dado, todas las hormigas comienzan a caminar por las líneas de la cuadrícula, y todas lo hacen con la misma velocidad. Cada vez que llegan a un punto rojo, giran 90° en alguna dirección. Determina todos los valores de x e y para los cuales es posible que las hormigas continúen moviéndose indefinidamente de manera que en ningún momento haya dos o más hormigas en un mismo punto rojo. (No interesan las posibles coincidencias en puntos de las líneas de la cuadrícula que no son rojos.)

IX Olimpiada de Mayo (2003)

Nivel 2

---

1. Se eligen cuatro dígitos a, b, c, d distintos entre sí y distintos de cero y se escribe la lista de todos los números de cuatro cifras que se obtienen intercambiando de lugar los dígitos a, b, c, d. ¿Qué dígitos hay que elegir para que la lista tenga la mayor cantidad posible de números de cuatro cifras que sean múltiplos de 36?

2. Sea $ABCD$ un rectángulo de lados $AB = 4$ y $BC = 3$. La perpendicular a la diagonal BD trazada por A corta a BD en el punto H. Denotamos M al punto medio de BH y N al punto medio de CD. Calcula la medida del segmento MN.

3. Halla todos los pares de números enteros positivos (a, b) tales que $8b + 1$ es múltiplo de a y $8a + 1$ es múltiplo de b.

4. Beto marcó 2003 puntos verdes en el plano, de manera que todos los triángulos con sus tres vértices verdes tienen área menor que 1. Demuestra que los 2003 puntos verdes están contenidos en un triángulo T de área menor que 4.

5. Una hormiga que está en una arista de un cubo de lado 8, debe realizar un recorrido por la superficie del cubo y regresar al punto de partida. Su camino debe contener puntos interiores de las seis caras del cubo y debe visitar sólo una vez cada cara del cubo. Halla la longitud del camino más corto que puede realizar la hormiga y justifica por qué es el camino más corto.

X Olimpiada de Mayo (2004)

Nivel 2

1. Julián escribe cinco números enteros positivos, no necesariamente distintos, tales que su producto sea igual a su suma. ¿Cuáles pueden ser los números que escribe Julián?

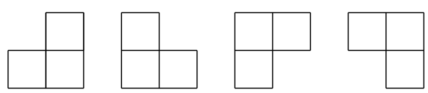
2. La mamá de Pepito quiere preparar n paquetes de 3 caramelos para regalar en la fiesta de cumpleaños, y para ello comprará caramelos surtidos de 3 sabores distintos. Puede comprar cualquier número de caramelos pero no puede elegir cuántos son de cada gusto. Ella quiere poner en cada paquete un caramelo de cada sabor, y si esto no es posible usará sólo caramelos de un sabor y todos los paquetes tendrán 3 caramelos de ese sabor. Determina el menor número de caramelos que debe comprar para poder armar los n paquetes. Explica por qué si compra menos caramelos no tiene la certeza de poder armar los paquetes como quiere.

3. Disponemos de una mesa de billar de 8 metros de largo y 2 metros de ancho, con una única bola en su centro. La lanzamos en línea recta y, tras recorrer 29 metros, se detiene en una esquina de la mesa. ¿Cuántas veces ha rebotado la bola contra los bordes de la mesa? Nota: Cuando la bola rebota contra un borde de la mesa los dos ángulos que forma su trayectoria con el borde de la mesa son iguales.

4. Halla todos los números naturales x, y, z que verifican simultáneamente

$$\begin{aligned} x \cdot y \cdot z &= 4104 \\ x + y + z &= 77. \end{aligned}$$

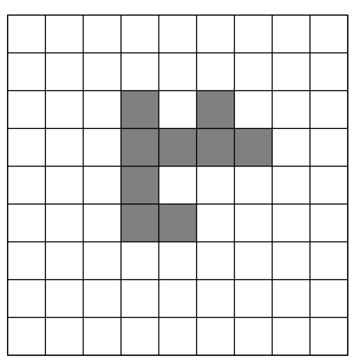
5. Sobre un tablero de 9×9, dividido en casillas de 1×1, se colocan, sin superposiciones y sin sobresalirse del tablero, piezas de la forma



donde cada pieza cubre exactamente 3 casillas.

a) A partir del tablero vacío, ¿cuál es la máxima cantidad de piezas que se pueden colocar?

b) A partir del tablero con 3 piezas ya colocadas como muestra el diagrama siguiente,



¿cuál es la máxima cantidad de piezas que se pueden colocar?

XI Olimpiada de Mayo (2005)

Nivel 2

1. Determina el menor número de tres cifras que sea el producto de dos números de dos cifras, de modo que las siete cifras de estos tres números sean todas diferentes.

2. Gonzalo escribe en el pizarrón cuatro números elegidos entre 0, 1, 2, 3 ó 4. Puede repetir números. Nicolás realiza repetidas veces la siguiente operación: cambia uno de los números, a su elección, por el resto de dividir entre 5 el producto de otros dos números del pizarrón, a su elección. El objetivo de Nicolás es lograr que los cuatro números sean iguales. Determina si Gonzalo puede elegir los números iniciales de modo que a Nicolás le sea imposible lograr su objetivo.

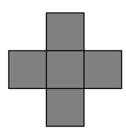
3. En el triángulo isósceles ABC, con $AB = AC$, sea M el punto medio de BC. El punto D en el lado BC es tal que $\angle BAD = \frac{1}{6}\angle BAC$. Además, la recta perpendicular a AD por C corta a AD en N de modo que $DN = DM$. Calcula los ángulos del triángulo ABC.

4. En un baile hay 12 hombres, números de 1 a 12, y 12 mujeres numeradas, de 1 a 12. A cada hombre se le asigna un amigo secreto entre los otros 11. Todos bailaron todas las piezas. En la primera pieza cada hombre bailó con la mujer que tiene su mismo número. A partir de allí, cada hombre bailó la nueva pieza con la mujer que había bailado la pieza anterior con su amigo secreto. En la tercera pieza las parejas fueron:

Hombres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Mujeres	5	11	2	12	8	10	9	4	6	3	7	1

Halla el número del amigo secreto de cada hombre.

5. Sobre un tablero de 9x9 se ha posado la nave enemiga que cubre exactamente 5 casillas del tablero, así:



La nave es invisible. Cada misil defensivo cubre exactamente una casilla, y destruye a la nave si impacta en una de las 5 casillas que ésta ocupa. Determina el mínimo número de misiles que se necesitan para destruir con certeza a la nave enemiga.

XII Olimpiada de Mayo (2006)

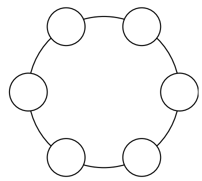
Nivel 2

---

1. Determinar todas las parejas de números naturales a y b tales que $\dfrac{a+1}{b}$ y $\dfrac{b+1}{a}$ son números naturales.

2. En el pizarrón están escritos varios números primos (algunos repetidos). Mauro sumó los números del pizarrón y Fernando multiplicó los números del pizarrón. El resultado que obtuvo Fernando es igual a 40 veces el resultado que obtuvo Mauro. Determinar cuáles pueden ser los números del pizarrón. Dar todas las posibilidades.

3. Escribir un número entero positivo en cada casilla de modo que:

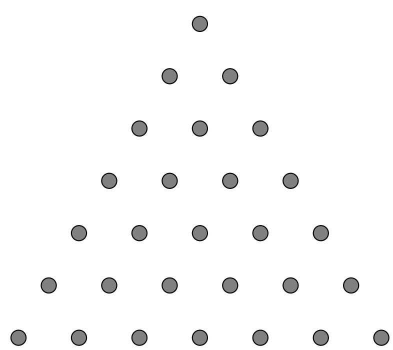


- Los seis números sean distintos.
- La suma de los seis números sea 100.
- Si se multiplica cada número por su vecino (en el sentido de las agujas del reloj) y se suman los seis resultados de esas seis multiplicaciones, se obtenga el menor valor posible.

Explicar por qué no se puede obtener un valor menor.

4. Sea $ABCD$ un trapecio de bases AB y CD. Sea O el punto de intersección de sus diagonales AC y BD. Si el área del triángulo ABC es 150 y el área del triángulo ACD es 120, calcular el área del triángulo BCO.

5. Con 28 puntos se forma una rejilla triangular de lados iguales, como se muestra en la figura.



Una operación consiste en elegir tres puntos que sean los vértices de un triángulo equilátero y retirar estos tres puntos de la rejilla. Si luego de realizar varias de estas operaciones queda solamente un punto, ¿en qué posiciones puede quedar dicho punto? Dar todas las posibilidades e indicar en cada caso las operaciones realizadas. Justificar por qué el punto que queda no puede estar en otra posición.

XIII Olimpiada de Mayo (2007)

Nivel 2

---

1. Determinar el mayor número natural que tiene todas sus cifras distintas y es múltiplo de 5, de 8 y de 11.

2. Sea $n > 2$ un entero par. En las casillas de un tablero de $n \times n$ se deben colocar fichas de modo que en cada columna la cantidad de fichas sea par y distinta de cero, y en cada fila la cantidad de fichas sea impar. Determinar la menor cantidad de fichas que hay que colocar en el tablero para cumplir esta regla. Mostrar una configuración con esa cantidad de fichas y explicar porqué con menos fichas no se puede cumplir la regla.

3. Ocho niños, todos de distintas estaturas, deben formar una fila ordenada de menor a mayor. Diremos que la fila tiene exactamente un error si hay un niño que está inmediatamente detrás de otro más alto que él, y todos los demás (salvo el primero de la fila) están inmediatamente detrás de uno más bajo. ¿De cuántas maneras los ocho niños pueden formar una fila con exactamente un error?

4. Alex y Bruno escriben, entre los dos, un número natural de 6 dígitos distintos. Cada uno, en su turno, escribe un dígito a la derecha del último dígito que escribió el otro. Empieza Alex con el primer dígito de la izquierda y termina Bruno con el último dígito de la derecha. (Está prohibido escribir un dígito que ya se usó.) Bruno gana si el número de 6 dígitos es primo. En caso contrario, gana Alex. Determinar cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explicar cómo debe hacer para ganar sin importar lo bien que juegue el otro.

5. En un triángulo ABC, $\angle BAC = 2\angle BCA$ y $2\angle ABC = \angle BAC + \angle BCA$. La bisectriz del ángulo BCA corta al lado AB en E; y F es el punto medio del segmento AE. La altura correspondiente al lado BC es AD. La mediatriz del segmento DF corta al lado AC en M. Demostrar que $AM = CM$.

XIV Olimpiada de Mayo (2008)

Nivel 2

---

1. En el pizarrón está escrita la siguiente expresión

$$1 - 2 - 2^2 - 2^3 - 2^4 - 2^5 - 2^6 - 2^7 - 2^8 - 2^9 - 2^{10}$$

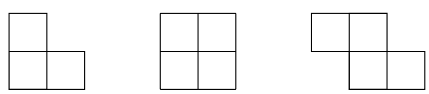
Juan intercala paréntesis de distintas maneras y efectúa el cálculo que queda. Por ejemplo así $1 - 2 - (2^2 - 2^3) - 2^4 - (2^5 - 2^6 - 2^7) - 2^8 - (2^9 - 2^{10}) = 403$ o así $1 - (2 - 2^2 - (2^3 - 2^4) - (2^5 - 2^6 - 2^7)) - (2^8 - 2^9) - 2^{10} = -933$.
¿Cuántos resultados diferentes puede obtener Juan?

2. En el rectángulo $ABCD$ de lados AB, BC, CD y DA, sea P un punto del lado AD tal que $\angle BPC = 90°$. La perpendicular a BP trazada por A corta a BP en M y la perpendicular a CP trazada por D corta a CP en N. Demuestra que el centro del rectángulo está en el segmento MN.

3. En los números $1010\ldots101$ se alternan unos y ceros; si hay n unos, hay $n-1$ ceros ($n \geq 2$). Determina los valores de n para los cuales el número $1010\ldots101$, que tiene n unos, es primo.

4. En el plano se tienen 16 rectas tales que no hay dos paralelas ni tres concurrentes. Sebastián tiene que colorear los 120 puntos que son intersección de dos de las rectas de modo que en cada recta todos los puntos sean de distinto color. Determina el mínimo número de colores que necesita Sebastián para su tarea. ¿Y si las rectas son 15 (en este caso, los puntos son 105)?

5. Matías cubrió un tablero cuadrado de 7×7, dividido en casillas de 1×1, con piezas de los siguientes tres tipos



tipo 1 tipo 2 tipo 3

sin huecos ni superposiciones, y sin salirse del tablero. Cada pieza del tipo 1 cubre exactamente 3 casillas y cada pieza del tipo 2 o del tipo 3 cubre exactamente 4 casillas. Determina la cantidad de piezas del tipo 1 que pudo haber usado Matías. (Las piezas se pueden girar y dar vuelta.)

XV Olimpiada de Mayo (2009)

Nivel 2

---

1. Inicialmente en el pizarrón está escrito el número 1. En cada paso, se borra el número del pizarrón y se escribe otro, que se obtiene aplicando una cualquiera de las siguientes operaciones:

a) Operación A: Multiplicar el número del pizarrón por $\frac{1}{2}$.

b) Operación B: Restarle al 1 el número del pizarrón.

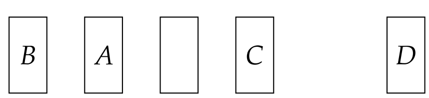
Por ejemplo, si en el pizarrón está el número $\frac{3}{8}$ se lo puede reemplazar por $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$ o por $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$. Da una secuencia de pasos al cabo de los cuales el número del pizarrón sea $\frac{2009}{2^{2009}}$.

2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que el triángulo ABD es equilátero y el triángulo BCD es isósceles, con $\angle BCD = 90°$. Si E es el punto medio del lado AD, calcula la medida del ángulo CED.

3. En la siguiente suma: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, si suprimimos los dos primeros signos $+$ obtenemos la nueva suma $123 + 4 + 5 + 6 = 138$. Suprimiendo tres signos $+$ podemos obtener $1 + 23 + 456 = 480$. Consideremos ahora la suma $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13$, en la que se van a suprimir algunos signos $+$. ¿Cuáles son los tres menores múltiplos de 100 que podemos obtener de esta forma?

4. Cada casilla de un tablero de 5×5 se pinta de rojo o de azul, de tal forma que se cumple la siguiente condición: Para cualesquiera dos filas y dos columnas, de las 4 casillas que están en sus intersecciones, hay 4, 2 ó 0 pintadas de rojo. ¿De cuántas formas se puede pintar el tablero?

5. Un solitario se inicia con 25 cartas en fila. Algunas están boca arriba, y otras boca abajo. En cada movimiento se debe elegir una carta que esté boca arriba, retirarla, y dar vuelta las cartas vecinas a la que se retiró (si las hay). El solitario se gana cuando se logra, repitiendo este movimiento, retirar las 25 cartas de la mesa. Si inicialmente hay n cartas boca arriba, halla todos los valores de n para los cuales se puede ganar el solitario. Explica cómo se gana, independientemente de la ubicación inicial de las cartas boca arriba, y justifica por qué es imposible ganar para los otros valores de n. Dos cartas son vecinas cuando una está inmediatamente al lado de otra, a la derecha o a la izquierda. Por ejemplo: la carta marcada con A tiene dos cartas vecinas y la marcada con B una sola. Después de retirar una carta queda un hueco, de modo que la marcada con C tiene únicamente una carta vecina, y la marcada con D no tiene ninguna.



XVI Olimpiada de Mayo (2010)

Nivel 2

---

1. Determina el menor entero positivo que tiene todos sus dígitos iguales a 4, y es múltiplo de 169.

2. Consideramos el rectángulo $ABCD$ y la circunferencia de centro D y radio DA, que corta a la prolongación del lado AD en el punto P. La recta PC corta a la circunferencia en el punto Q y a la prolongación del lado AB en el punto R. Demuestra que $QB = BR$.

3. Hallar el mínimo $k > 2$ para el cual existen k números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados es un cuadrado.

4. Sea n un entero tal que $1 < n < 2010$. Dado un polígono regular de 2010 lados y n monedas, debemos colorear los vértices del polígono utilizando n colores dados, y luego ubicar las n monedas en n vértices del polígono. A continuación, cada segundo, todas las monedas se desplazan al vértice vecino, girando en el sentido de las agujas del reloj. Determina los valores de n para los que es posible hacer la coloración y elegir las posiciones iniciales de las monedas, de manera que en todo momento las n monedas estén todas en vértices de distinto color.

5. Se tienen las siguientes piezas: un rectángulo de 4×1, dos rectángulos de 3×1, tres rectángulos de 2×1 y cuatro cuadrados de 1×1. Ariel y Bernardo juegan el siguiente juego en un tablero de $n \times n$, donde n es un número que elige Ariel. En cada movida, Bernardo recibe de Ariel una pieza R. A continuación Bernardo analiza si puede colocar R en el tablero de modo que no tenga puntos en común con ninguna de las piezas colocadas anteriormente (ni siquiera un vértice común). Si existe una tal ubicación para R, Bernardo debe elegir una de ellas y ubicar R. El juego se detiene si es imposible ubicar R de la manera explicada, y Bernardo gana. Ariel gana sólo si se han colocado las 10 piezas en el tablero.

a) Supongamos que Ariel le da las piezas a Bernardo en orden decreciente de tamaño. ¿Cuál es el menor n que le garantiza a Ariel la victoria?

b) Para el n hallado en (a), si Bernardo recibe las piezas en orden creciente de tamaño, ¿tiene Ariel garantizada la victoria?

ACLARACIÓN: Cada pieza debe cubrir exactamente un número de cuadrados unitarios del tablero igual a su propio tamaño. Los lados de las piezas pueden coincidir con partes del borde del tablero.

XVII Olimpiada de Mayo (2011)

Nivel 2

---

1. Hallar un número entero positivo x tal que la suma de los dígitos de x sea mayor que 2011 veces la suma de los dígitos del número $3x$ (3 por x).

2. Decimos que un número de cuatro dígitos $\overline{abcd}$ ($a \neq 0$) es porá si se cumplen las siguientes condiciones:

$$a \leq b;$$
$$\overline{ab} - \overline{cd} = \overline{cd} - \overline{ba}.$$

Por ejemplo, 2011 es porá porque $20 - 11 = 11 - 02$. Hallar todos los números porá.

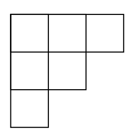
3. En un triángulo rectángulo ABC tal que $AB = AC$, M es el punto medio de BC. Sea P un punto de la mediatriz de AC que pertenece al semiplano determinado por BC que no contiene a A. Las rectas CP y AM se cortan en Q. Calcular el ángulo que forman AP y BQ.

4. Dados n puntos en una circunferencia se escribe al lado de uno de ellos un 1 y al lado de cada uno de los otros un 0. La operación permitida consiste en elegir un punto que tenga un 1 y cambiar el número de ese punto y también los números de sus dos vecinos, el de la izquierda y el de la derecha (donde hay 1 se escribe 0 y donde hay 0 se escribe 1).

a) Si n = 101, mostrar que se puede lograr, mediante una sucesión de operaciones permitidas, que cada uno de los n puntos tenga escrito un 0.

b) Si n = 102, demostrar que es imposible lograr todos 0.

5. Determinar para qué números naturales n es posible cubrir completamente un tablero de $n \times n$, dividido en casillas de 1×1, con piezas como la de la figura, sin huecos ni superposiciones y sin salirse del tablero.



Cada una de las piezas cubre exactamente seis casillas.
Nota: Las piezas se pueden girar.

XVIII Olimpiada de Mayo (2012)

Nivel 2

1. Un número de cuatro cifras es tartamudo si tiene las dos primeras cifras iguales entre sí y las dos últimas cifras iguales entre sí, por ejemplo 3311 y 2222 son números tartamudos. Hallar todos los números tartamudos de cuatro cifras que son cuadrados perfectos.

2. Se tienen dos octógonos regulares de cartulina. Los vértices de cada octógono se numeran de 1 a 8, en cualquier orden (el orden para un octógono puede ser diferente al del otro). Luego los octógonos se superponen, de modo que cada vértice de uno quede en contacto con un vértice del otro. Los números de los vértices en contacto se multiplican, y los 8 productos obtenidos se suman. Demostrar que, cualquiera sea el orden en que hayan sido numerados los vértices, siempre es posible superponer los octógonos de manera que esa suma sea mayor o igual que 162.

3. En el triángulo ABC, se verifica que $\angle ABC = 2\angle ACB$ y $\angle BAC > 90°$. Llamamos M al punto medio de BC. La perpendicular por C al lado AC corta a la recta AB en el punto D. Demostrar que $\angle AMB = \angle DMC$.

4. Se dan seis puntos de manera que no haya tres sobre una misma recta y que las longitudes de los segmentos determinados por estos puntos sean todas distintas. Consideramos todos los triángulos que tienen sus vértices en estos puntos. Demostrar que hay un segmento que es a la vez el lado más corto de uno de esos triángulos y el lado más largo de otro.

5. Hay 27 cajas ubicadas en una fila; cada una contiene por lo menos 12 bolitas. La operación permitida es transferir una bolita desde una caja hacia su vecina de la derecha, siempre y cuando dicha vecina contenga más bolitas que la caja desde la que se hará la transferencia. Diremos que una distribución inicial de las bolitas es feliz si es posible lograr, mediante una sucesión de operaciones permitidas, que todas las bolitas queden en una misma caja. Determinar cuál es el menor número total de bolitas con el que se puede tener una distribución inicial feliz.

XIX Olimpiada de Mayo (2013)

Nivel 2

---

1. Sofía sumó los números de las páginas de un libro empezando por el 1 en la primera página y obtuvo 2013. Pablo vio como hizo la suma y se dio cuenta que Sofía se saltó una página. ¿Cuántas páginas tiene el libro y qué número de página se saltó?

2. Se dispone de un regla sin números y de un trisector que marca en cualquier segmento los dos puntos que lo dividen en tres partes iguales. Construir el punto medio de un segmento dado utilizando exclusivamente estas dos herramientas.

3. Se marcan varios puntos distintos en el plano, y se trazan todos los segmentos determinados por esos puntos. Una recta r no pasa por ninguno de los puntos marcados y corta a exactamente 60 de los segmentos que hemos trazado. ¿Cuántos segmentos no están cortados por r? Dar todas las posibilidades.

4. ¿Es posible escribir 100 números impares en una fila de tal forma que la suma de cada 5 números adyacentes sea un cuadrado perfecto y que la suma de cada 9 números adyacentes también sea un cuadrado perfecto?

5. Se tienen 600 tarjetas, 200 de ellas tienen escrito el número 5, 200 tienen escrito el número 2 y las otras 200 tienen escrito el número 1. Usando estas tarjetas se quieren formar grupos de tal forma que en cada grupo la suma de los números sea 9. ¿Cuál es la mayor cantidad de grupos que se pueden formar?

XX Olimpiada de Mayo (2014)

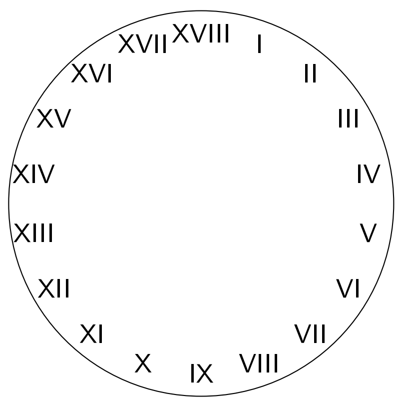
Nivel 2

1. El sendero que va del pueblo hasta el refugio en la montaña tienen 76 km. Un grupo de andinistas lo recorrió en 10 días, de manera tal que en dos días consecutivos nunca caminaron más de 16 km, pero en tres días consecutivos siempre caminaron por lo menos 23 km. Determina la máxima cantidad de kilómetros que pudieron haber recorrido en un día.

2. En un cuadrilátero convexo $ABCD$, sean M, N, P y Q los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. Si los segmentos MP y NQ dividen a $ABCD$ en cuatro cuadriláteros con la misma área, demostrar que $ABCD$ es un paralelogramo.

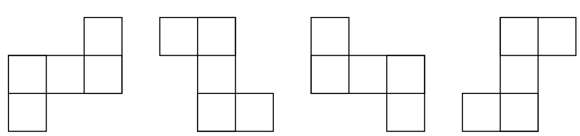
3. Ana y Luca juegan al siguiente juego. Ana escribe una lista de n números enteros distintos. Luca gana si puede elegir cuatro números distintos, a, b, c y d, de modo que el número $a + b - c - d$ sea múltiplo de 20. Determina el mínimo valor de n para el que, cualquiera que sea la lista de Ana, Luca pueda ganar.

4. En una excavación en la antigua Roma se encontró un reloj insual con 18 divisiones marcados con números romanos (ver figura).



Desgraciadamente el reloj estaba roto en 5 pedazos. La suma de los números en cada pedazo era la misma. Mostrar de qué manera pudo estar roto el reloj.

5. Cada casilla de un tablero de $n \times n$, con $n \geq 3$, está coloreado con uno de 8 colores. ¿Para qué valores de n se puede afirmar que alguna de estas figuaras



incluida en el tablero, contiene dos casillas del mismo color?

XXI Olimpiada de Mayo (2015)

Nivel 2

---

1. Ana y Celia venden varios objetos y obtienen por cada objeto tantos euros como objetos vendieron. El dinero obtenido está constituido por algunos billetes de 10 euros y menos de 10 monedas de 1 euro. Deciden repartir el dinero del siguiente modo: Ana toma un billete de 10 euros y después Celia, y así sucesivamente hasta que Ana toma el último billete de 10 euros, y Celia se lleva todas las monedas de 1 euro. ¿Cuántos euros más que Celia se llevó Ana? Dar todas las posibilidades.

2. Se tiene un tablero de 7×7. Se desea pintar algunas de sus casillas de manera tal que cualquier subtablero de 3×3 tenga más casillas pintadas que sin pintar. ¿Cuál es la menor cantidad de casillas que se deben pintar? Mostrar una configuración con esa cantidad de casillas pintadas y explicar porqué no es posible con menos.
ACLARACIÓN: Un subtablero de 3×3 es un cuadrado formado por 9 casillas del tablero.

3. Sea $ABCDEFGHI$ un polígono regular de 9 lados. Los segmentos AE y DF se cortan en P. Demostrar que PG y AF son perpendiculares.

4. En una pizarra están escritos los primeros 510 enteros positivos: $1, 2, 3, \ldots, 510$. Una operación consiste en borrar dos números cuya suma sea un número primo. ¿Cuál es el máximo número de operaciones seguidas que se puede hacer? Mostrar cómo se logra y explicar porqué no se puede hacer más operaciones.

5. Se tienen 65 puntos del plano. Se trazan todas las rectas que pasan por dos de ellos y se obtienen exactamente 2015 rectas distintas. Demostrar que al menos cuatro de los puntos están alineados.